SEM 536 - Sistemas de Controle I
Aula 3 - B - Especificações de Desempenho

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

- Sistema de segunda ordem padrão:

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = K_R\omega_n^2 u(t)$$

- ω_n: freqüência natural não amortecida (rad/s)
- ζ: fator de amortecimento
- K_R: ganho de regime

Sistema de segunda ordem

- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Equação Característica:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

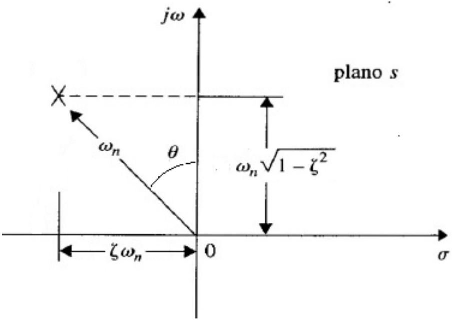
- Polos:

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \left(\sqrt{1-\zeta^2}\right) j$$

- Polos:

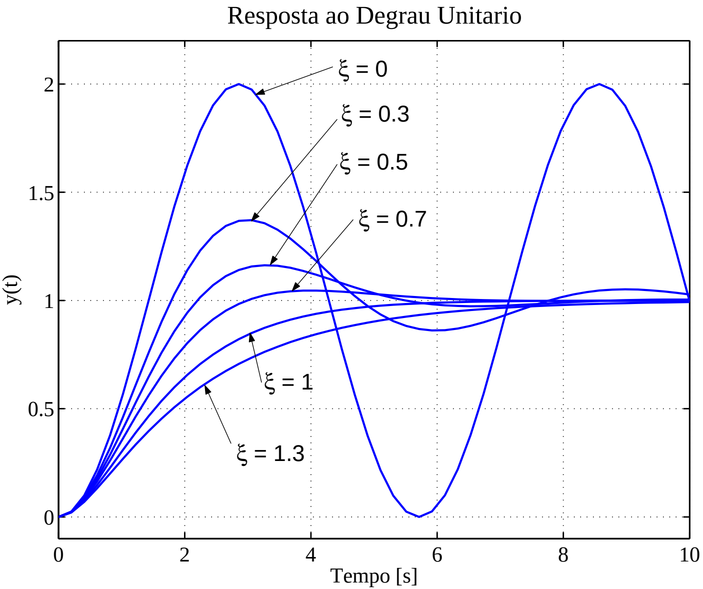
$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \left(\sqrt{1-\zeta^2}\right) j$$

- Plano s:

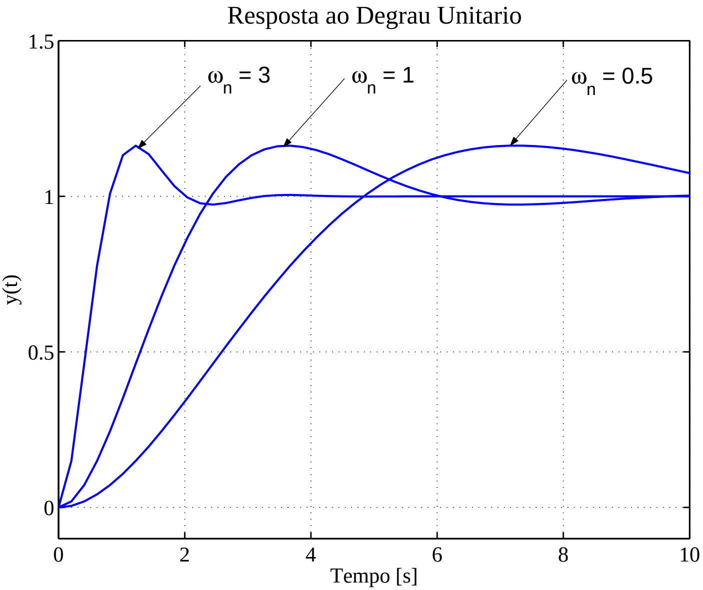


- Fator de amortecimento: $sen(\theta) = \zeta$

Resposta ao degrau unitário: $\omega_n = 1$, $K_R = 1$



Resposta ao degrau unitário: $\zeta = 0.5$, $K_R = 1$



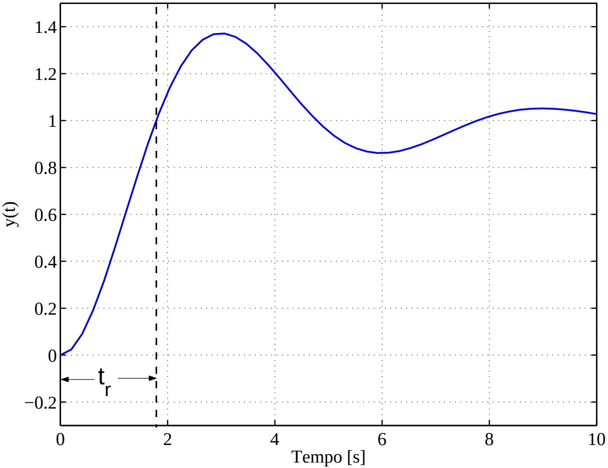
Especificações de desempenho

Entrada degrau unitário para um sistema de segunda ordem:

- Tempo de subida
- Sobre-sinal máximo
- Instante de pico
- Tempo de acomodação

Especificações em termos de ζ e ω_n

Tempo de subida (t_r): tempo necessário para a resposta alcançar pela primeira vez o valor de regime.



Especificações de desempenho

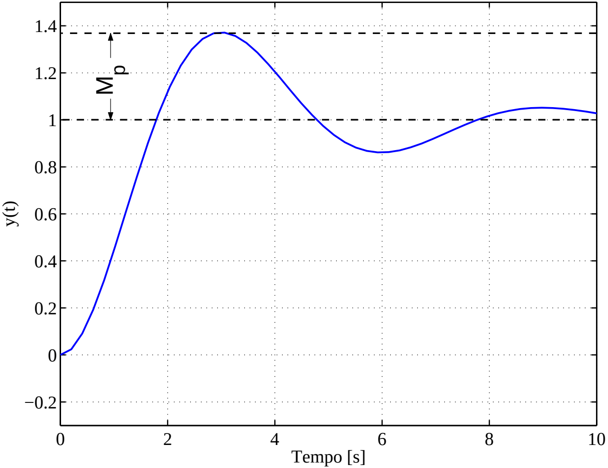
Para sistemas subamortecidos

$$t_r = \frac{1}{\omega_n(\sqrt{1-\zeta^2})} tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{-\zeta\omega_n}\right)$$

Para t_r ser pequeno, w_n deve ser grande e ζ próximo a zero.
Aproximação (de $y = 0,1K_R$ a $y = 0,9K_R$):

$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n}$$

Sobre-sinal máximo (M_p): valor máximo da resposta medido a partir do valor de regime.



