Trabalhos Virtuais

Prof. Assoc. Flávio D. Marques & Prof. Assoc. Leopoldo de Oliveira

Neste Tópico:

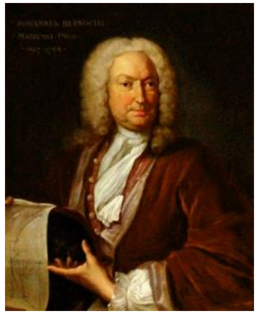
vídeo-aula parte1

- Definições
- Princícpio dos Trabalhos Virtuais

vídeo-aula parte 2

- Energia
- Estabilidade

*“Um sistema mecânico está em equilíbrio se, e somente se, o **trabalho virtual** total de todas as forças aplicadas for nulo”*



Johann Bernoulli
(1667 - 1748), Suíça.

deslocamento Virtual δ

deslocamentos possíveis, tal que um deles irá minimizar a energia necessária para o movimento.

trabalho virtual

Cálculo das Variações

consiste em resolver problemas de máximos e mínimos de funções contínuas definidas sobre algum espaço funcional.

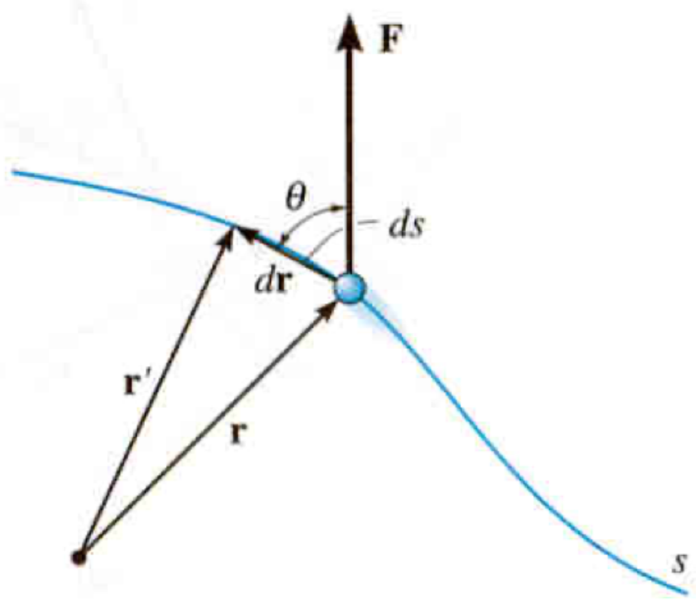
Funcional = função de funções

PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

EQUILÍBRIO DE SISTEMAS MECÂNICOS

Trabalho de uma Força

Uma força $\mathbf{F}$ realiza trabalho sobre um ponto material quando este sofre um deslocamento na direção da força.

