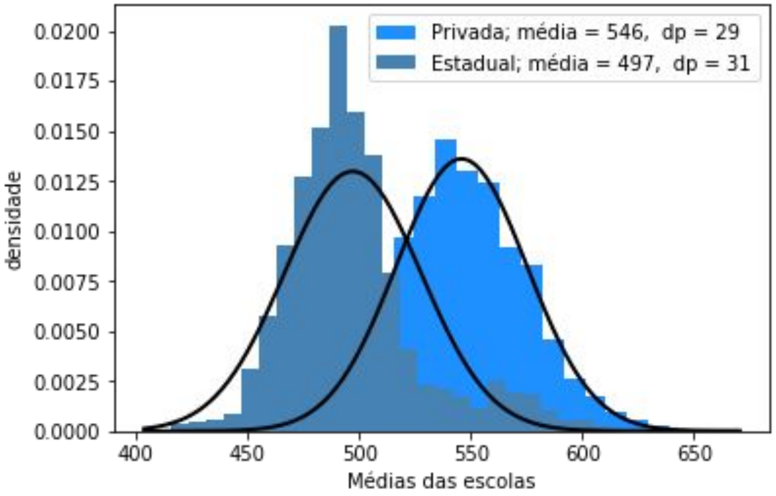
DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

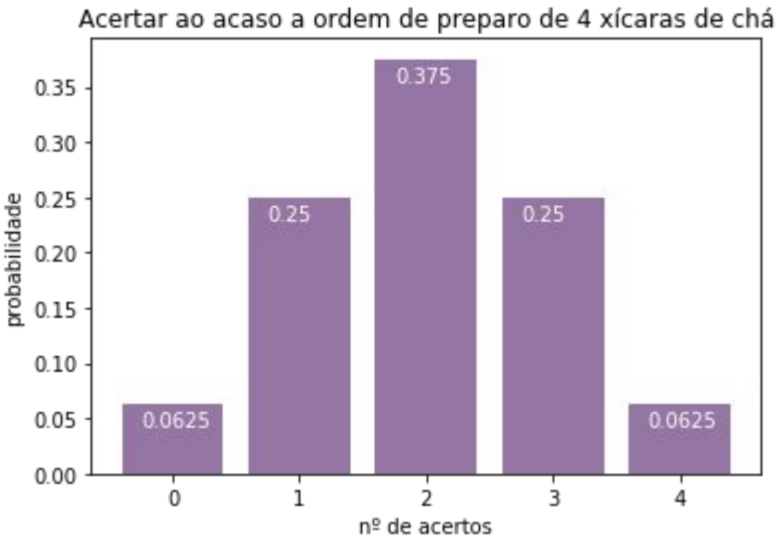
2.7

Na prática

Supõe-se que a variável de interesse, X, segue determinada distribuição de probabilidades na população, ou seja, define-se o modelo probabilístico.



Normal (μ; σ^2)?



Binomial (4; ½)?

Na prática

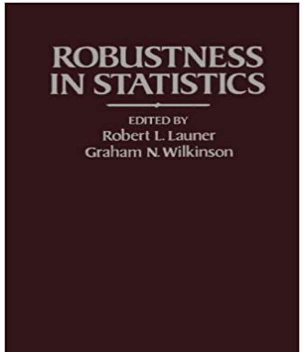
ROBUSTNESS IN THE STRATEGY OF SCIENTIFIC MODEL BUILDING†

G. E. P. Box

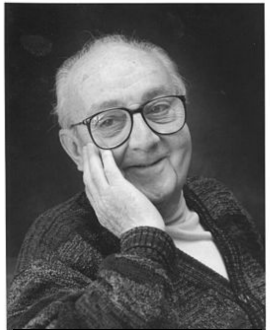
Robustness may be defined as the property of a procedure which renders the answers it gives insensitive to departures,

ALL MODELS ARE WRONG BUT SOME ARE USEFUL

Now it would be very remarkable if any system existing in the real world could be exactly represented by any simple model. However, cunningly chosen parsimonious models often do



