VARIÁVEL ALEATÓRIA

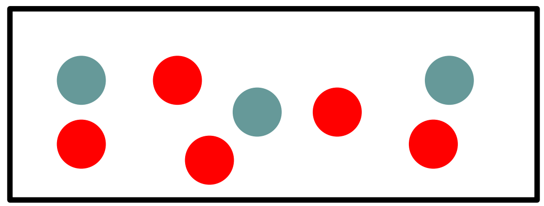
Prof. Jorge Bazán

São Carlos - SP

2023

Exemplo 1

Suponha que temos o seguinte experimento aleatório: Pegar três bolinhas ao acaso, sem reposição, de urna que tem 5 bolinhas vermelhas e três cinzas



O espaço amostral associado a este experimento é dado por

$$\Omega = \{(z_1, z_2, z_3) \,/\, z_i \in \{R, G\}\}$$

Em que o total de casos do espaço amostral é

$$n(\Omega) = C_3^8 = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$$

Defina, para o experimento acima, a seguinte variável aleatória

X: o número de bolinhas vermelhas obtidas

Quais valores pode obter a variável aleatória X?

Os possíveis valores da variável aleatória são $\{0,1,2,3\}$

De outra forma $X \in \{0,1,2,3\}$

X = 0 significa que segundo os resultados do experimento não se obtive nenhuma bolinha vermelha nas três extrações sem reposição.

X = 0, é equivalente ao evento "A: as três bolinhas extraídas, sem reposição, são de cor cinza"

O total de elementos de *A*, é dada por:

$$n(A)=C_3^3 C_0^5 = \frac{3!}{3!0!} \times \frac{5!}{0!5!} = 1$$

E então a probabilidade de A

$$\Pr\{A\} = \frac{1}{56}$$

O que significa que

$$\Pr\{X=0\} = \Pr\{A\} = \frac{1}{56}$$

O que significa que X = 1?

Que das três extrações, sem reposição, se obteve uma bolinha vermelha só.

Isto é das 5 vermelhas são escolhidas 1, e das 2 cinzas são escolhidas 2.

$$P(X = 1) = \frac{C_2^3 C_1^5}{C_3^8}$$

Uma forma geral de encontrar as probabilidades neste caso é com a seguinte expressão ou função que da um resumo de todos os casos

$$P(X=x)=\frac{C^{3}_{3-x}C^{5}_{x}}{C^{8}_{3}} \qquad x=0,1,2,3$$

Note que a soma das probabilidades é

$$\Pr\{X=0\}+\Pr\{X=1\}+\Pr\{X=2\}+\Pr\{X=3\}=\frac{1}{56}+\frac{15}{56}+\frac{30}{56}+\frac{10}{56}=1$$

A expressão anterior é chamada de função de distribuição de probabilidades.

Outra forma de apresentar todas probabilidades é com uma tabela de probabilidades

