Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
7600023 - Termodinâmica e Física Estatística - 2022-2

Prof. Leonardo Paulo Maia

Gabarito prova 01 - 2022/09/23

1.

a Como as temperaturas nas escalas Rankine (T_R) e Fahrenheit (F) crescem "no mesmo passo" (mesma graduação), a relação entre elas é puramente aditiva, como aquela entre as medidas Kelvin e Celsius,

$$T_R = F(T_R) - F(0),$$

onde $F(0)$ é a medida do zero absoluto na escala Fahrenheit e corresponde ao mesmo estado físico, zero absoluto, na escala Celsius. Mas conhecemos $C(0)$!

$$\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9} \implies \frac{C(0)}{5} = \frac{F(0)-32}{9} \implies F(0) = 32 + \frac{9}{5}C(0) = 32 + \frac{9}{5}(-273.15) \therefore$$
$$\therefore \boxed{F(0) = -459.67}$$

Assim, $\boxed{T_R = F + 459.67}$ é o análogo de $T_K = C + 273.15$.

b As duas últimas expressões do item acima poderiam ser substituídas na relação entre C e F para eliminar estas variáveis, deixando apenas T_K e T_R na expressão resultante. Mas isso só levaria a cálculos desnecessários! Por construção, como ambas as escalas Kelvin e Rankine são absolutas, seus zeros devem ser atingidos simultaneamente, e é claro que sua relação é puramente multiplicativa, sem termos aditivos: $T_R = \alpha T_K$, para algum escalar α. Tomando variações ($\Delta x \equiv x_{\text{final}} - x_{\text{inicial}}$) de dois estados nessa última relação, $\Delta T_R = \alpha \cdot \Delta T_K$. Mas $\Delta T_K = \Delta C$, $\Delta T_R = \Delta F$ e

$$\frac{\Delta C}{5} = \frac{\Delta F}{9},$$

de modo que

$$\alpha = \frac{\Delta T_R}{\Delta T_K} = \frac{\Delta F}{\Delta C} = \frac{9}{5}$$

e

$$\boxed{T_R = \frac{9}{5}T_K.}$$

c $(\mu_K - \sigma_K, \mu_K + \sigma_K) = (302.15\,\mathrm{K},\ 304.15\,\mathrm{K})$. Mas $\mu_R = \langle T_R\rangle = (9/5)\langle T_K\rangle = (9/5)\mu_K$ e $\sigma_R = \sqrt{\mathrm{var}\, T_R} = \sqrt{(81/25)\mathrm{var}\, T_K} = (9/5)\sigma_K$. Basta multiplicar os extremos do intervalo original por $(9/5) = 1.8$:

$$\boxed{(\mu_R - \sigma_R, \mu_R + \sigma_R) = (543.87\,^o\mathrm{R},\ 547.47\,^o\mathrm{R})}$$

2.

a

$$g_X(z) \equiv \sum_{n\in S_X} p_n z^n \implies g_X'(z) = \sum_{n\in S_X} n\, p_n z^{n-1} \implies g_X'(1) = \sum_{n\in S_X} n\, p_n$$

$$\therefore \boxed{g_X'(1) = \langle X\rangle}$$

b

$$g_X(z) \equiv \sum_{n\in S_X} p_n z^n \implies g_X''(z) = \sum_{n\in S_X} n(n-1)\, p_n z^{n-2} \implies g_X''(1) = \sum_{n\in S_X} n(n-1)\, p_n$$

$$\therefore \boxed{g_X''(1) = \langle X(X-1)\rangle}$$

c

$$g_X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1}z^n = pz\sum_{n=1}^{\infty}(qz)^{n-1} = pz\sum_{m=0}^{\infty}(qz)^m$$

$$\therefore \boxed{g_X(z) = \frac{pz}{1-qz}}$$

d

$$g_X(z) = \frac{pz}{1-qz} \implies \boxed{g_X'(z) = \frac{p}{(1-qz)^2}} \implies \boxed{g_X''(z) = \frac{2pq}{(1-qz)^3}}$$

Assim,

$$\langle X\rangle = g_X'(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} \therefore \boxed{\langle X\rangle = \frac{1}{p}}$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\, X = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 = [\langle X(X-1)\rangle + \langle X\rangle] - \langle X\rangle^2 = [g_X''(1) + g_X'(1)] - [g_X'(1)]^2 = \\ = \left[\frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p^2} = \left[\frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathrm{var}\, X = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}}$$

3. A posição final S_N após um número N de passos temporais é a soma de N v.a.'s independentes Y_i, $S_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, onde $Y_i = 2$ com probabilidade p e $Y_i = 1$ com probabilidade $1-p$. É perfeitamente possível calcular diretamente a média e a variância de Y_i e, pela independência estatística, $\langle S_N \rangle = N \cdot \langle Y_i \rangle$ e $\operatorname{var} S_N = N \cdot \operatorname{var} Y_i$. Mas é ilustrativo perceber que $Y_i = 1 + X_i$, onde cada X_i é uma variável binária de Bernoulli usual, que vale 1 ou 0 com probabilidades p e $1-p$, respectivamente.