Academic Press, 1979

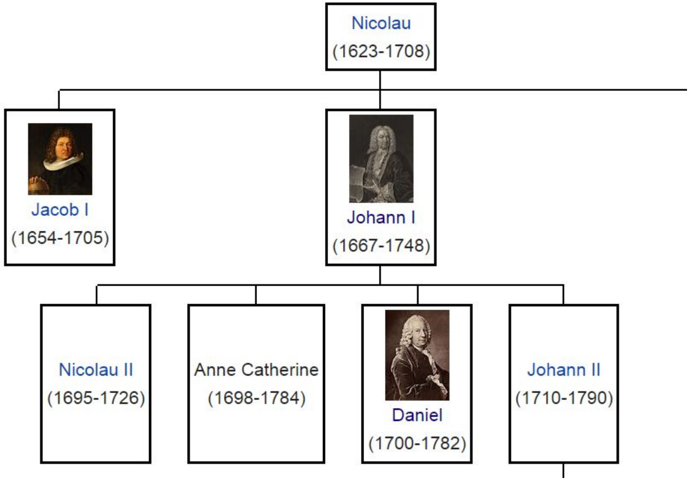


George Box (1919-2013)

Modelos discretos

Modelo	$f(x)$	Suporte	parâmetros	$E(X)$	V(X)
Bernoulli	$p^x(1-p)^{1-x}$	$x = 0, 1$	p	p	$p(1-p)$
Binomial	$C_x^n p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, 1, \cdots, n$	n, p	np	$np(1-p)$
Geométrica	$p(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \cdots$	p	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Binomial Negativa	$C_{k-1}^{x-1} p^k (1-p)^{x-k}$	$x = k, k+1, \cdots$	k, p	k/p	$k(1-p)/p^2$
Hipergeométrica	$\frac{C_x^k C_{n-x}^{N-k}}{C_n^N}$	$max\{0, n-(N-k)\} \leq x$	N, n, k	nk/N	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{k}{N} (1 - \frac{k}{N})$
		$x \leq min\{n, k\}$			
Poisson	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	$x = 0, 1, \cdots$	λ	λ	λ

Modelos discretos: Bernoulli



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Fam%C3%ADlia_Bernoulli

Um experimento que resulta em sucesso ou fracasso

Exs:

- transmissão de dados com ou sem erro
- peça com ou sem defeito de uma linha de produção
- resultado + ou - de um exame para COVID-19
- tirar 6 ou outro valor no lançamento de um dado
- acertar ou errar um lance livre no basquete

X ~ Bernoulli (p): $f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, x = 0, 1$

$$P(X=1) = p$$

$$P(X=0) = 1-p$$

Modelos discretos: Binomial

$X_1 = x_1 = 0$ ou 1 — $X_1 \sim$ Bernoulli (p)

$X_2 = x_2 = 0$ ou 1 — $X_2 \sim$ Bernoulli (p)

$X_3 = x_3 = 0$ ou 1 — $X_3 \sim$ Bernoulli (p)

$X_4 = x_4 = 0$ ou 1

...

$X_n = x_n = 0$ ou 1 — $X_n \sim$ Bernoulli (p)

independentes

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Binomial(n,p)}$$

$$f(y) = C_y^n p^y (1-p)^{n-y},$$
$$y = 0, 1, \cdots, n$$

Y: nº de sucessos em n repetições independentes do experimento Bernoulli (p)

Problema: contratar um jogador para uma posição num time de basquete; bom potencial de arremesso

Tradução: alta probabilidade de acertar um arremesso *(prob p de sucesso)*

$X_{Lo} \sim$ Bernoulli (p_{Lo})

$Y_{Lo} \sim$ Binomial $(n=5, p_{Lo})$

$Y_{MJ} \sim$ Binomial $(n=5, p_{MJ})$

n=10, 20?

$Y_{KB} \sim$ Binomial $(n=5, p_{KB})$

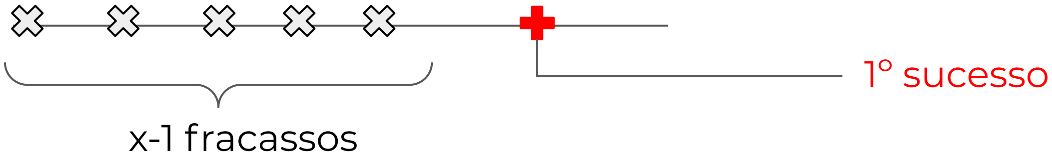
n=100?

Modelos discretos: Geométrica

X: nº de repetições de Bernoulli’s (p, indep.) até a ocorrência do 1º sucesso

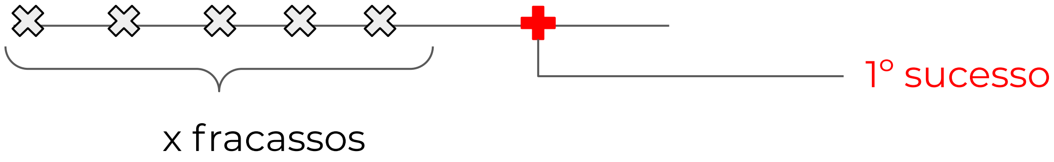
X ~ Geométrica(p)

