VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

2.9

Variáveis aleatórias bidmensionais (ou multidimensionais)

DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE CONJUNTA

Se (X,Y) é um vetor aleatório com possíveis valores no $R_X \times R_Y$, uma função f(x,y) é uma *função de probabilidade conjunta se:*

$$(i) 0 \leq f(x,y) \leq 1 \text{ para todo } (x,y) \in R_X \times R_Y,$$
$$(ii) \sum_x \sum_y f(x,y) = 1,$$
$$(iii) P(X = x, Y = y) = f(x,y)$$

X: número de moradores
Y: número de televisores

Função de probabilidade conjunta

f(x,y)		x	
y	1	2	3
0	0,02	0	0
1	0,20	0,08	0,05
2	0,10	0,20	0,15
3	0	0,10	0,10

$R_X = \{1, 2, 3\}$

$R_Y = \{0, 1, 2, 3\}$

(i) $0 \leq f(x,y) \leq 1$

(ii) $0,02 + 0 + 0 + 0,20 + \ldots + 0,10 = 1$

(iii) $f(x,y) = P(X = x, Y = y)$

$P(X = 1, Y = 0) = 2\%$

$P(X = 2, Y = 0) = 0$

FUNÇÃO DENSIDADE CONJUNTA

A função f(x,y) é uma *função densidade conjunta* das variáveis aleatórias contínuas X e Y se

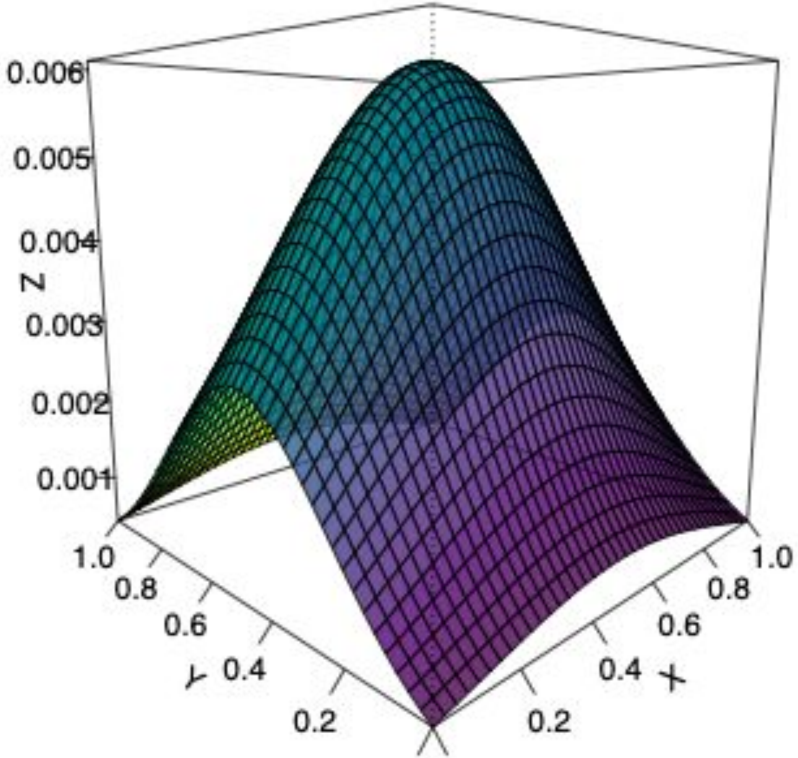
$$(i) 0 \leq f(x,y) \leq 1 \text{ para todo } (x,y) \in R_X \times R_Y,$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) = 1,$$

$$(iii) P[(X,Y) \in A] = \int \int_A f(x,y) dx dy, \quad A \in R_X \times R_Y.$$

Função de probabilidade conjunta
normal bivariada.

$$(X, Y) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$$



Exemplo

Considere as intensidades elétricas de duas componentes de um sistema eletrônico, X e Y, que são v.a. A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{y}{2} + xy, & \boxed{\boxed{0 \leq x \leq 1}, \boxed{0 \leq y \leq 1}} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Obtenha a probabilidade de ambas as variáveis estarem dentro das especificações, ou seja, entre 0,5 e 0,8 μA.

$$x + \frac{y}{2} + xy = 1$$

$R_X = [0,1]$ $\quad \checkmark$ (i)

$R_Y = [0,1]$ $\quad \checkmark$ (ii) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$

P(estarem dentro das esp.) =

$= P\big((X,Y) \in [0{,}5;\ 0{,}8] \times [0{,}5;\ 0{,}8]\big)$

$= \int_{0{,}5}^{0{,}8} \int_{0{,}5}^{0{,}8} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{0{,}5}^{0{,}8} \int_{0{,}5}^{0{,}8} x + \frac{y}{2} + xy \; dx\, dy$

$= \ldots = 0{,}21\underline{1}\ 20\overline{25} \simeq 21\%$

DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS

Se X e Y são discretas as *funções de probabilidade marginais* de X e de Y são respectivamente

$$g(x) = \sum_y f(x, y) \text{ e } h(y) = \sum_x f(x, y)$$

se X e Y são contínuas, as *funções densidades marginais* são

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \text{ e } h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

X: número de moradores
Y: número de televisores

Funções de probabilidades marginais de X e Y, g(x) e h(y) respectivamente.

