QUESTIONÁRIO 4 - DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS E VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

Jorge Bazán e Patrícia Stülp

Exercício 1: Uma enchedora automática de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 975cm^3 e desvio padrão de 10cm^3. Admitindo-se que o volume seja normalmente distribuído, qual é a porcentagem de garrafas cujo volume líquido é menor que 957cm^3? (Obs.: considere duas casas decimais para a resposta)

Resposta correta: $3,59\%$

(NORMAL)

$\mu = 975\ cm^3$

$\sigma = 10\ cm^3$

$x = 957\ cm^3$

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$P(X \leq x) = P\left(Y \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$= P\left(Y < \frac{957-975}{10}\right)$

$= P(Y < -1,8) = 0,0359$

$= 3,59\%$

Continuação resolução Exercício 1:

No R:

$$\text{pnorm}(x, \underbrace{\text{mean}}_{\text{média}}, \underbrace{\text{sd}}_{\text{desvio padrão}})$$

$$= \text{pnorm}(957, 975, 10) \approx 0{,}0359 = 3{,}59\%$$

Exercício 2: O tempo médio para completar a prova de estatística é de 54 minutos e o desvio padrão é de 8 minutos. Se o professor quiser que apenas 93% dos alunos termine a prova, quanto tempo deve dá-los para realizá-la?

a) 66 minutos

b) 55 minutos

c) 61 minutos

d) 42 minutos

(NORMAL)

$\mu = 54$

$\sigma = 8$

$p = 93\% = 0,93$

Resposta correta: a

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = P\left(Y \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = p$$

$$\Rightarrow P\left(Y \leq \frac{x-54}{8}\right) = 0,93$$

$$\Rightarrow \frac{x-54}{8} = 1,48$$

$$\Rightarrow x = 8(1,48) + 54$$

$$x = 65,84$$

$$x \simeq 66 \text{ min}$$

Continuação resolução Exercício 2:

No R:

qnorm(p, mean, sd)

= qnorm(0,93, 54, 8)

= 65,81 ≃ 66 min

Exercício 3: Seja a função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+3xy^2}{4}, & 0 < x < 1,7 \quad \text{e} \quad 0,3 < y < 1,4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine $\mathbb{P}(X < 0,8; Y > 0,7)$. (Obs.: considere quatro casas decimais para cada resposta)

Resposta correta: $0,2481$

$$\mathbb{P}(0 < X < 0,8 \,;\, 0,7 < Y < 1,4)$$

$$= \int_0^{0,8} \int_{0,7}^{1,4} \frac{x + 3xy^2}{4} \, dy \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{0,8} xy + xy^3 \Big]_{0,7}^{1,4} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{0,8} x(1,4) + x(1,4)^3 - x(0,7) - x(0,7)^3 \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{0,8} 3,101\, x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3,101}{2} x^2 \right) \Big]_0^{0,8}$$

Continuação resolução Exercício 3:

$$= \frac{1}{8}\left(3,101\ (0,8)^2\right)$$

$$= 0,24808$$

$$= \underline{0,2481}$$

Exercício 4: Seja a função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(2x+y), & 1 \leq x \leq 7 \quad \text{e} \quad 4 < y < 8 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Encontre o valor de k para calcular $\mathbb{P}(Y \leq 6)$. (Obs.: considere quatro casas decimais para cada resposta)

Resposta correta: $0,4643$

1º PASSO: calcular K

$$\int_4^8 \int_1^7 k(2x+y)\, dx\, dy = 1$$

$$\Rightarrow k \int_4^8 x^2 + yx \Big]_1^7 dy = 1$$

$$\Rightarrow k \int_4^8 7^2 + 7y - 1 - y \quad dy = 1$$

$$\Rightarrow k \int_4^8 48 + 6y \quad dy = 1$$

$$\Rightarrow k \left(48y + 3y^2 \right) \Big]_4^8 = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{336}$$

Continuação resolução Exercício 4:

2º PASSO: calcular marginal de Y:

$$f(y) = \int_1^7 K(2x+y)\,dx$$

$$= \frac{1}{336}\left(x^2 + xy\right)\Big]_1^7$$

$$= \frac{1}{336}\left(7^2 + 7y - 1 - y\right)$$

$$= \frac{1}{336}\left(48 + 6y\right)$$

3º PASSO: calcular $P(Y \leq 6)$

$$P(Y \leq 6) = \int_4^6 \frac{1}{336}\left(48 + 6y\right)dy$$

$$= \frac{1}{336}\left(48y + 3y^2\right)\Big]_4^6$$

$$= \frac{1}{336}\left(48(6) + 3(6)^2 - 48(4) - 3(4)^2\right)$$

$$= 0{,}4642857$$

$$= \underline{0{,}4643}$$