DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

2.8

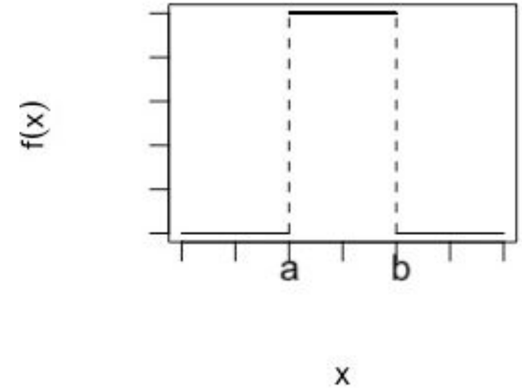
DISTRIBUIÇÃO UNIFORME CONTÍNUA

Uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme com parâmetros a e b, a < b, se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

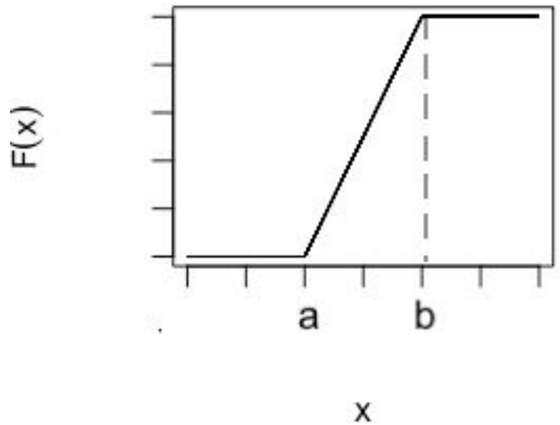
Notação: X ~ U(a,b)

Função densidade de probabilidade



Função distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b \end{cases}$$



Valor esperado e variância

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Exemplo: A densidade de uma peça de certa material pode ser considerada uma v.a. uniforme no intervalo (10,20). Qual a probabilidade de que uma peça dessas tenha densidade entre 12 e 16?

X: densidade da peça $\quad X \sim U(12, 16)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20-10}, & 10 \leq x \leq 20 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$P(12 < X < 16) = \int_{12}^{16} f(x)\,dx = \int_{12}^{16} \frac{1}{10}\,dx$$

$$= \frac{x}{10}\Big|_{12}^{16} = \frac{16-12}{10} = 0,40$$

Exemplo: A densidade de uma peça de certa material pode ser considerada uma v.a. uniforme no intervalo (10,20). Qual a probabilidade de que uma peça dessas tenha densidade entre 12 e 16?

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 10 \\ \dfrac{x-10}{20-10}, & 10 \leq x \leq 20 \\ 1, & x > 20 \end{cases}$$

$$P(12 < X \leq 16) = P(X \leq 16) - P(X \leq 12)$$

$$= F(16) - F(12) = \frac{16-10}{10} - \frac{12-10}{10}$$

$$= \frac{6}{10} - \frac{2}{10} = 0{,}40$$

Nota: A distribuição uniforme é comumente utilizada na Inferência Bayesiana para demonstrar vago conhecimento *a priori*.

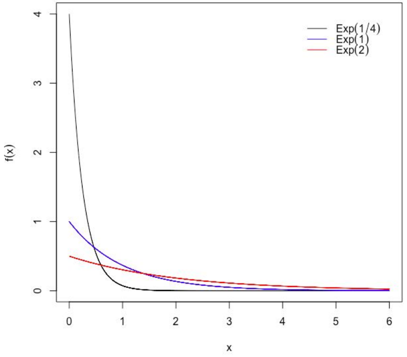
DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

Uma v.a. X tem distribuição exponencial com parâmetro λ >0 se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

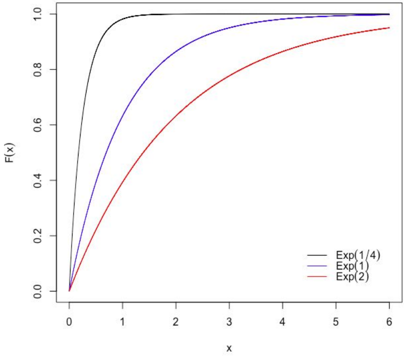
Notação: X ~ Exp(λ)

Função densidade de probabilidade



Função distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Valor esperado e variância

$$E(X) = \lambda \quad \text{e} \quad V(X) = \lambda^2$$

Propriedade: "falta de memória"

Se X ~ Exp(λ) então

$$P(X > a + b | X > a) = P(X > b)$$

Função de risco

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \Rightarrow h(x) = \frac{1}{\lambda} \text{ (constante)}$$

Nota: Podemos escrever também

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \Rightarrow E(X) = \frac{1}{\alpha}$$

Exemplo: O tempo de vida de um componente elétrico segue uma distribuição exponencial com vida média de 5 anos. Cada componente tem um custo de $10 e, se durar menos de 2 anos, há um custo adicional de $4.

a) Qual é a probabilidade de um componente desse durar menos de 1,5 ano?

b) Qual é o custo esperado?