Função de probabilidade conjunta e marginais

f(x,y)		x		
y	1	2	3	h(y)
0	0,02	0	0	0,02
1	0,20	0,08	0,05	0,33
2	0,10	0,20	0,15	0,45
3	0	0,10	0,10	0,20
g(x)	0,32	0,38	0,30	1

Exemplo

Considere as intensidades elétricas de duas componentes de um sistema eletrônico, X e Y, que são v.a. A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{y}{2} + xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Obtenha as funções densidade de probabilidade marginais de X e de Y.
Qual a probabilidade de X estar dentro das especificações?

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_0^1 x + \frac{y}{2} + xy \, dy$$

$$= \frac{3x}{2} + \frac{1}{4}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 x + \frac{y}{2} + xy\,dx$$

$$= \cdots = \frac{1}{2} + y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$P(X \in [0{,}5\,;\,0{,}8]) = \int_{0{,}5}^{0{,}8} g(x)\,dx$$

$$= \int_{0{,}5}^{0{,}8} \frac{3x}{2} + \frac{1}{4}\,dx = \cdots = 0{,}36\overline{75}$$

$$36{,}8\,\%.$$

DISTRIBUIÇÃO CONDICIONAL

A *função de probabilidade condicional* ou *a função densidade condicional da variável aleatória Y dado X=x é*

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, g(x) > 0$$

Analogamente, a *função de probabilidade condicional* ou *a função densidade condicional da variável aleatória X dado Y=y* é

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, h(y) > 0$$

Exemplo

X: número de moradores
Y: número de televisores

Qual a função probabilidade condicional de X dado Y?

Função de probabilidade conjunta e marginais

f(x,y)		x		
y	1	2	3	h(y)
0	0,02	0	0	0,02
1	0,20	0,08	0,05	0,33
2	0,10	0,20	0,15	0,45
3	0	0,10	0,10	0,20
g(x)	0,32	0,38	0,30	1

Função de probabilidade condicional de X dado Y

f(x|y)		x	
y	1	2	3
0	$\frac{0,02}{0,02} = 1$	0	0
1	0,61	0,24	0,15
2	0,22	0,45	0,33
3	0	0,5	0,5

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) > 0$$

Exemplo

Considere as intensidades elétricas de duas componentes de um sistema eletrônico, X e Y, que são v.a. A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{y}{2} + xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Qual a função densidade de probabilidade condicional de X dado Y?

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{x + \frac{y}{2} + xy}{\frac{1}{2} + y}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

INDEPENDÊNCIA

Duas v.a. X e Y são *independentes* se, e somente, se

$$f(x|y) = g(x), \text{ para todo } (x, y) \in R_X \times R_y$$

ou

$$f(y|x) = h(y), \text{ para todo } (x, y) \in R_X \times R_y$$

RESULTADO

Se X e Y são independentes então

$$f(x,y) = g(x)h(y), \text{ para todo } (x,y) \in R_X \times R_y.$$

Nota: É possível usar este resultado como definição e então a definição apresentada anteriormente passa a ser a consequência.

Exemplo

X: número de moradores
Y: número de televisores

Função de probabilidade conjunta

f(x,y)		x		
y	1	2	3	h(y)
0	0,02	0	0	0,02
1	0,20	0,08	0,05	0,33
2	0,10	0,20	0,15	0,45
3	0	0,10	0,10	0,20
g(x)	0,32	0,38	0,30	1

X e Y são independentes?

$$\boxed{g(1) \cdot h(0)} = 0{,}32 \cdot 0{,}02 = 0{,}0064$$

$$\neq \boxed{f(1,0) = 0{,}02}$$

X e Y não são independentes

$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

Exemplo

Considere as intensidades elétricas de duas componentes de um sistema eletrônico, X e Y, que são v.a. A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{y}{2} + xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

X e Y são independentes?

$$g(x) \cdot h(y) = \left(\frac{3x}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} + y\right) =$$

$$= \frac{3x}{4} + \frac{3xy}{2} + \frac{1}{8} + \frac{y}{4} \neq$$

VALOR ESPERADO DE g(X,Y)

Sejam X e Y v.a. com distribuição de probabilidade conjunta f(x,y). A *média* ou *valor esperado* de g(X, Y) é, se X e Y forem discretas

$$E[g(X,Y)] = \sum_{x} \sum_{y} g(x,y) f(x,y)$$

e se X e Y forem contínuas é

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy$$

Exemplo

X: número de moradores
Y: número de televisores

Função de probabilidade conjunta

f(x,y)		x		
y	1	2	3	h(y)
0	0,02	0	0	0,02
1	0,20	0,08	0,05	0,33
2	0,10	0,20	0,15	0,45
3	0	0,10	0,10	0,20
g(x)	0,32	0,38	0,30	1

Qual o valor esperado de Y/X?

$$E\left(\frac{Y}{X}\right) = \sum_x \sum_y \frac{y}{x} f(x,y)$$

$$= \frac{0}{1} \cdot 0{,}02 + 0 + 0 + \frac{1}{1} \cdot 0{,}20 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}08 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}05 + \dots + \frac{3}{3} \, 0{,}10$$

$$\approx 1{,}01$$

Exemplo

Considere as intensidades elétricas de duas componentes de um sistema eletrônico, X e Y, que são v.a. A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{y}{2} + xy, & \underline{0 \leq x \leq 1}, \underline{0 \leq y \leq 1} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Qual o valor esperado de X+Y?

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y) f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x + \frac{y}{2} + xy \, dx\, dy = \dots = 1{,}16$$