Especificações de desempenho

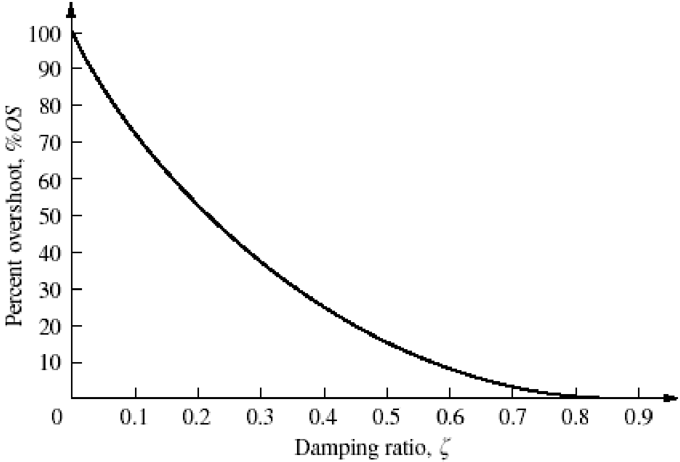
Para sistemas subamortecidos

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

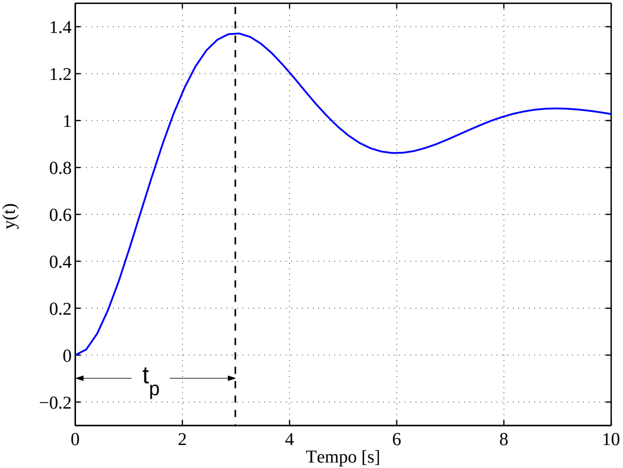
Sobre-sinal máximo percentual: $e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \times 100\%$

Para M_p ser pequeno, ζ deve ser próximo da unidade

Especificações de desempenho



Instante de pico (t_p): tempo necessário para a resposta alcançar o primeiro pico de sobre-sinal.



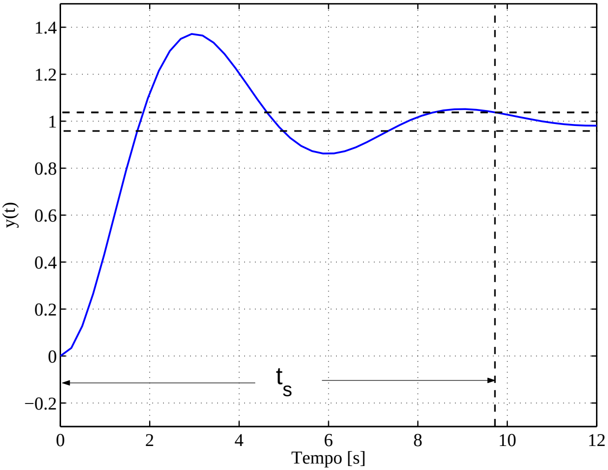
Especificações de desempenho

Para sistemas subamortecidos

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

t_p corresponde a meio ciclo da freqüência de oscilação amortecida

Tempo de acomodação (t_s): tempo necessário para a curva permanecer dentro de uma faixa em torno do valor de regime.



Especificações de desempenho

Para sistemas subamortecidos:

Critério de 1%: $t_s = \frac{4{,}6}{\zeta \omega_n}$

Critério de 2%: $t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$

Critério de 5%: $t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n}$

Especificações de desempenho

Exemplo ($\zeta = 0.5$ e $\omega_n = 1$):

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

- $t_r = \frac{1{,}8}{\omega_n} = 1,8$ s
- $M_p = 16\%$ (gráfico)
- $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 3,62$ s
- $t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 8$ s para 2%
- Matlab: step(G) e stepinfo(G)

Especificações de desempenho

Exemplo: Encontre a região no plano s para as especificações abaixo:

- $t_r \leq 0,6$ s
- $M_p \leq 10\%$
- $t_s \leq 1,6$ s para 2%

Especificações de desempenho

Exemplo: Encontre a região no plano s para as especificações abaixo:

- $t_r \leq 0,6$ s $\Longrightarrow t_r = \frac{1{,}8}{\omega_n} \leq 0,6 \Longrightarrow \omega_n \geq 3$ rad/s
- $M_p \leq 10\%$
- $t_s \leq 1,6$ s para 2%

Exemplo: Encontre a região no plano s para as especificações abaixo:

- $t_r \leq 0,6$ s $\Longrightarrow t_r = \frac{1{,}8}{\omega_n} \leq 0,6 \Longrightarrow \omega_n \geq 3$ rad/s
- $M_p \leq 10\% \Longrightarrow$ gráfico $\Longrightarrow \zeta \geq 0,6$
- $t_s \leq 1,6$ s para 2%

Especificações de desempenho

Exemplo: Encontre a região no plano s para as especificações abaixo:

- $t_r \leq 0,6$ s $\Longrightarrow t_r = \frac{1{,}8}{\omega_n} \leq 0,6 \Longrightarrow \omega_n \geq 3$ rad/s
- $M_p \leq 10\% \Longrightarrow$ gráfico $\Longrightarrow \zeta \geq 0,6$
- $t_s \leq 1,6$ s para 2% $\Longrightarrow t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 1,6 \Longrightarrow \zeta\omega_n \geq 2,5$