Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
7600023 - Termodinâmica e Física Estatística - 2022-2

Prof. Leonardo Paulo Maia

Prova 01 - 2022/09/23

$$\boxed{\Gamma(p) = \int_0^{\infty} z^{p-1}\mathrm{e}^{-z}\,dz = (p-1)!} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\alpha x^2\}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} \quad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}}$$

1. (2,5) A escala Kelvin de temperatura foi concebida para indicar zero na mais baixa temperatura que se acredita ser possível atingir (o **zero absoluto**) e temperaturas positivas em qualquer outra condição física. Porém, ela não é a única **escala absoluta**. Longe disso, há infinitas outras escolhas: basta manter o mesmo zero absoluto e "subir com outros graus". A escala Kelvin cresce como a escala Celsius e duas medidas de uma mesma temperatura nessas duas escalas relacionam-se por

$$T_K = C + 273.15$$

com notação auto-evidente, mas que pode ser detalhada como

$$T_K = C(T_K) - C(0)$$

se $C(0) = -273.15$ for a leitura em Celsius do zero absoluto. Por outro lado, a *escala absoluta Rankine*, medida em "graus Rankine" (^{o}R), é definida em termos da escala Fahrenheit, no sentido que $1^o\text{R} = 1^o\text{F}$. Lembre-se de que a relação entre as leituras C e F de uma mesma temperatura nas escalas Celsius e Fahrenheit, respectivamente, é

$$\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9}.$$

a (0,5) Abstraia F como $F(T_R)$, determine $F(0)$ e escreva uma relação entre as temperaturas nas escalas Rankine (T_R) e Fahrenheit (F), análoga àquela entre as medidas Kelvin e Celsius. O cálculo numérico de $F(0)$ é tedioso, mas factível mesmo sem uma calculadora. Mesmo assim, pode ser apenas "montado" e $F(0)$ não é necessário para os itens seguintes.

b (1,0) Determine a relação entre as duas medidas absolutas de uma mesma temperatura, T_K e T_R, análoga à relação entre C e F.

c (1,0) A temperatura prevista para uma cidade ou região em certo horário nunca deveria ser um número preciso, pois há heterogeneidades na estrutura espacial de qualquer local. Vamos tratar uma previsão de temperatura como uma v.a. de média μ e desvio padrão σ, e definir "faixa de temperatura esperada" (FTE) como o intervalo $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$. Qual é a FTE em ^{o}R correspondente à FTE $(302.15\,\text{K}, 304.15\,\text{K})$?

2. (2,5) A **função geradora** de uma variável aleatória discreta X é uma função descritiva de uma v.a.. Trata-se de uma transformada da distribuição de probabilidade associada $\{p_n\}$, e é definida como

$$g_X(z) \equiv \sum_{n \in S_X} p_n z^n$$

onde $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ e S_X é o espaço de realizações de X.

a (0,5) De forma completamente geral, determine $g'_X(z) = \frac{d}{dz} g_X(z)$, derivando termo a termo. Agora faça $z = 1$ para obter $g'_X(1)$. Identifique o somatório resultante como uma medida descritiva relevante da v.a. X.

b (0,5) Mostre que $g''_X(1) = \langle X(X-1) \rangle$.

c (0,5) Calcule explicitamente (sem somatórios residuais) a função geradora de uma v.a. geométrica X de parâmetro p, descrita por $p_n = pq^{n-1}$, $q = 1 - p$, $n = 1, 2, \cdots$

d (1,0) Calcule a média e a variância da v.a. X geométrica.

3. (2,5) *Random walk* com viés - Um andarilho desloca-se em uma grade regular unidimensional, mas sempre para o mesmo lado, para a direita (imagine uma ventania constante ou uma inclinação favorecendo aquele lado). Ele tenta resistir àquele viés dando, algumas vezes, apenas um passo simples à direita de cada vez. Porém, outras vezes, com probabilidade p, ele acaba dando **dois** passos (espaciais) à direita em um único intervalo temporal ("passo temporal"). Essas são as duas únicas possibilidades de deslocamento espacial a cada passo temoral. Deslocamentos em diferentes passos temporais são estatisticamente independentes uns dos outros. Quantas e quais são as possíveis posições finais do andarilho? Determine a média e a variância de S_N, que é a posição final após um número N total (fixo!) de passos temporais.

4. (2,5) A distribuição de velocidades (em módulo, $v > 0$) de Maxwell-Boltzmann para um gás tridimensional termalizado à temperatura T é dada por

$$f(v) = C \cdot v^2 \cdot \exp\left\{-\frac{mv^2}{2k_B T}\right\},$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e C é uma constante de normalização que você precisa determinar. Determine o produto das médias $\langle v \rangle$ e $\langle 1/v \rangle$.

5. (2,0) O número de partículas por unidade de área, por unidade de tempo, que incidem em uma superfície com magnitude de velocidade entre v e $v + dv$ e ângulo com a normal da superfície entre θ e $\theta + d\theta$ é

$$\frac{1}{2} n v f(v)\, dv \sin\theta \cos\theta \, d\theta,$$

onde $f(v)$ é alguma distribuição de velocidades e n é uma densidade volumétrica de partículas. Mostre que o valor médio de $\cos\theta$ é $2/3$.