$$f(x) = p(1-p)^{x-1}, x = 1, 2, \cdots$$



Outra definição: nº de repetições que antecedem o 1º sucesso

$$f(x) = p(1-p)^{x}, x = 0, 1, \cdots$$

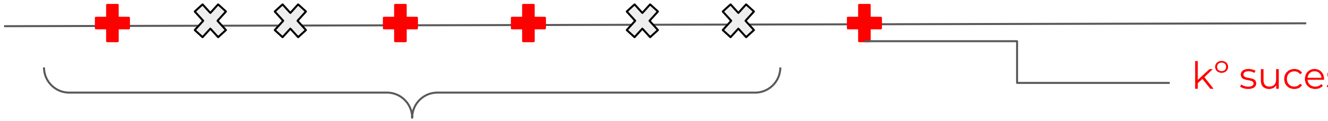


Modelos discretos: Binomial Negativa

X: nº de repetições de Bernoulli's (p, indep.) até a ocorrência do kº sucesso, k≥1

X ~ Binomial Negativa(k,p)

$$f(x) = C_{k-1}^{x-1} p^k (1-p)^{x-k}, x = k, k+1, \cdots$$



kº sucesso

x-1 experimentos,

sendo k-1 sucessos

Modelos discretos: exemplo 1

Suponha que seu filho adora jogar basquete e que erra 3 arremessos a cada 10. Como ele sempre pede para ficar mais um pouco jogando antes de ir embora, você pensa responder sempre da mesma forma, para ser consistente. Entre as duas opções seguintes:

1) Mais 5 lances livres e vamos embora
2) Apenas lances livres e vamos embora quando você errar

Qual é a estratégia que permite que ele jogue mais, em média?

Modelos discretos: exemplo 1

1) 5 vezes. $\Leftarrow$

2) X : nº de arremessos até o 1º ir fora.

$X \sim \text{Geométrica}\left(p = \frac{3}{10} = 0{,}3\right)$

$E(X) = \frac{1}{0{,}3} = 3{,}3$ //

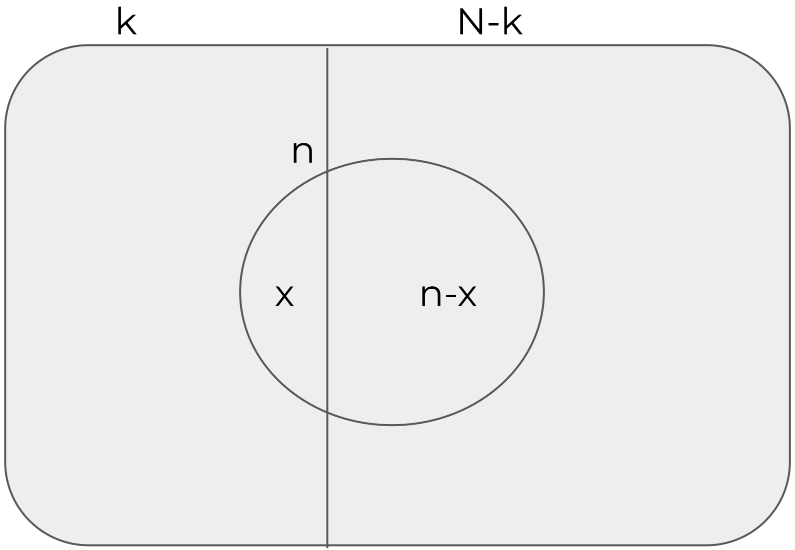
Modelos discretos: Hipergeométrica

X nº de sucessos em uma amostra de tamanho n (sem reposição) de uma **população finita**, de tamanho N, que contém k sucessos (k,n≤N).

X ~ Hipergeométrica(N,n,k)