X	P(X=x)
0	1/56
1	15/56
2	30/56
3	10/56

1. Definição de variável Aleatória

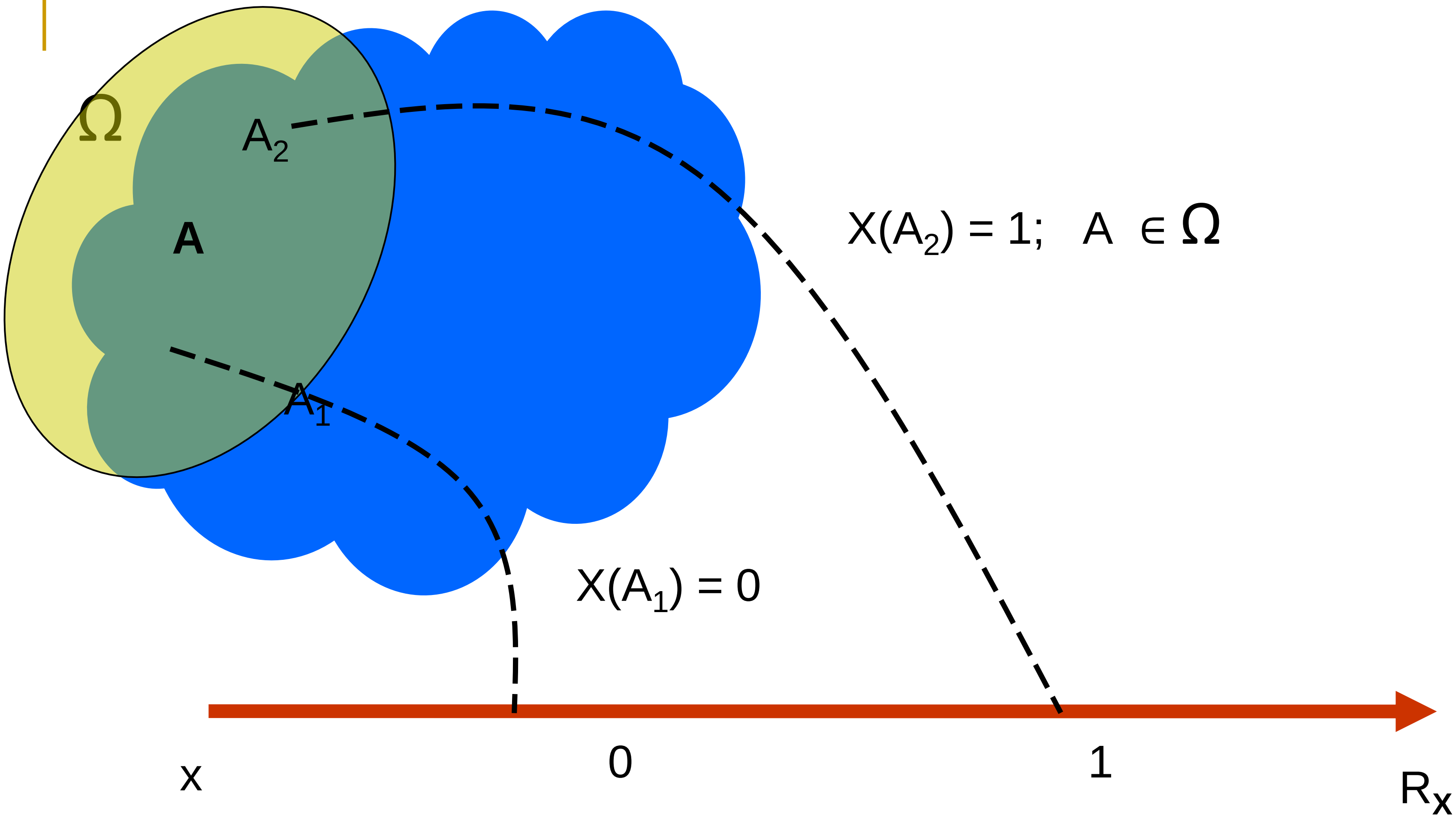
Informalmente, uma v.a é uma função que a cada evento (ponto ou elemento) do espaço amostral Ω associa um número real na reta $\Re$, isto é

$$X:\Omega\rightarrow\Re$$

No exemplo 1 temos o seguinte

X(A_1={0 vermelhas, 3 cinzas}) = 0
X(A_2 ={1 vermelha, 2 cinzas}) = 1
X(A_3={ 2 vermelhas, 1 cinzas}) = 2
X(A_4={ 3 vermelhas, 0 cinzas}) = 3

$$\Omega=\{s=(z_1,z_2,z_3)\,/\,z_i\in\{V,C\}\}$$


Ω
A2
A
A1
X(A2) = 1;   A ∈ Ω
X(A1) = 0
x
0
1
Rx

- O espaço amostral R_X , chamado range de X, é o conjunto de TODOS os possíveis valores da variável aleatória X(s) induzido pelo espaço amostral original Ω
- Assim, podemos dizer que um evento A em Ω induz um evento no espaço amostral R_X

- Para todo número real *a*, a notação $\{x = a\}$ deve ser interpretada descrevendo um evento, um conjunto de eventos elementares, para cada um dos quais x assume o valor a.