$\boxed{a)}$ X : tempo de vida $\quad X \sim Exp(5)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5}, & x \geq 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/5}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$P(X < 1,5) =$

$F(1,5) =$

$1 - e^{-1,5/5} =$

$\boxed{0,2592}$

C: custo esperado $\quad C = C(X)$

$$C(x) = \begin{cases} 14, & x < 2 \\ 10, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$E(C(X)) = 14 \cdot P(C(X) = 14) + 10 \cdot P(C(X) = 10)$$

$$= 14 \cdot P(X < 2) + 10 \cdot P(X \geq 2)$$

$$= 14 \cdot F(2) + 10(1 - F(2))$$

$$= 10 + 4F(2) = 10 + 4(1 - e^{-2/5})$$

$$\cong \boxed{\$ 11{,}22}$$

Relação da distribuição exponencial com a Poisson

N: v.a. que representa o número de eventos em certo intervalo de tempo N ~ Poisson(λ) (λ: número médio de eventos por unidade de tempo).
X: v.a. que representa o tempo até o primeiro evento acontecer.
X ~ ?

Nenhum evento acontecer até t

$$P(N=0)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!}=e^{-\lambda t}$$

Distribuição de X

$$P(X>x)=P(\text{nenhum evento ocorra até } x)=e^{-\lambda x}$$

$$\therefore F(x)=1-e^{-\lambda x} \qquad \Rightarrow X\sim Exp(1/\lambda)$$

Exemplo: Considere que o número de chamadas telefônicas em uma central de atendimentos segue uma distribuição Poisson com média de 1,5 chamada por hora. Qual a probabilidade de passar mais de 2 horas sem receber uma chamada?

N: número de chamadas

X: tempo até a primeira chamada

$$N \sim Poisson(\lambda)$$

$$X \sim Exp(1/\lambda)$$

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - F(2) \\ &= 1 - (1 - e^{-1,5.2}) \\ &= e^{-3} \approx 0,05 \end{aligned}$$

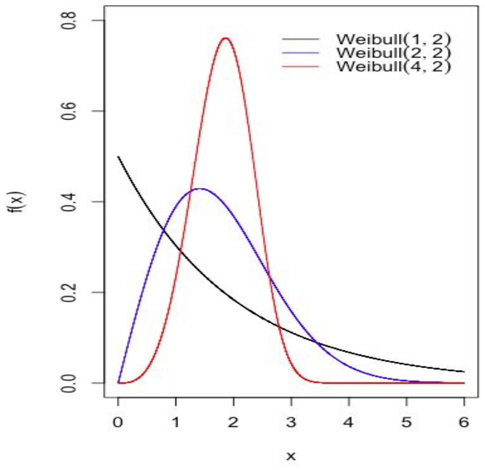
DISTRIBUIÇÃO WEIBULL

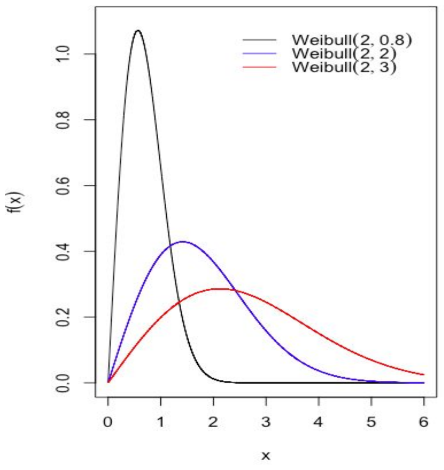
Uma v.a. contínua X tem distribuição Weibull com parâmetros de escala $\alpha > 0$ e de forma $\beta > 0$, se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Notação: $X \sim \text{Weibull}(\alpha\ ,\ \beta)$

Função densidade de probabilidade



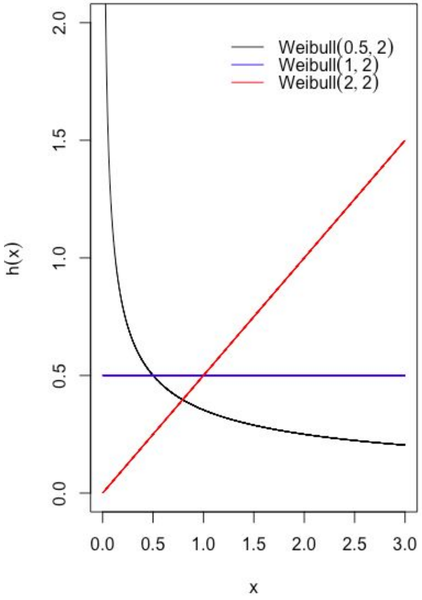


Função distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Função de risco

$$h(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}, x \geq 0$$



Caso particular

$$\beta = 1 \Rightarrow X \sim Exp(\alpha)$$