Beamforming de banda estreita usando sinais reais

Suponha que o sinal de interesse seja de banda estreita:

$$f(t) = A.\cos(\Omega_0 t + \varphi) = Ae^{-j\varphi} e^{-j\Omega_0 t} + Ae^{j\varphi} e^{j\Omega_0 t}$$

em que A e φ podem variar lentamente: $A = A(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ com $\Omega_{max} \ll \Omega_0$.

O sinal em cada antena é

$$x_m(t) = A\cos(\Omega_0(t+\tau_m)+\varphi) = Ae^{-j\varphi} . e^{-j\Omega_0\tau_m} e^{-j\Omega_0 t} + Ae^{j\varphi} e^{j\Omega_0\tau_m} e^{j\Omega_0 t}$$

Vamos achar as componentes em fase e em quadratura:

$\tilde{x}_{i_m}(t) = x_m(t)\cos(\Omega_0 t) \to$ componente em fase

$$= \left(\hat{A}^* e^{-j\Omega_0\tau_m} e^{-j\Omega_0 t} + \hat{A} e^{j\Omega_0\tau_m} e^{j\Omega_0 t}\right)\left(e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}\right) . \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\hat{A}^*}{2} e^{-j\Omega_0\tau_m} e^{-j2\Omega_0 t} + \frac{\hat{A}^*}{2} e^{-j\Omega_0\tau_m} + \frac{\hat{A}}{2} e^{j\Omega_0\tau_m} + \frac{\hat{A}}{2} e^{j\Omega_0\tau_m} e^{j2\Omega_0 t}$$

e após filtragem por um filtro passa-baixas com corte em Ω_0, o sinal resultante é

$$x_{i_m}(t) = \frac{\hat{A}^*}{2} e^{-j\Omega_0\tau_m} + \frac{\hat{A}}{2} e^{j\Omega_0\tau_m} = \mathrm{Re}\left\{\hat{A} e^{j\Omega_0\tau_m}\right\}$$

A componente em quadratura é

$\tilde{x}_{q_m}(t) = -x_m(t) . \operatorname{sen}(\Omega_0 t) \to$ componente em quadratura.

$$= \left(\hat{A}^* e^{-j\Omega_0\tau_m} e^{-j\Omega_0 t} + \hat{A} e^{j\Omega_0\tau_m} e^{j\Omega_0 t}\right)\left(+j e^{j\Omega_0 t} - j e^{-j\Omega_0 t}\right) . \frac{1}{2}$$

$$= +j\frac{\hat{A}^*}{2} e^{-j\Omega_0\tau_m} e^{-j2\Omega_0 t} + j\frac{\hat{A}^*}{2} e^{-j\Omega_0\tau_m} + j\frac{\hat{A}}{2} e^{j\Omega_0\tau_m} - j\frac{\hat{A}}{2} e^{j\Omega_0\tau_m} e^{j2\Omega_0 t}$$

e após filtragem novamente por um passa-baixas com corte em Ω_0:

$$x_{q_m}(t) = \mathrm{Im}\left\{\hat{A} e^{j\Omega_0\tau_m}\right\}$$

Defina então o sinal de banda-base equivalente (sinal analítico)

$$\hat{x}_m(t) = x_{i_m}(t) + j\, x_{q_m}(t) = \hat{A} e^{j\Omega_0\tau_m}$$

Compare com $\hat{A} e^{j\Omega_0(t+\tau_m)} = \underbrace{\hat{A} e^{j\Omega_0\tau_m}}_{\to \hat{x}_m(t)} . e^{j\Omega_0 t}$

A conclusão é que pode-se tratar um sinal de banda estreita

$f(t) = A(t)\cos(\Omega_0 t + \varphi(t))$, em que

Banda de $A(t)$ e $\varphi(t) \ll \Omega_0$

Como se fosse um sinal complexo $A(t)\,e^{j\varphi(t)}e^{j\Omega_0 t}$, mas usando apenas sinais reais, assim: