LCF280 – Métodos Quantitativos para a Gestão Ambiental
(Estudo Dirigido Especial - Regressão)

Regressão Linear Simples – uma revisão

A regressão linear é útil quando a variável de interesse (dependente) se relaciona e é afetada por uma ou mais variáveis (independentes). Comecemos pelo modelo que da forma mais simples possível pode representar essa relação para várias observações *i* (a equação de uma reta):

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i \qquad (1)$$

onde

β_0 = intercepto (isto é, valor de Y quando X é zero); e

β_1 = coeficiente angular ou de inclinação da reta (mede a variação em Y dada uma variação unitária em X).

A expressão *(1)* expressa uma ***relação determinista*** entre *Y* e *X*. Isto é, não há erro na leitura de *Y*, basta saber o valor de *X*. Esse modelo não é muito realista, pois em geral o nível de *X* tende a explicar apenas “parcialmente” o valor assumido da variável *Y*.

A utilização de um gráfico de pontos nos ajuda a inferir melhor sobre a tendência linear ou não da relação entre os dados observados para *Y* e *X*. Ao observar o gráfico, pode ser mais adequado concluir que a expressão da relação não segue deterministicamente a figura de uma reta.

A versão não determinista do mesmo modelo poderia ser representada da seguinte forma:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad (2)$$

onde ε_i expressa o erro aleatório da $i^{ésima}$ observação.

Assimilação

Vamos supor que um conjunto de indivíduos tenha sido reagrupado em classes de idade de acordo com a seguinte tabela:

Classe de Idade	Grupo
20 a 22	1
22 a 24	2
24 a 26	3
26 a 28	4
28 a 30	5
30 a 32	6
32 a 34	7
34 a 36	8
36 a 38	9
38 a 40	10

Alguém levanta a questão: estaria a idade relacionada com o consumo médio de combustível automotivo por quilômetro percorrido? Para testar essa hipótese, foram entrevistadas 33 pessoas. Os resultados foram tabulados e são apresentados na seguinte tabela:

Grupo	Gênero	Consumo	Grupo	Gênero	Consumo	Grupo	Gênero	Consumo
1	0	1,36	3	0	1,7	7	0	2,35
1	0	0	3	1	1,66	7	0	2,29
1	1	1,36	5	0	1,42	7	0	1,88
1	1	0,89	5	0	1,76	8	0	1,93
2	1	1,21	5	0	2,01	9	0	1,44
2	1	1,54	5	1	1,49	9	1	2,64
2	0	1,37	6	1	2,25	9	0	1,9
2	0	1,59	6	1	1,29	9	1	1,46
2	0	1,11	6	0	2,16	9	1	2,08
2	0	0,78	7	1	2,37	10	0	1,57
3	1	1,22	7	0	2,2	10	1	2,76

Gênero masculino é representado pelo algarismo 1, e o feminino pelo algarismo 0.

LCF280 – Métodos Quantitativos para a Gestão Ambiental
(Estudo Dirigido Especial - Regressão)

Pressuposição básica: o valor médio de ε para um dado valor de X é zero! Assim sendo:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X$$

β_0 e β_1 são parâmetros desconhecidos e não se conhece o formato preciso da reta $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X$. A questão, então, é como construir boas estimativas b_0 e b_1 para esses parâmetros que resultem em uma boa estimativa y de $E(Y)$?

O método dos mínimos quadrados é o procedimento mais frequentemente utilizado. Definindo *erro de predição* ou *resíduo* como $(Y - y)$, esse método resulta na equação de reta

$$y = b_0 + b_1 X$$

que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos $\Sigma\,(Y_i - y_i)^2$ para todas as observações i.

$$Q = \Sigma\,(Y_i - y_i)^2 = \Sigma\,(Y_i - b_0 + b_1 X_i)^2$$

Como encontrar b_0 e b_1 que minimizam $\Sigma\,(Y_i - b_0 + b_1 X_i)^2$?
Basta fazer:

$$\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{\delta Q}{\delta b_0} = 0 \\ \dfrac{\delta Q}{\delta b_1} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - b_0 - b_1 X_i) = 0 \\ -2\sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - b_0 - b_1 X_i) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} Y_i - n b_0 - b_1 \sum_{i=1}^{n} X_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - b_0 \sum_{i=1}^{n} X_i - b_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \end{array} \right.$$

e obter as *"equações normais"*:

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} Y_i = n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = b_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{array} \qquad (3)$$

Exercício 1:
Ignore, inicialmente, o gênero e apresente os dados tabulados em um gráfico. Disponha o consumo no eixo vertical e comente a relação aparente entre as variáveis.

Que, quando resolvida (2 incógnitas e 2 equações), produz:

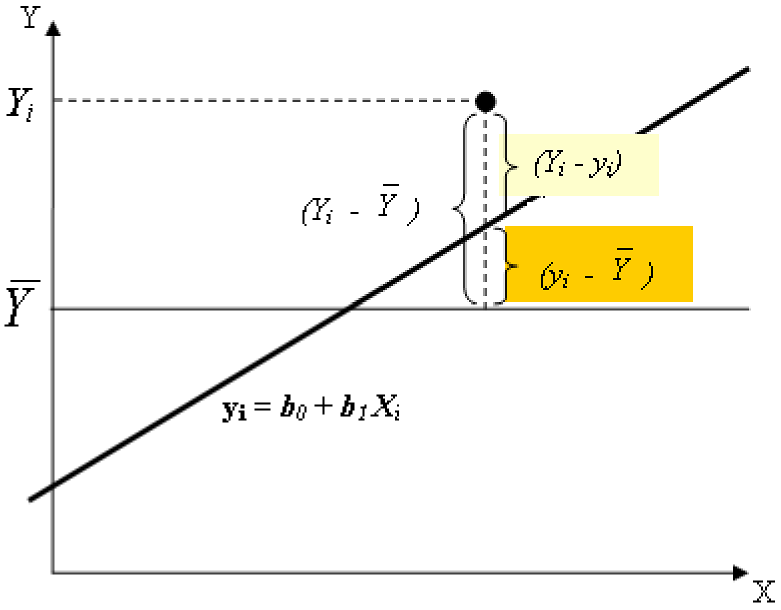
$$b_1 = S_{XY} / S_{XX} \quad e \quad b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}$$

onde $S_{XY} = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ e $S_{XX} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}$

É interessante estudar a relação entre

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2$$

e analisar graficamente uma forma de expressar a variação total das observações em torno da média amostral ($\bar{Y}$):



Exercício 2:
***Considere** <u>consumo</u> **uma função linear simples da classe de idade representada pelo** <u>grupo</u> **e calcule**:*

S_{XY} =

S_{XX} =

b_1 =

b_0 =

Exercício 3:
Apresente num mesmo gráfico os dados tabulados e a reta ajustada no exercício 2.

(y_i - $\bar{Y}$) representa a porção da variação em Y devida à variável independente X.

(Y_i - y_i) representa a porção da variação em Y não devida à variável independente X.

A partir dessa análise podemos expressar a variabilidade total das observações em torno da média $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$, também chamada Soma dos Quadrados Médios, como a soma do quadrado dos desvios devidos à regressão $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{Y})^2$ e a soma do quadrado dos resíduos $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2$. Ou seja:

Soma de Quadrados em torno da média ou **Total**	=	**Soma de Quadrados devido à Regressão**	+	**Soma de Quadrados devido ao Erro**
$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$	=	$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{Y})^2$	+	$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2$
SQT	=	SQReg	+	SQE

Quanto maior a variabilidade explicada pelo modelo de regressão com relação à variabilidade não explicada, mais o modelo "ajusta" os dados!

Exercício 4:
Calcule para os dados ajustados no exercício 2,

A Soma de Quadrados Total (SQT)

A Soma de Quadrados da Regressão (SQReg)

A Soma de Quadrados do Erro (SQE)

Fórmulas úteis:

$SQT \quad = S_{YY}$

$SQE \quad = S_{YY} - b_1 S_{XY}$

$SQReg \quad = b_1 S_{XY} \; = \; b_1^2 S_{XX}$

Coeficiente de correlação

Um coeficiente de correlação mede o "vigor" da relação entre duas variáveis. O coeficiente de correlação amostral *r* (ou coeficiente de correlação de *Pearson*) é um exemplo.

$$r = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} S_{YY}}} = b_1 \sqrt{\frac{S_{XX}}{S_{YY}}} = b_1 \sqrt{\frac{S_{XX}/(n-1)}{S_{YY}/(n-1)}} = b_1 \frac{s_X}{s_Y}$$

r varia entre -1 e +1:

> 0 → correlação linear positiva

< 0 → correlação linear negativa

~ 0 → correlação nula

Coeficiente de determinação

É representado por r^2 e mostra a proporção da variação total em Y "*explicada*" pela variável independente X.

$$r^2 = b_1^2 \frac{S_{XX}}{S_{YY}} = \text{SQReg / SQT}$$

Exercício 5:
Calcule o coeficiente de determinação do ajuste feito no exercício 2,