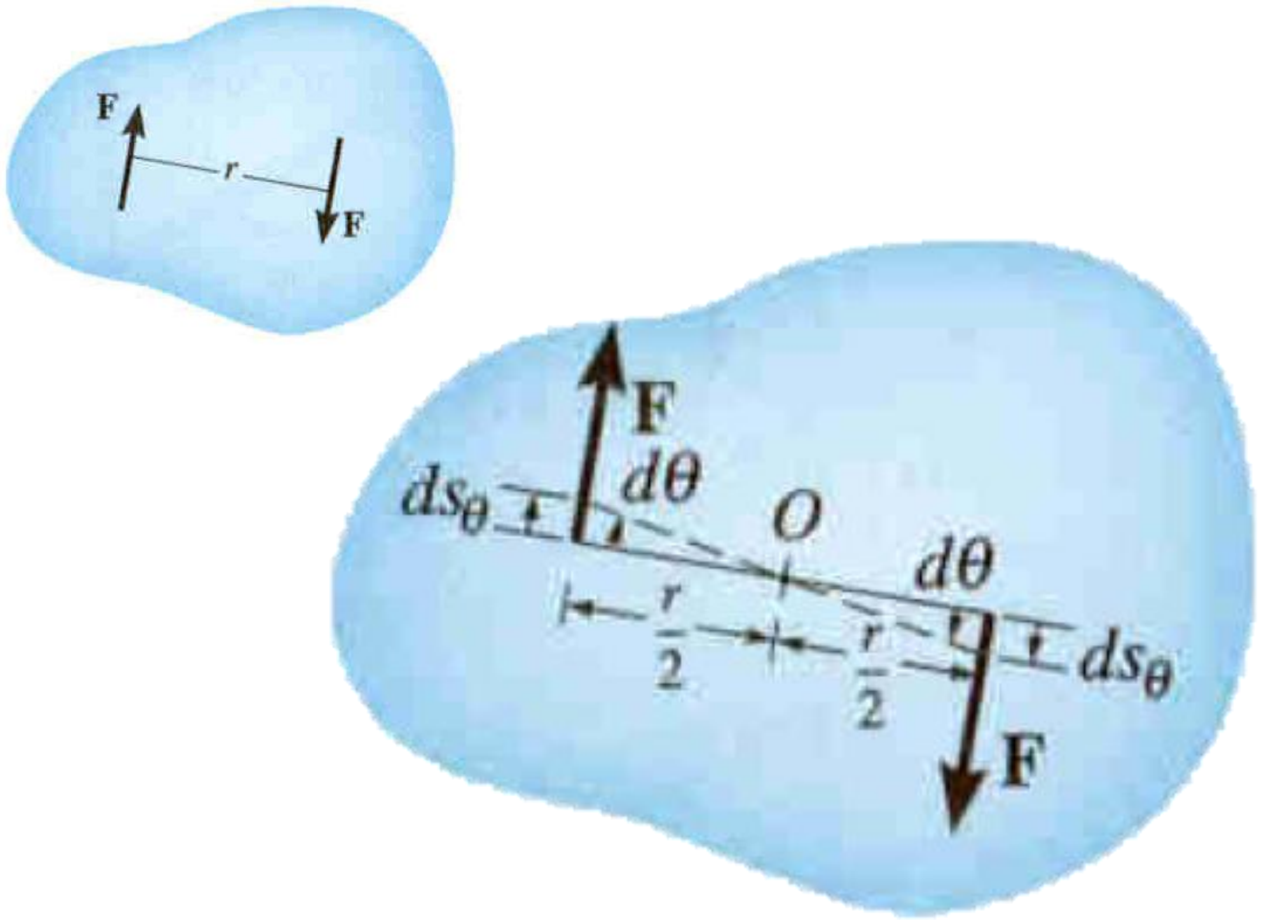


$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (J, \text{joule})$$

$$dU = F\,ds\cos\theta$$

$$dU > 0 \quad \rightarrow \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ$$
$$dU < 0 \quad \rightarrow \quad 90^\circ < \theta \leq 180^\circ$$
$$dU = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = 90^\circ$$

Trabalho realizado por Momento de Binário

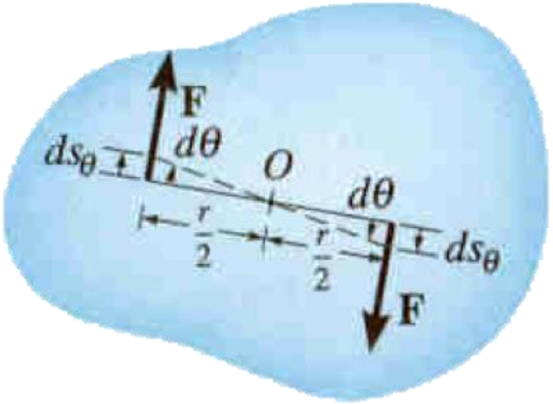


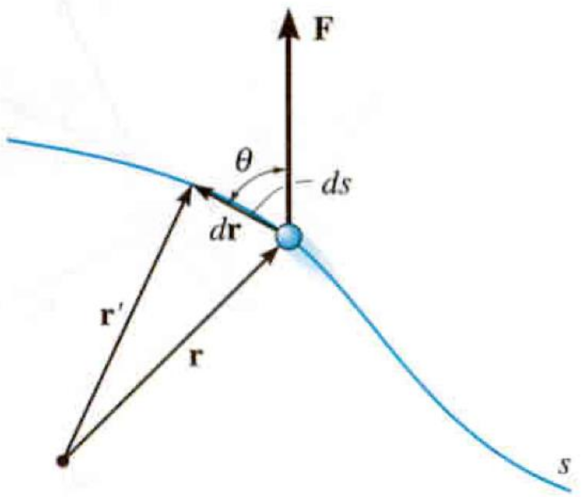
As forças de um binário só realizam trabalho quando o corpo sofre uma *rotação*.
Seja um binário de torque $M = Fr$, então:

$$dU = F\underbrace{\left(\frac{r}{2}d\theta\right)}_{d_{s_\theta}} + F\underbrace{\left(\frac{r}{2}d\theta\right)}_{d_{s_\theta}} = Frd\theta$$

$$dU = \mathbf{M}\cdot d\boldsymbol{\theta}$$

O trabalho U é *positivo* se os vetores $\mathbf{M}$ e $\boldsymbol{\theta}$ apresentam o mesmo sentido.





Em $dU = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e $dU = \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta}$, $d\mathbf{r}$ e $d\boldsymbol{\theta}$ são quantidades infinitesimais de movimentos físicos reais.

Considerar um movimento materialmente possível imaginado para o sistema, mas que obedeça as restrições físicas em um instante de tempo determinado. Os deslocamentos originados por esses movimentos são denominados *deslocamentos virtuais*.

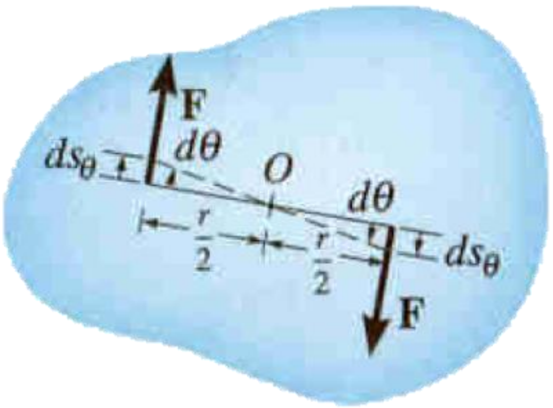
$\delta\mathbf{r}$; $\delta\boldsymbol{\theta}$ $\Rightarrow$ deslocamentos virtuais

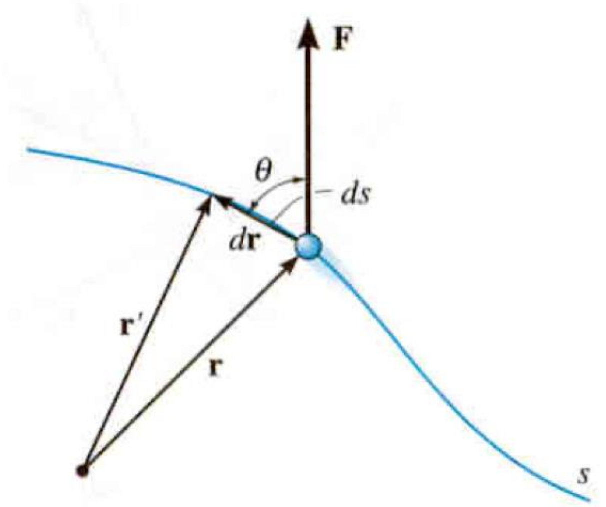
Os deslocamentos virtuais também obedecem as regras do cálculo diferencial.

Seja uma variável $x(\theta)$. Seu deslocamento virtual pode ser determinado por:

$$\delta x(\theta) = \left(\frac{\partial x(\theta)}{\partial \theta} \right) \delta\theta$$

(diferencial de primeira ordem)





Trabalho Virtual

O trabalho realizado por uma força, sujeita a um deslocamento virtual, e/ou um momento de binário sujeito a uma rotação virtual, resultam em um TRABALHO VIRUTAL.

$$\delta U = \boxed{\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}} + \boxed{\mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}}$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais

P.T.V.

