# Frequências Naturais e Modos de Vibrar de Placa Retangular

Prof. Francisco E. B. Nigro

**Introdução**

Conforme apresentado na disciplina PME 3400 –Vibrações, sistemas lineares formados essencialmente por elementos discretos que armazenam energia cinética e potencial, definidos e com *n* graus de liberdade, apresentam *n* frequências naturais de vibração, cada uma delas com seu correspondente modo de vibrar. Nesses casos, a abordagem do problema era obter *n* equações diferenciais lineares de 2ª ordem para o sistema livre e buscando soluções do tipo $x_i(t) = X_i \cdot sen(\omega \cdot t + \emptyset); i = 1, 2, \cdots n$ obter um sistema linear de *n* equações nos $X_i$, tendo ω² também como incógnita, num problema clássico de autovalores e autovetores. A cada autovalor $\lambda_j = \omega_j^2$ corresponde um autovetor $X_{i,j}\ com\ i = 1, 2, \cdots n$ , que fornece o modo de vibrar correspondente à frequência natural $\omega_j$. Observe-se que:

$$\begin{Bmatrix} x_{1,j}(t) \\ \vdots \\ x_{n,j}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{1,j} \\ \vdots \\ X_{n,j} \end{Bmatrix} \times sen(\omega_j \cdot t + \emptyset_j),$$

ou seja, para cada frequência natural todos os elementos vibram sincronizados em fase ou contrafase, na proporção determinada pelos correspondentes autovetores. Entretanto, como foi visto em PME 3400, se houvesse amortecimento genérico no sistema o equacionamento não seria tão simples.

Sistemas lineares contínuos, com massas e elasticidades distribuídas, podem ser transformados em discretos, com um número de graus de liberdade (*n*) suficientemente elevado para a finalidade a que se propõe, e resolvidos como tal; mas também podem ser resolvidos com base na equação diferencial a derivadas parciais que rege o fenômeno, com seus infinitos graus de liberdade.

Na abordagem a seguir equacionaremos o problema de uma viga (portanto resistindo à flexão) uniforme de massa ρ por unidade de comprimento, módulo de rigidez da seção *E·J* e comprimento *L*, biapoiada nas extremidades e que pode vibrar à flexão em um plano longitudinal, sem qualquer carregamento adicional e sem amortecimento.

A Figura A apresenta a viga, o sistema de coordenadas {x, y}, que juntamente com o tempo (t) são as variáveis do sistema. O momento fletor em uma seção distando *x* da extremidade esquerda da viga é $M_f$, enquanto a força cortante na seção é *Q*. Para um elemento de viga de comprimento *dx* com massa *dm=ρ·dx* vale o TMB e podemos escrever: $dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Q + dQ - Q$ ou portanto $\rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Além disso, pelo equilíbrio de momentos podemos escrever que $dM_f = Q \cdot dx$ ou $\frac{\partial M_f}{\partial x} = Q$, ou ainda mais $\rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2}$. Lembrando que da equação das vigas $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M_f}{E \cdot J}$ obtemos a equação diferencial a derivadas parciais que rege as vibrações livres de uma viga qualquer: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E \cdot J \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + \rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

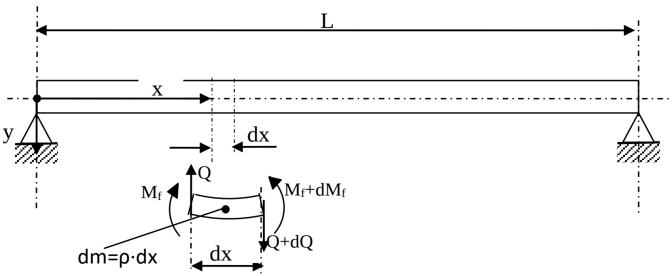


Figura A

No nosso caso, viga de seção uniforme, podemos escrever a equação seguinte:

$$c^2 \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \ \ onde\ c^2 = \frac{E \cdot J}{\rho}$$

A solução para essa equação é encontrar uma função *y(x, t)* que satisfaça as condições de contorno, que no nosso caso, da viga simplesmente apoiada nas extremidades fica:

$$y(0,t) = 0; y(L,t) = 0; \ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) = 0 = M_f(0,t); \ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L,t) = 0 = M_f(L,t)$$

Observe-se aqui que são necessárias 4 condições de contorno para nossa equação diferencial a derivadas parciais de quarta ordem, e que $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, que é proporcional à força cortante, está livre para variar nas extremidades da viga conforme necessário.

# Frequências Naturais e Modos de Vibrar de Placa Retangular

Prof. Francisco E. B. Nigro

Analogamente ao que foi feito com os sistemas vibratórios com um número finito de graus de liberdade vamos buscar uma solução para *y(x, t)* como sendo uma função somente de *x*, multiplicada por uma função harmônica somente de *t*; por analogia: $y(x,t) = f(x) \cdot sen(\omega \cdot t + \emptyset)$

Neste caso, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot f(x) \cdot sen(\omega \cdot t + \emptyset)\ e\ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \cdot sen(\omega \cdot t + \emptyset)$. A função do tempo pode ser posta em evidência multiplicando as funções em x e, não sendo a função do tempo permanentemente nula, temos que a função de *x* deve satisfazer a seguinte equação:

$c^2 \cdot \frac{d^4 f(x)}{dx^4} - \omega^2 \cdot f(x) = 0$ ou ainda: $\frac{d^4 f(x)}{dx^4} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot f(x) = 0$

Funções exponenciais ou em seno, cosseno, seno hiperbólico e cosseno hiperbólico possuem derivadas segundas ou quartas que retornam sobre si mesmas e, portanto, são candidatas a satisfazerem a equação diferencial ordinária em x. Por facilidade algébrica, trabalharemos aqui com as funções seno e cosseno, hiperbólicas ou não. Assim, como temos 4 condições de contorno para satisfazer, buscamos uma solução com quatro constantes a determinar;

$$f(x) = C_1 \cdot sen\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot x\right) + C_2 \cdot cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot x\right) + C_3 \cdot senh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot x\right) + C_4 \cdot cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot x\right)$$

As condições de contorno se transformaram em: $f(0) = 0; f(L) = 0; \frac{d^2 f(0)}{dx^2} = 0; e\ \frac{d^2 f(L)}{dx^2} = 0$

As condições de contorno para $x = 0 \ \rightarrow C_2 + C_4 = 0\ \ e - C_2 + C_4 = 0; Portanto,\ C_2 = C_4 = 0$

As condições de contorno para $x = L$ implicam em:

$C_1 \cdot sen\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L\right) + C_3 \cdot senh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L\right) = 0$ e: $-C_1 \cdot sen\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L\right) + C_3 \cdot senh\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L\right) = 0$

Neste caso, somando-se membro a membro as equações observa-se que $C_3 = 0$

Portanto a única solução possível fica: $C_1 \cdot sen\left(\sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L\right) = 0\ \therefore\ \sqrt{\frac{\omega}{c}} \cdot L = k \cdot \pi,\ k = 1, 2, \cdots$

Note-se que para cada valor de k natural obtém-se um modo de vibrar com a correspondente frequência natural $\omega_k = c \cdot \left(\frac{k \cdot \pi}{L}\right)^2$ com seu correspondente modo de vibrar

$$y_k(x,t) = A_k \cdot sen(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}) \cdot sen(\omega_k \cdot t + \emptyset_k)$$

A Figura B apresenta os primeiros modos de vibrar da viga biapoiada.

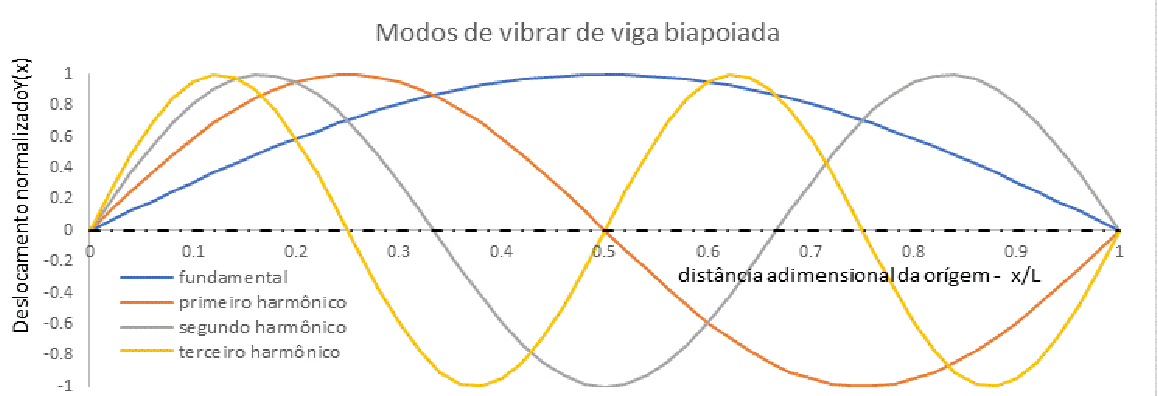


Figura B