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i = \sum_{i=1}^{N} (1 + X_i) = N + \sum_{i=1}^{N} X_i \equiv N + B,$$

onde B é uma v.a. binomial de parâmetros N e p, com média $\langle B \rangle = Np$ e variância $\operatorname{var} B = Np(1-p)$ bem conhecidos, e que assume $N+1$ valores, de 0 a N. Assim, S_N é uma simples translação de B, assumindo $\boxed{N+1}$ valores, de N a $2N$, com média $\boxed{\langle S_N \rangle = N + Np}$ e variância $\boxed{\operatorname{var} S_N = Np(1-p)}$. Mesmo para quem não se recorda das propriedades da binomial, essa abordagem é mais conveniente por aparecerem mais zeros nos cálculos das propriedades de X_i, em comparação com Y_i: $\langle X_i \rangle = 1 \cdot p + 0(1-p) = p$, $\langle X_i^2 \rangle = 1^2 \cdot p + 0^2(1-p) = p$, $\langle B \rangle = N \cdot \langle X_i \rangle = Np$ e $\operatorname{var} B = N \cdot \operatorname{var} X_i = N(p - p^2)$.

4. Para simplificar as contas, a determinação de C será realizada somente no fim. Nos cálculos abaixo, é conveniente definir a constante

$$\boxed{D \equiv \frac{m}{2k_BT}}$$

para fazermos surgir a função gama após a mudança de variável de v para u dada por

$$u = \left(\frac{m}{2k_BT}\right) v^2 = Dv^2 \iff v^2 = \frac{u}{D}$$

e

$$du = \left(\frac{m}{2k_BT}\right) 2\,v\,dv = D \cdot 2\,v\,dv \iff v\,dv = \frac{du}{2D}.$$

- $$\langle v \rangle = \int_0^\infty v \cdot f(v)\,dv = C \int_0^\infty v \cdot v^2 \cdot \exp\left\{-\frac{mv^2}{2k_BT}\right\} dv = \frac{C}{2D^2} \int_0^\infty u \cdot \mathrm{e}^{-u}\,du =$$
$$= \frac{C}{2D^2} \int_0^\infty u^{2-1} \cdot \mathrm{e}^{-u}\,du = \frac{C}{2D^2}\Gamma(2) = \frac{C}{2D^2} 1! = \frac{C}{2D^2}$$

- $$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} \cdot f(v)\, dv = C \int_0^{\infty} \frac{1}{v} \cdot v^2 \cdot \exp\left\{ -\frac{mv^2}{2k_B T} \right\} dv =$$
$$= C \int_0^{\infty} v \cdot \exp\left\{ -\frac{mv^2}{2k_B T} \right\} dv = \frac{C}{2D} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u}\, du = \frac{C}{2D} \int_0^{\infty} u^{1-1} \cdot \mathrm{e}^{-u}\, du =$$
$$= \frac{C}{2D} \Gamma(1) = \frac{C}{2D} 0! = \frac{C}{2D}$$

- $$1 = \int_0^{\infty} f(v)\, dv = C \int_0^{\infty} v^2 \cdot \exp\left\{ -\frac{mv^2}{2k_B T} \right\} dv = \frac{C}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \cdot \exp\left\{ -\frac{mv^2}{2k_B T} \right\} dv =$$
$$= \frac{C}{2} \left\{ -\frac{d}{d\alpha} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\alpha v^2\}\, dv \right] \right\}_{\alpha = D} = \frac{C}{2} \left\{ -\frac{d}{d\alpha} \left[\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right] \right\}_{\alpha = D} =$$
$$= -\sqrt{\pi} \frac{C}{2} \left\{ \frac{d}{d\alpha} \alpha^{-1/2} \right\}_{\alpha = D} = -\sqrt{\pi} \frac{C}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left\{ \alpha^{-3/2} \right\}_{\alpha = D} = \frac{C\sqrt{\pi}}{4} D^{-3/2}$$

Assim,

$$\boxed{C = \frac{4}{\sqrt{\pi}} D^{+3/2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{3/2}}$$

e

$$\langle v \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{C}{2D^2} \cdot \frac{C}{2D} = \frac{C^2}{4D^3} = \frac{1}{4} \frac{(16/\pi) D^3}{D^3} \therefore \boxed{\langle v \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{4}{\pi}}.$$

5. A expressão dada não é uma densidade de probabilidade, propriamente normalizada, mas é proporcional a uma tal grandeza, faz o papel de uma "função peso". Basta então, ponderar a função dada apropriadamente:

$$\langle \cos\,\theta \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} dv\, d\theta\, \cos\,\theta \left[\frac{1}{2} n v f(v) \sin\theta \cos\theta \right]}{\int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} dv\, d\theta \left[\frac{1}{2} n v f(v) \sin\theta \cos\theta \right]} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2} n \langle v \rangle \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos^2\theta}{\frac{1}{2} n \langle v \rangle \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos\theta} = \frac{-\int_1^0 u^2\, du}{+\int_0^1 w\, dw} = \frac{1/3}{1/2}$$
$$\therefore \boxed{\langle \cos\,\theta \rangle = \frac{2}{3}}.$$