Um sistema de corpos rígidos interligados estará em **equilíbrio** se o trabalho virtual realizado por todas as forças e momentos externos atuantes no sistema for **nulo** para cada deslocamento virtual independente do sistema.

$$\boxed{\delta U = 0}$$

Obviamente,

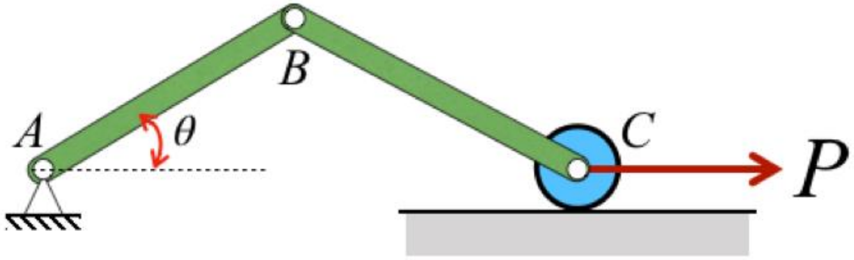
$$\delta U = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

mas para equilíbrio, $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, sendo que $\delta \mathbf{r}_i \neq \mathbf{0}$.

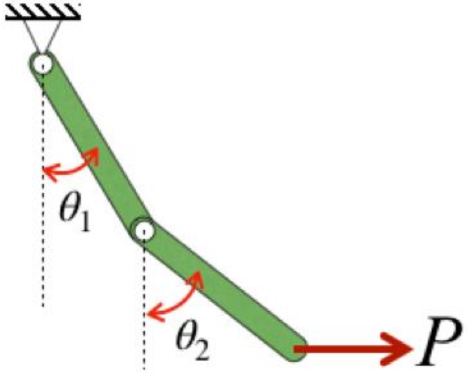
Princípio dos Trabalhos Virtuais para Sistemas de Corpos Rígidos Interligados

O P.T.V. é adequado para resolver problemas de equilíbrio de sistemas de corpos rígidos interligados.

Grau de Liberdade: é a coordenada independente que permite conhecer a posição de um número determinado de pontos do sistema.

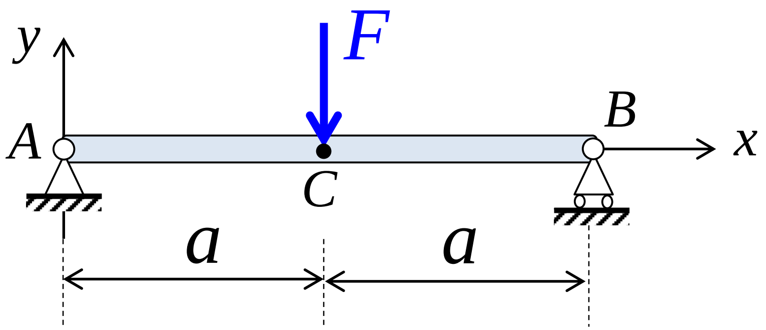


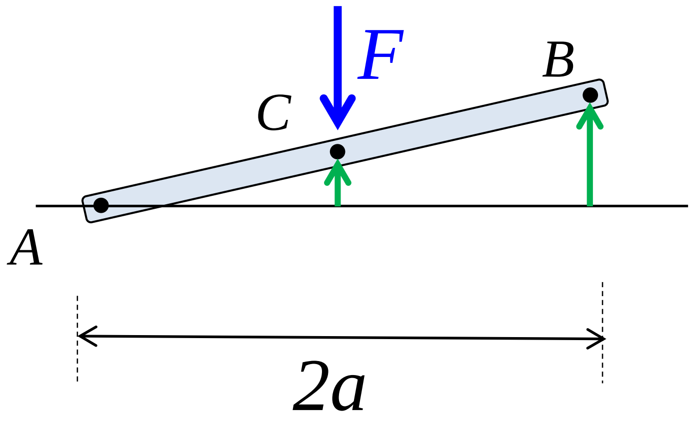
(a) Sistema com um *gdl* (θ)