$$f(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

$$max\{0, n-(N-k)\} \leq x \leq min\{n, k\}$$



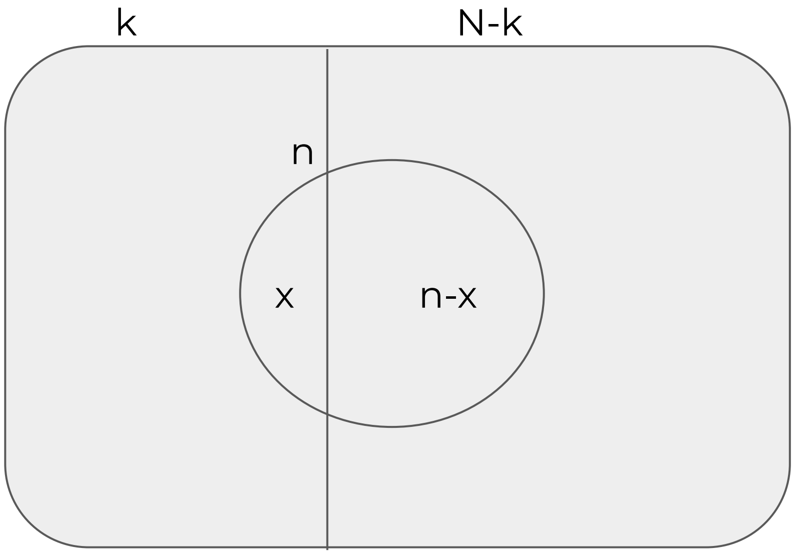
Modelos discretos: Hipergeométrica

X nº de sucessos em uma amostra de tamanho n (sem reposição) de uma **população finita**, de tamanho N, que contém k sucessos (k,n≤N).

X ~ Hipergeométrica(N,n,k)

$$f(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

$$max\{0, n-(N-k)\} \leq x \leq min\{n, k\}$$



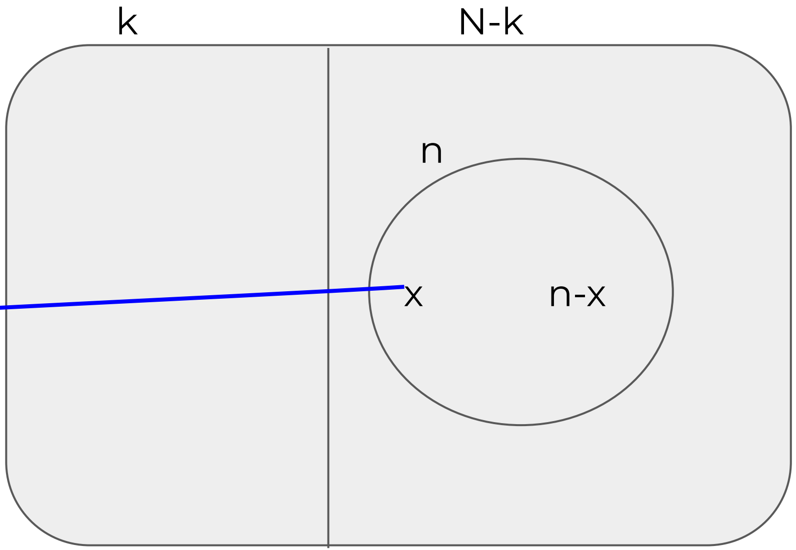
Modelos discretos: Hipergeométrica

X nº de sucessos em uma amostra de tamanho n (sem reposição) de uma **população finita**, de tamanho N, que contém k sucessos (k,n≤N).

X ~ Hipergeométrica(N,n,k)