- Note que para cada par de números reais b e c, os conjuntos

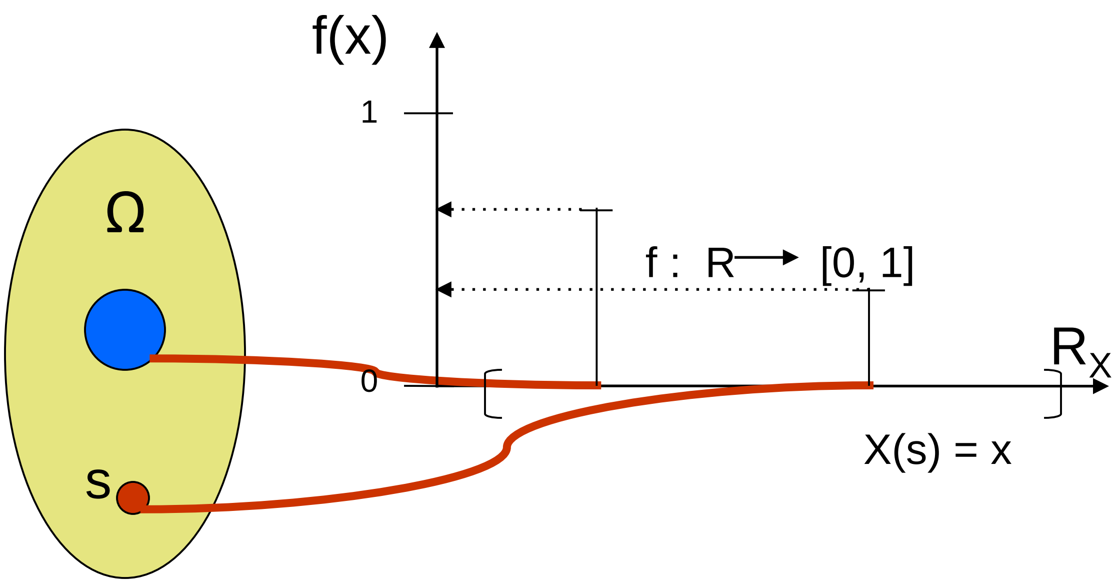
  $\{b < x < c\}$, $\{b \leq x < c\}$, $\{b < x \leq c\}$, $\{b \leq x \leq c\}$, $\{x < c\}$, $\{x \leq c\}$, $\{x > b\}$, $\{x \geq b\}$ representam eventos

Dizemos que se há definido uma variável aleatória, o que temos construído um modelo de distribuição de probabilidade quando conseguimos especificar uma expressão ou tabela dos valores de uma variável aleatória, junto con seus correspondentes probabilidades.

2. Função de Probabilidade

O conceito de Probabilidade de eventos no espaço amostral Ω se pode aplicar aos eventos em R_X.

$$0 \leq P(X(s) = x) = f(x) \leq 1$$



$X: \Omega \longrightarrow R_X$

- As seguintes probabilidades de intervalos de números reais a seguir podem ser escritas assim

  (a,b) é $P(a<X<b)$,

  $[a, b)$ é $P(a \leq X < b)$,

  $(a, b]$ é $P(a < X \leq b)$ e

  $[a, b]$ é $P(a \leq X \leq b)$

- Se o espaço amostral R_X é discreto então a v.a X é *discreta*.
- Se o espaço amostral R_X é contínuo então a v.a X é *contínua.*
- *Situações combinando o caso discreto e contínuo não são analisadas em nossa disciplina*

3. Função de Distribuição Acumulada

Se X é uma variável aleatória, a função de distribuição acumulada mede a probabilidade de um evento num intervalo de valores:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Se cumple que

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(b) + P(X = a)$$

Dependiendo de el rango de X: R_X las variables aleatorias pueden ser discretas y continuas

Para uma variável contínua $P(X = a) = 0$ e então

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

3. Função de Distribuição Acumulada

Dependendo do range de X: R_X as variáveis aleatórias podem ser discretas e contínuas. Neste caso a distribuição acumulada é:

Se X é uma v.a.

$$F(x) = \sum_{\forall i \, \exists \, x_i \leq x} f(x_i)$$

em que a suma é sobre todos os índices i que satisfazem
$x_i \leq x$

Se X é uma v.a.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

em que a somatória é substituída por uma integração para todos os valores de $t \leq x$

4. Variável Aleatória Discreta

Seja X uma variável aleatória. Se o número de possíveis valores de X (o seu domínio R_X) é:

- finito contável ou
- infinito contável (enumerável).

Então X é dita ser uma variável aleatória discreta.

Isto é, os possíveis valores de X podem ser listados, $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$

- No caso contável a lista é finita.
- No caso enumerável a lista é infinita, porém contável.

4.1 Função de Probabilidade v.a. Discreta

A cada resultado possível x_i da v.a. X é associado um

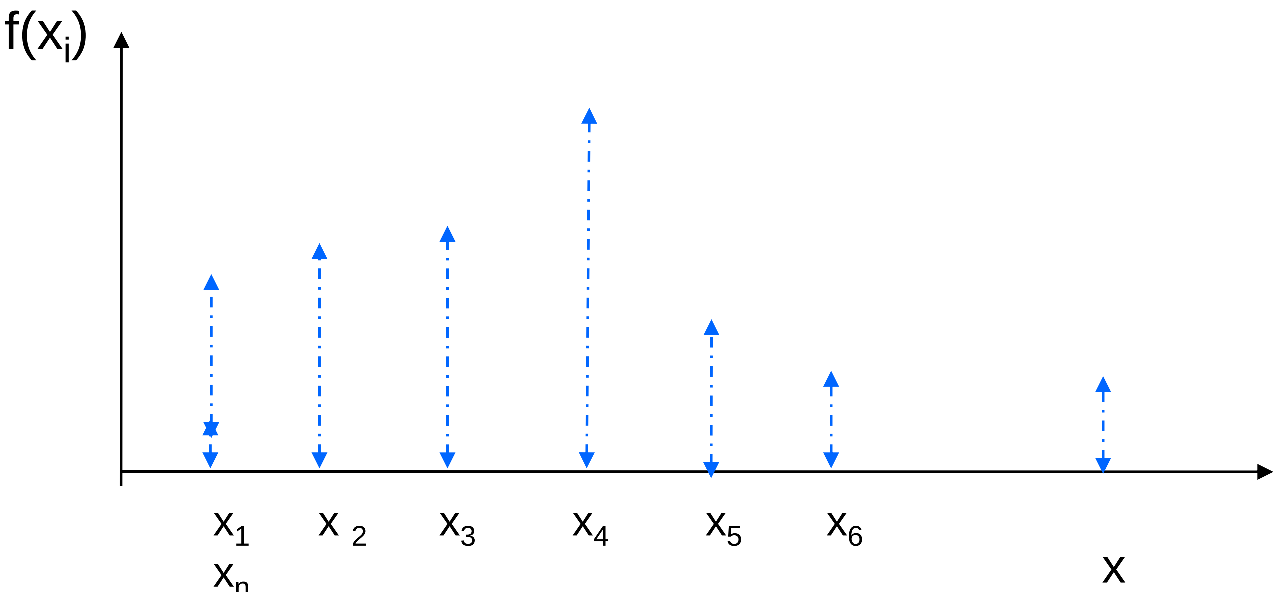
número $f(x_i) = P(X(s) = x_i)$ chamado de probabilidade de x_i.

Os $f(x_i)$ devem satisfazer:

Para um evento A a probabilidade é dada por

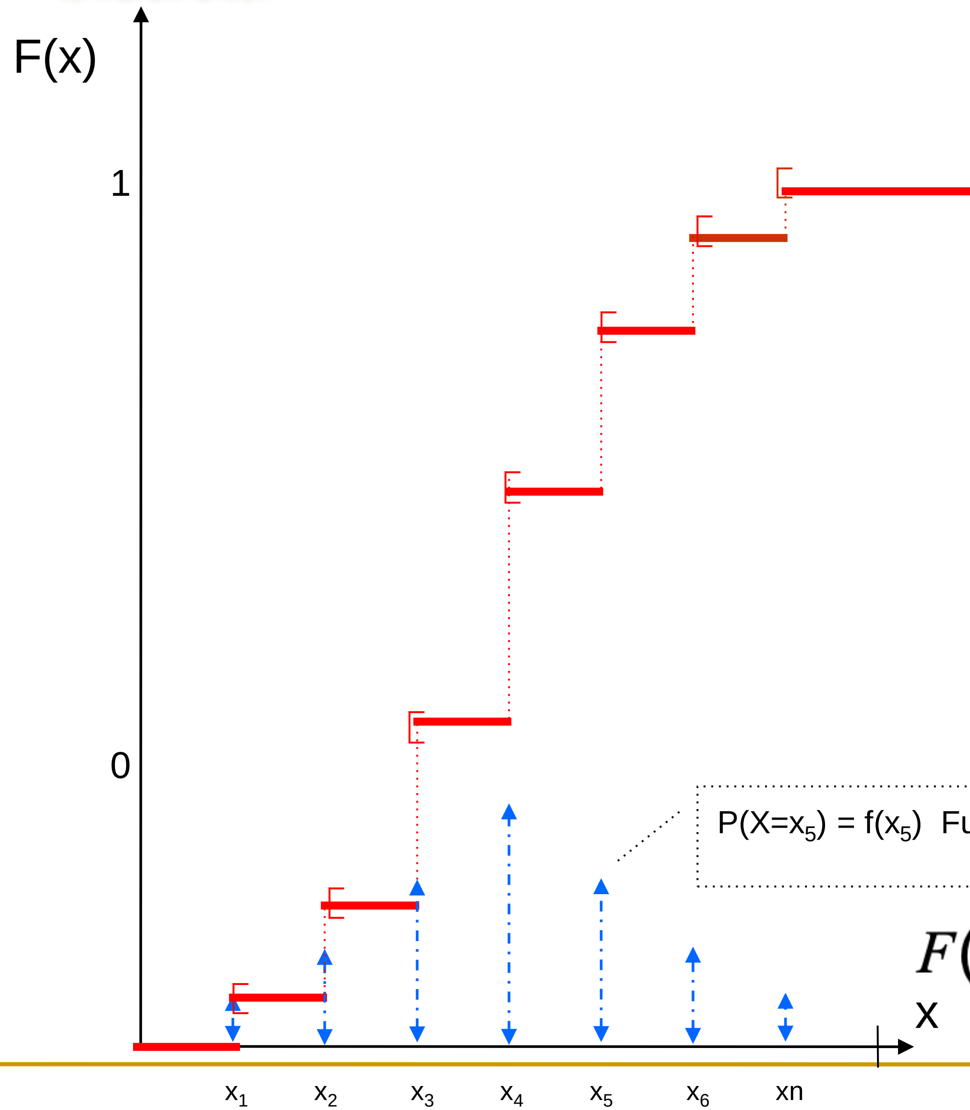
$$p(A) = \sum_{i \in A} f(x_i) = \sum_{i \in A} P(X = x_i)$$

Os conjuntos de pares (xi, f(xi)) são chamados de função de probabilidade ou função de massa.



$P(X=x_5) = f(x_5)$ Função de Probabilidade ou "massa"

4.2 Função da Distribuição de uma v.a. Discreta



$$
F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{1} f(x_i) & x_1 \leq x < x_2 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2} f(x_i) & x_2 \leq x < x_3 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3} f(x_i) & x_3 \leq x < x_4 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{4} f(x_i) & x_4 \leq x < x_5 \end{cases}
$$

$P(X=x_5) = f(x_5)$ Função de Probabilidade de “masa”

$$
F(x) = \sum_{x \leq x_i} P(X = x_i) = \sum_{x \leq x_i} f(x_i)
$$

4.3 Valor esperado e variância

Seja X uma variável aleatória discreta, com função de probabilidade *p*(*x*) e domínio em Rx. Então, o **Valor Esperado** ou Média da v.a. X é definida como:

$$\mu = E(X) = \sum_{R_X} x p(x) \qquad E[X] = \sum_{i \in R_X} x_i P(X = x_i)$$

em que a soma é sobre todo os valores de *X* que estão em R_x.

A **Variância** de uma variável aleatória discreta X com função de probabilidade p(x) e média μ é definida por:

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{R_X} (x - \mu)^2 p(x) \qquad V[X] = \sum_{i \in R_X} (x_i - E[X])^2 P(X = x_i)$$

em que a soma é sobre todos os valores do domínio de X.

Exemplo 2

Numa sala de aula com 10 estudantes, dos quais 4 são canhotos, escolhemos 3 deles ao acaso e sem reposição. Defina a variável aleatória X como: X = Número de canhotos na amostra escolhida. Identifique a função de probabilidade de X.

Solução:

Neste caso o domínio de X é Rx = {0, 1, 2, 3}

Em particular temos

p(2) = Prob(escolher 2 canhotos) = $\dfrac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}$,

e em geral p(x) = $\dfrac{\binom{4}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{10}{3}}$, para x = 0,1,2,3.

As combinações são apresentadas na tabela a seguir, a qual mostra a função de probabilidade de X.

x	F(x)
0	1/6
1	4/6
2	29/30
3	1

A função de distribuição acumulada, para o exemplo anterior, é

$$F(t) = P(X \leq t) = \sum_{x \leq t} p(x)$$

Construa os gráficos das funções de probabilidade e acumulada de X.

Média e variância do número de canhotos.

x	p(x)	xp(x)	x-µ	$(x-u)^2p(x)$
0	1/6	0	-1.2	.24
1	½	½	-0.2	.02
2	3/10	6/10	0.8	.192
3	1/30	1/10	1.8	.108
		$\mu=1.2$		$\sigma^2=0.56$

O valor $\sigma = 0.748$ é o desvio padrão, que está na mesma escala de μ e sua interpretação é mais fácil do que σ^2

Outra forma de calcular a variância é

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum_i x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

5. Variáveis Aleatórias Contínuas

- Esse tipo de variável surge quando o experimento ε é feito sobre um espaço amostral Ω associado com escalas intervalares, por exemplo, medições de distâncias, volumes, pesos, tempos, velocidades, intensidades, temperaturas etc.

- Como os possíveis valores de X num intervalo, $a < x < b$, são infinitos e não enumeráveis, não podemos falar do i-ésimo valor de X, $X = x_i$. Assim, falamos de Variáveis Aleatórias Contínuas em R_x, com R_x sendo um intervalo ou um conjunto de intervalos.

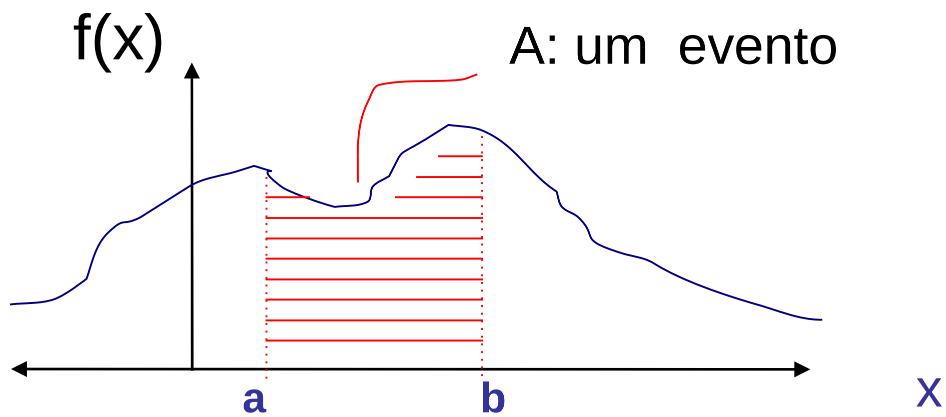
5.1 Distribuições de Probabilidade Continua

Seja X uma variável aleatória contínua. A *função densidade de probabilidade* (pdf) de X é uma função que satisfaz:

1. $f(x) > 0;$

   $\forall\, x \in R_x \in (-\infty, +\infty)$

2. $$\int_{R_x} f(x)\, dx = 1$$



A: $\{ x |\ a < x \leq b)$

$$P(A) = P(a < x < b) = \int_a^b \mathbf{f(x)\,dx}$$

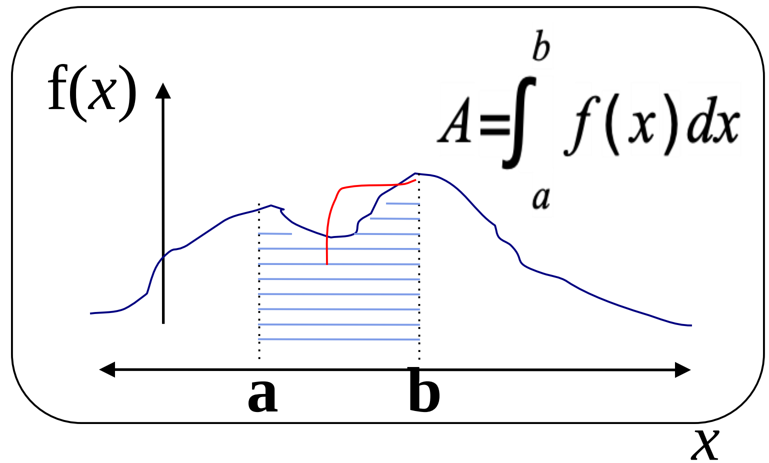
5.2 Função de Distribuição acumulada

1. $$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

2. $$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

3. F (-∞) = 0 ; F (∞) = 1

4. F_x é não decrescente



5. $$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

6. $$P(X = a) = 0$$

Portanto,

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) =$$

$$= P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

5.3 Esperança e Variância

$$E[X] = \mu = \int_{R_X} x f(x)\,dx$$

$$V[X] = \sigma^2 = \int_{R_X} (x - E[X])^2 f(x)\,dx$$

$$V[X] = E(X^2) - \mu^2 = \int_{R_X} x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

Exemplo 4

Suponha que o custo da mensalidade da energia elétrica, em milhares de unidades monetárias (u.m), de uma empresa seja uma variável aleatória com função de densidade:

$$f(x) = \begin{cases} 4kx, & 0 \leq x < 0 \\ k(5-x), & 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Obtenha a constante k.

a) Construa o gráfico da função de densidade de probabilidade.

b) Obtenha a função de distribuição acumulada.

c) Obtenha a probabilidade de que o custo mensal não seja superior a 2 mil u.m.

e) Qual é o valor esperado e a variância do custo?

a)

$$\int_0^1 4kx\,dx + \int_1^5 k(5-x)\,dx = 4k\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + k\left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^5 = 2k + k(25 - 25/2 - 5 + 1/2) = 1$$

2k+ k(20-12)=1 $\Rightarrow$ k=1/10

d)

$$P(X \le 2) = \int_0^1 \frac{4}{10}x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{10}(5-x)\,dx = \frac{4}{10}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{10}\left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{1}{10}(10 - 4/2 - 5 + 1/2) = \frac{2}{10} + \frac{7}{20} = \frac{11}{20}$$

e)

$$E(X) = \int_0^1 4kx^2\,dx + \int_1^5 k(5x - x^2)\,dx =$$

$$= 4k\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + k\left(5\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^5 = \frac{4k}{3} + k\left(\frac{125}{2} - \frac{125}{3} - \frac{5}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$E(X^2) = \int_0^1 4kx^3\,dx + \int_1^5 k(5x^2 - x^3)\,dx =$$

$$= 4k\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + k\left(5\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^5 = \frac{4k}{4} + k\left(\frac{625}{3} - \frac{625}{4} - \frac{5}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

Finalmente

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$

5.4 Outras propiedades das variáveis aleatorias

Propiedades do valor esperado e da variância

$$E(a) = a, \quad E(a+bX) = a + bE(X)$$

$$V(a) = 0, \quad V(a+bX) = b^2 V(X) \qquad E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$