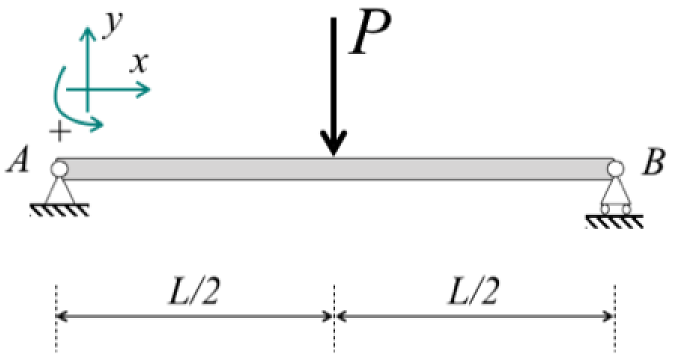
(b) Sistema com dois *gdl's* (θ_1 e θ_2)

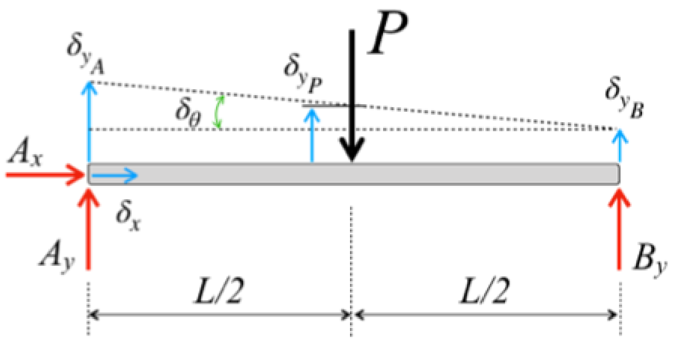
EQUILÍBRIO pelo MÉTODO DOS TRABALHOS VIRTUAIS





EQUILÍBRIO pelo MÉTODO DOS TRABALHOS VIRTUAIS





Trabalho virtual é

$$\delta U = A_x\delta_x + A_y\delta_{y\,A} + B_y\delta_{y\,B} - P\delta_{y\,P}$$

mas $\delta_{y\,A} = \delta_{y\,B} + L\delta_\theta$ e $\delta_{y\,P} = \delta_{y\,B} + (L/2)\,\delta_\theta$ então,

$$\delta U = A_x\delta_x + A_y(\delta_{y\,B} + L\delta_\theta) + B_y\delta_{y\,B} - P(\delta_{y\,B} + (L/2)\,\delta_\theta)$$

$$\delta U = A_x\delta_x + (A_y + B_y - P)\delta_{y\,B} + (A_yL - P\,(L/2))\delta_\theta$$

Pelo P.T.V.: $\delta U = 0$, mas $\delta_x \neq 0$, $\delta_{y\,B} \neq 0$ e $\delta_\theta \neq 0$, portanto:

$$\begin{array}{rcll} A_x & = & 0 & (\sum F_x = 0) \\ A_y + B_y - P & = & 0 & (\sum F_y = 0) \\ A_yL - P(L/2) & = & 0 & (\sum M_B = 0) \end{array}$$

o que resulta:

$$A_x = 0\ ; \quad A_y = P/2\ ; \quad B_y = P/2$$

Energia e Estabilidade

Forças Conservativas

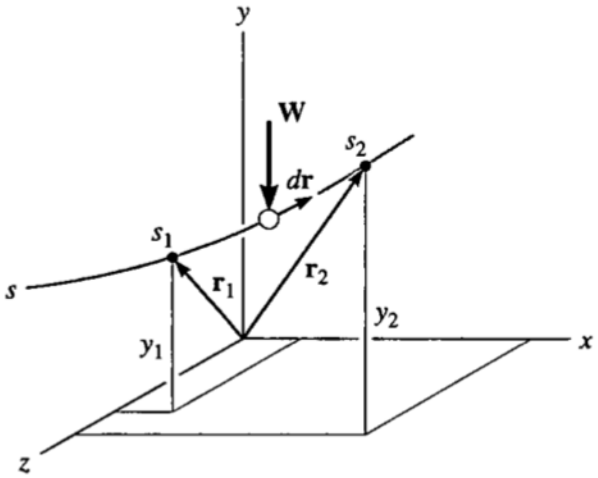
Uma **Força Conservativa** é aquela que realiza trabalho **independente da trajetória** seguida.

Força Peso

$$U = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$U = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-W\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

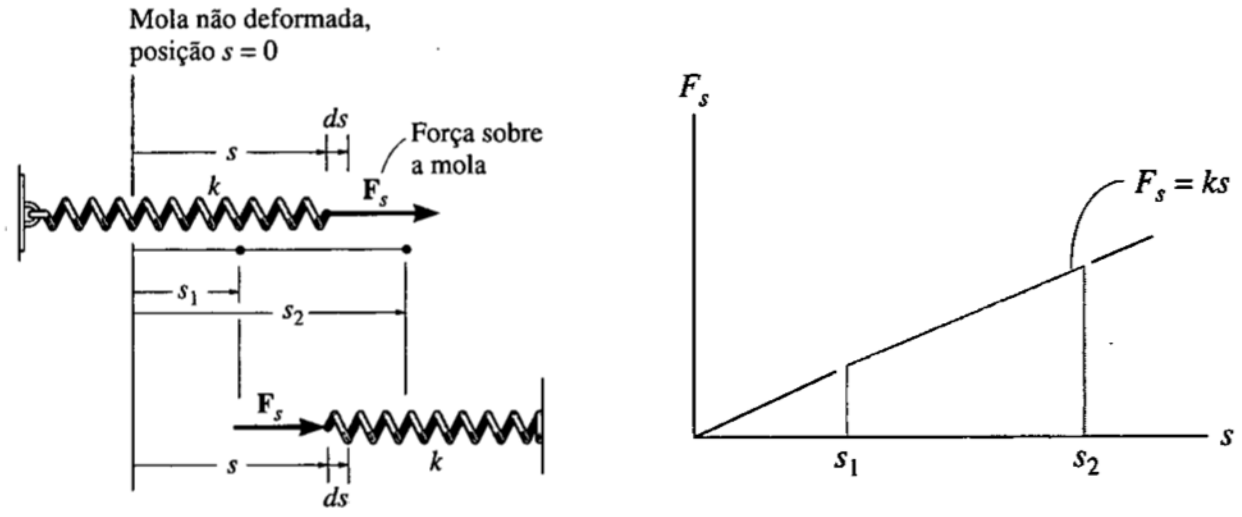
$$U = -W(y_2 - y_1)$$



Portanto:

1. se deslocamento é para cima: $U < 0$;
2. se deslocamento é para baixo: $U > 0$;
3. se deslocamento na horizontal: $U = 0$;

Força de uma Mola



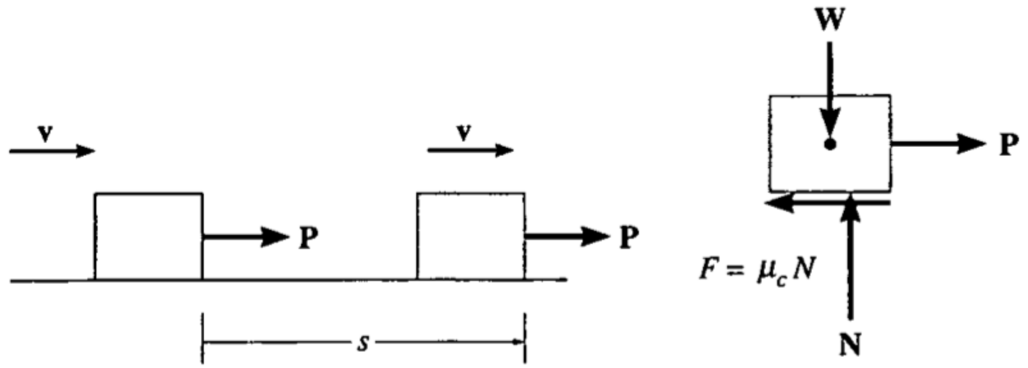
$$F_s = ks$$

$$U = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds = \int_{s_1}^{s_2} ksds = \frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2$$