$$f(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

$$max\{0, n-(N-k)\} \leq x \leq min\{n, k\}$$



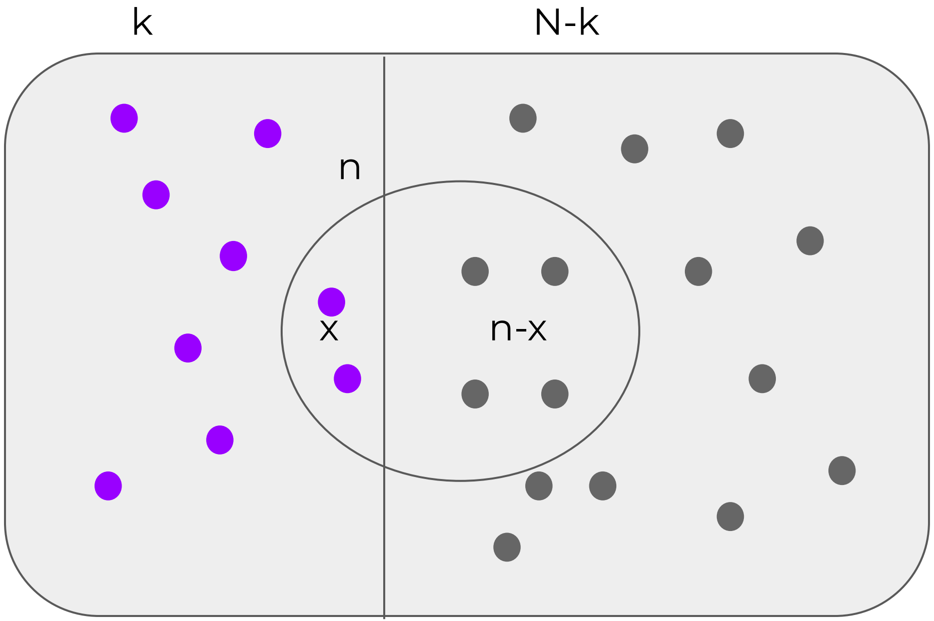
Modelos discretos: Hipergeométrica

Modelo	$f(x)$	Suporte	parâmetros	$E(X)$	V(X)
Bernoulli	$p^x(1-p)^{1-x}$	$x = 0, 1$	p	p	$p(1-p)$
Binomial	$C_x^n p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, 1, \cdots, n$	n, p	$\boxed{np}$	$\boxed{np(1-p)}$
Geométrica	$p(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \cdots$	p	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Binomial Negativa	$C_{k-1}^{x-1} p^k (1-p)^{x-k}$	$x = k, k+1, \cdots$	k, p	k/p	$k(1-p)/p^2$
Hipergeométrica	$\frac{C_x^k C_{n-x}^{N-k}}{C_n^N}$	$max\{0, n-(N-k)\} \leq x$ $x \leq min\{n, k\}$	N, n, k	$\boxed{nk/N}$	$\boxed{\frac{N-n}{N-1} n \frac{k}{N}(1 - \frac{k}{N})}$
Poisson	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	$x = 0, 1, \cdots$	λ	λ	λ

fator de correção para população finita

Modelos discretos: exemplo 2

Processo de captura e recaptura para estimar tamanho populacional



Captura

k animais marcados

Recaptura

n animais

x são marcados

Qual o N?

https://www.tamar.org.br/noticia1.php?cod=830

Modelos discretos: Poisson

Exemplo: indústria de peças automobilísticas

- fabrica *n* peças por dia
- probabilidade *p* da fabricação gerar uma peça defeituosa
- X: número de peças fabricadas com defeito no dia
- Se *p* é constante e as peças são com ou sem defeito de forma independente, então:

  X ~ Binomial (*n*,*p*) e E(X) = np = λ

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} \frac{\lambda}{n}^x (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-x}$$

Modelos discretos: Poisson

Se $n \uparrow$ e $p \downarrow$ tal que E(X) = np = λ se mantém constante, então:

$$lim_{n\to\infty} f(x) = lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} \frac{\lambda}{n}^{x} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x = 0, 1, \cdots$$

$\boxed{\therefore \quad X \sim \text{Poisson}(\lambda)}$

Processo de Poisson

Seja X o número de fissuras em um fio de cobre de 1m de comprimento, com um número médio de fissuras igual a λ:

- particionando o comprimento do fio em (*n*, ↑) subintervalos bem pequenos, t.q.
- a probabilidade de um subintervalo ter mais de uma fissura é 0 (desprezível),
- os subintervalos têm mesma probabilidade, *p*=λ/*n*, (↓) de apresentar uma fissura, proporcional ao comprimento do subintervalo, e
- os subintervalos apresentam ou não uma fissura de forma independente,

então X ~ Poisson(λ)

Modelos discretos: exemplo 3

A avaliação final de um curso à distância consta de uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada uma com 5 alternativas de resposta. Aprovação no curso requer pelo menos 6 questões corretas.

a) Se um aluno responde a todas as questões baseado em palpite (“chute”), qual a probabilidade de ser aprovado?
b) O curso, a cada ano de oferecimento, tem 200 alunos matriculados. Qual é o número médio de alunos sem nenhum conhecimento que são aprovados no curso? Use a aproximação pela Poisson.
c) Qual é a probabilidade de que esse curso tenha no máximo 2 alunos sem nenhum conhecimento aprovados em dois anos de seu oferecimento?

Modelos discretos: exemplo 3

(a)

X : nº de questões corretas na prova

$$P(X \geq 6) = 1 - \underset{\sim \text{Binomial}(n=10,\,0.2)}{P(X \leq 5)} = 1 - \sum_{x=0}^{5} \binom{10}{x} 0{,}2^{x} \cdot (1-0{,}2)^{10-x} = 1 - 0{,}994 = 0{,}006$$

(b) $E(X) = \underbrace{np}_{\lambda} = 200 \cdot 0{,}006 = 1{,}2$

(c) Y : nº alunos s/ conhecim. aprovados no curso

$Y \sim \text{Poisson}\left(\underbrace{\lambda = np = \frac{1{,}2}{\text{1 ano}}}_{\lambda^* = 1{,}2 \cdot 2 = 2{,}4/\text{2 anos}}\right)$

$$P(Y \leq 2) = \sum_{y=0}^{2} \frac{e^{-2,4} \cdot 2{,}4^{y}}{y!} = 0{,}5697$$