$$U = \frac{1}{2}k\left(s_2^2 - s_1^2\right)$$

Força de Atrito

Se um corpo se desloca sobre uma superfície com atrito, *num único sentido*,



$$U = -\int_{s_1}^{s_2} \mu_c N ds = -\mu_c N (s_2 - s_1)$$

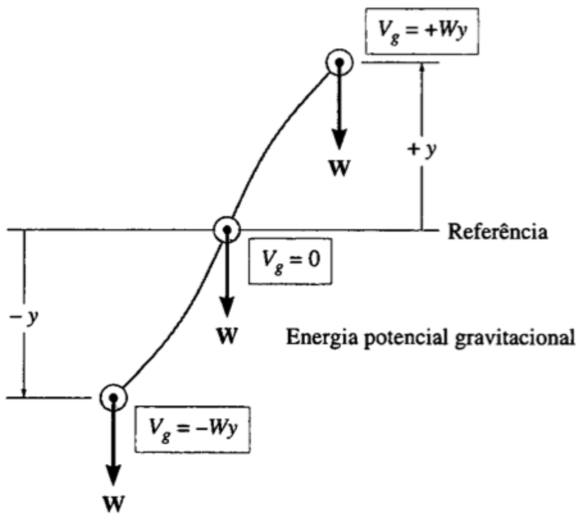
A força de atrito depende da trajetória percorrida, portanto **não é uma força conservativa**.

Energia Potencial

Energia: grandeza escalar que representa a capacidade de realizar trabalho.

- Energia Cinética (T): proveniente do estado de movimento;
- Energia Potencial (V): associada com a posição, ou medida da quantidade de trabalho realizado por uma força conservativa.

Energia Potencial Gravitacional

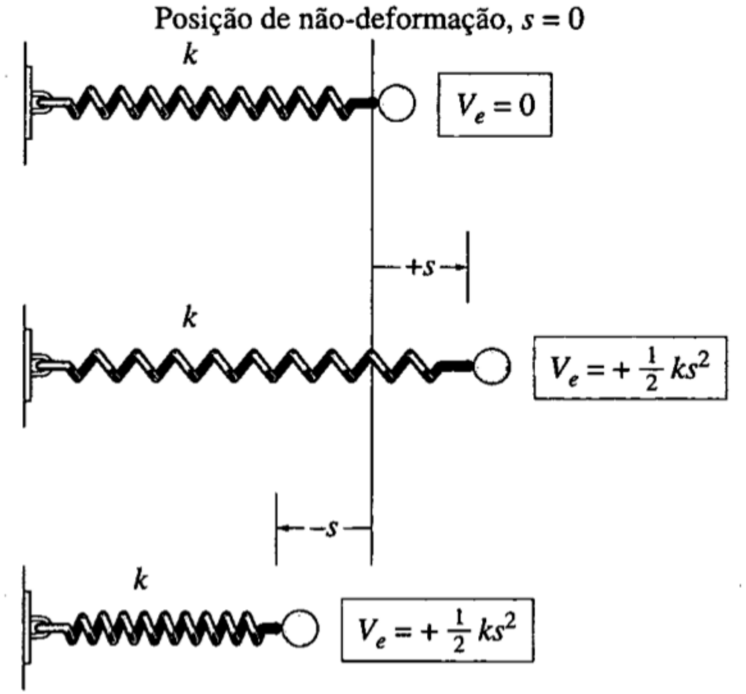


$$V_g = Wy$$

onde

$$\begin{array}{ll} V_g > 0 & \text{se } y > 0 \\ V_g = 0 & \text{se } y = 0 \\ V_g < 0 & \text{se } y < 0 \end{array}$$

Energia Potencial Elástica



$$V_e = \frac{1}{2}ks^2$$

Na condição deformada a mola **sempre** tem capacidade de realizar trabalho positivo.

Função Potencial

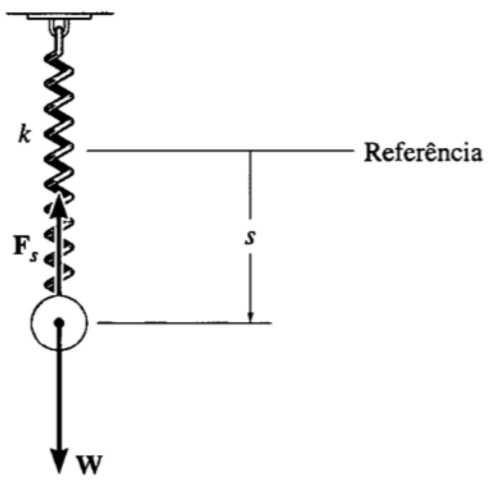
No caso de um corpo sujeito simultaneamente à forças gravitacionais e elásticas, denomina-se **função potencial**:

$$V = V_g + V_e$$

O trabalho realizado por uma força conservativa que desloca seu ponto de aplicação é medido pela diferença da função potencial,

$$U = V_1 - V_2$$

Seja o exemplo,



$$V = V_g + V_e = -Ws + \frac{1}{2}ks^2$$

entre duas posições,

$$V_1 = -Ws_1 + \frac{1}{2}ks_1^2 \quad \text{e} \quad V_2 = -Ws_2 + \frac{1}{2}ks_2^2$$

$$U = -Ws_1 + \frac{1}{2}ks_1^2 - \left(-Ws_2 + \frac{1}{2}ks_2^2\right)$$

$$= W(s_2 - s_1) - \frac{1}{2}k\left(s_1^2 - s_2^2\right)$$

Critério da Energia Potencial para o Equilíbrio

Como $U = V_1 - V_2$, então para deslocamentos infinitesimais ds,

$$dU = V(s) - V(s + ds) \quad \Rightarrow \quad dU = dV$$

Similarmente em termos do trabalho virtual, então,

$$\delta U = V(s) - V(s + \delta s) \quad \Rightarrow \quad \delta U = \delta V$$

Portanto, pelo P.T.V.:

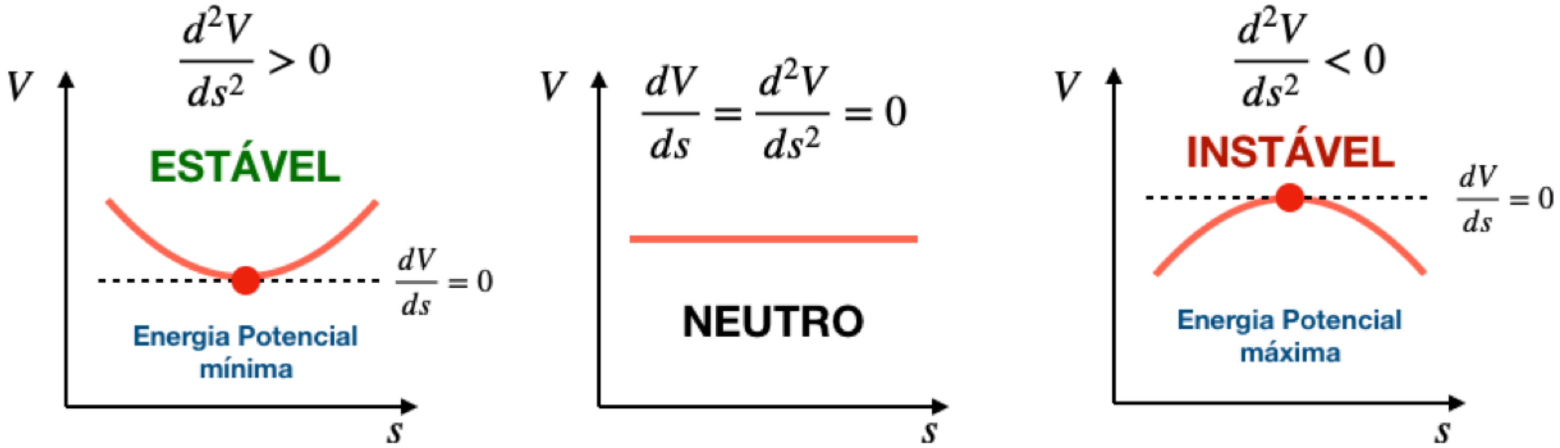
$$\delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta V = 0, \ \forall \delta s \neq 0$$

Isso significa que no equilíbrio não há variação da energia potencial, portanto:

$$\frac{dV}{ds} = 0$$

Estabilidade do Equilíbrio

Se no equilíbrio $\frac{dV}{ds} = 0$, da análise de $\frac{d^2V}{ds^2}$ vem:



Tenta.
Fracassa.
Não importa.
Tenta outra vez.
Fracassa de novo.
Fracassa melhor.

Samuel Beckett