PEF2602

Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

EP-USP

FAU-USP

Aula 5:

# Parte I – Introdução aos cabos e arcos

# Parte II – Estudo do cabo parabólico

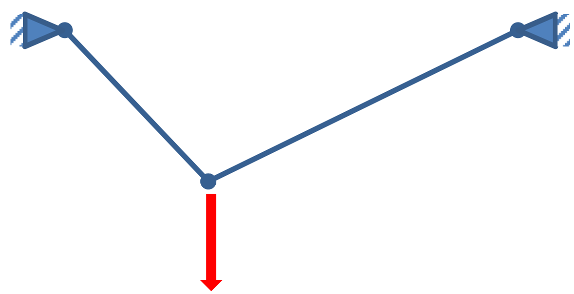
Aula 6:

# Parte III – Cabos e arcos poligonais

Ruy Marcelo Pauletti, Leila Meneghetti Valverdes, Luís A. G. Bitencourt Jr.

CABOS: estruturas lineares e flexíveis, capazes de resistir exclusivamente à forças normais de tração.

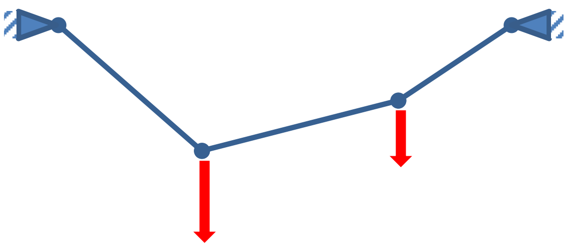
Como os cabos não desenvolvem forças cortantes nem momentos fletores, somente são capazes de equilibrar cargas transversais ajustando a sua geometria:



❖ Uma força transversal concentrada provoca uma mudança abrupta da direção do eixo do cabo!

CABOS: estruturas lineares e flexíveis, capazes de resistir exclusivamente à forças normais de tração.

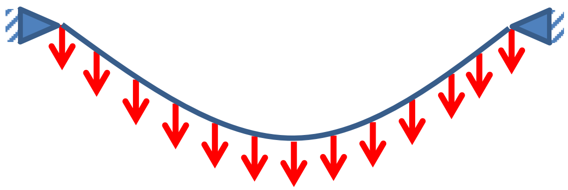
Como os cabos não desenvolvem forças cortantes nem momentos fletores, somente são capazes de equilibrar cargas transversais ajustando a sua geometria:



❖ O cabo se ajusta às forças concentradas, assumindo uma geometria poligonal

CABOS: estruturas lineares e flexíveis, capazes de resistir exclusivamente à forças normais de tração.

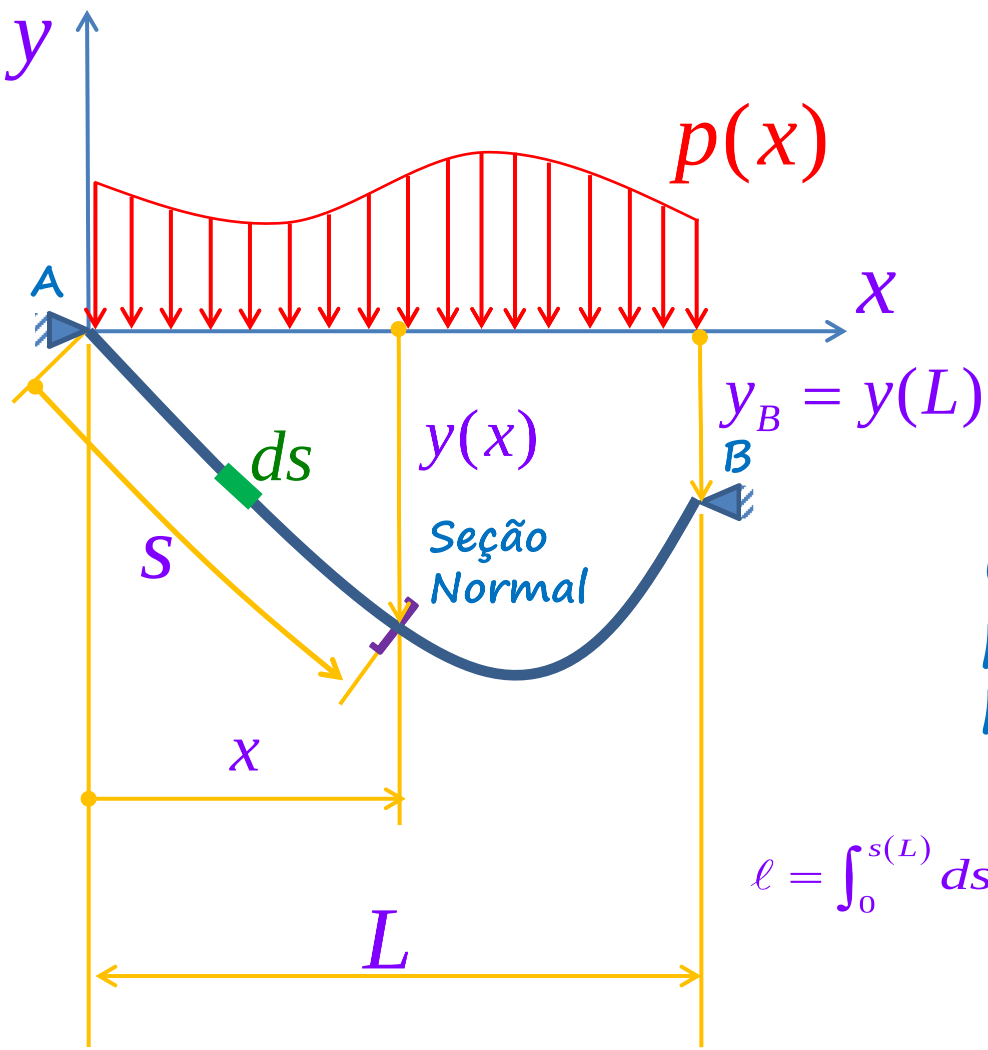
Como os cabos não desenvolvem forças cortantes nem momentos fletores, somente são capazes de equilibrar cargas transversais ajustando a sua geometria:



❖ Forças distribuídas provocam variações contínuas de direção do eixo do cabo, ou seja, o cabo equilibra esforços transversais ajustando a sua CURVATURA

# Cabos sob carregamento contínuo

## Notação:




$x$ : Abscissa cartesiana

$s$ : Abscissa curvilínea

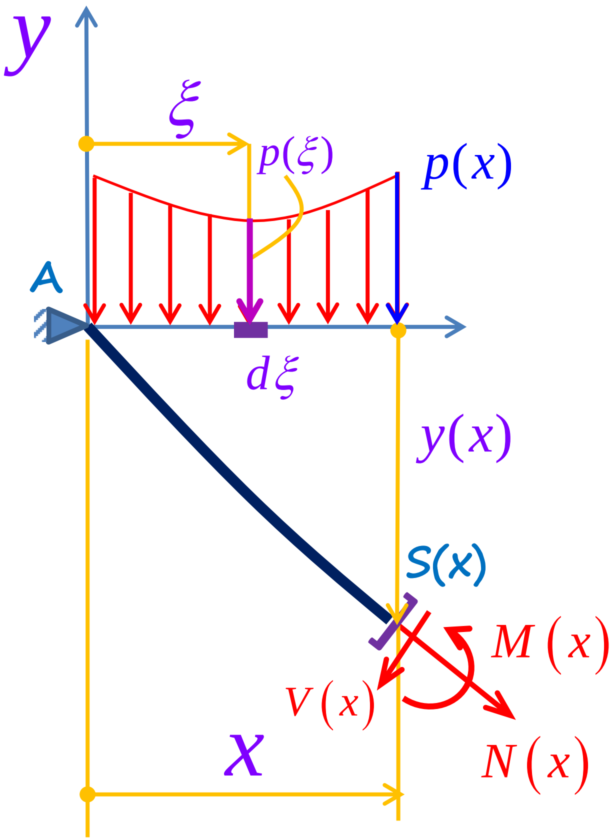
$L$ : Vão

$\ell$ : comprimento do cabo

Um ponto do eixo do cabo pode ser identificado tanto por $x$ como por $s$!

$$\ell = \int_0^{s(L)} ds = \int_0^L \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

# Esforços solicitantes em uma seção transversal do cabo:




Os momentos fletores são sempre nulos, ou seja:

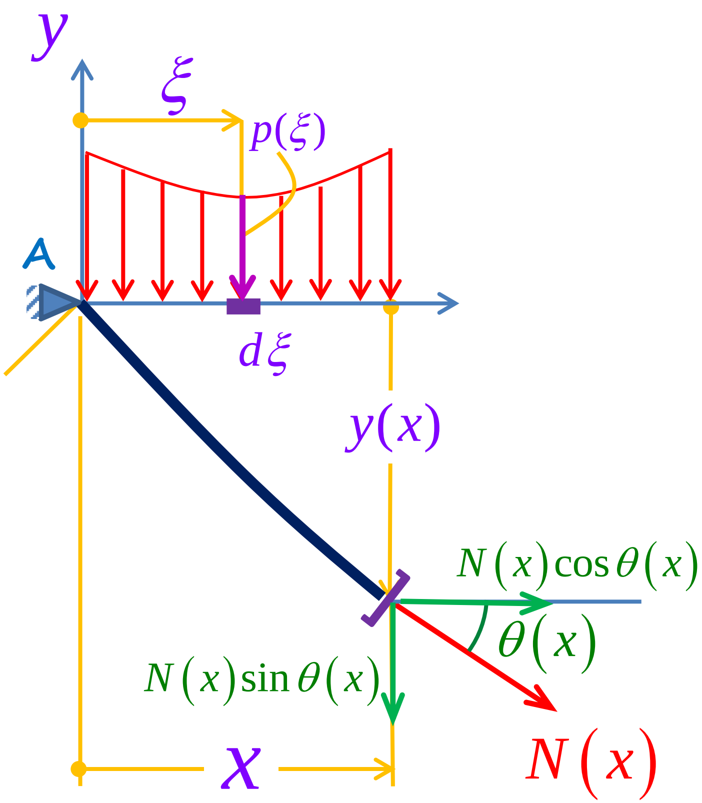
$$M(x) = 0, \quad \forall x \in [0, L]$$

As forças cortantes também são sempre nulas, pois

$$V(x) = \frac{dM}{dx} = 0 \;, \quad \forall x \in [0, L]$$

Logo o único esforço solicitante é a força normal N(x), tangente ao eixo do cabo!

# Equilíbrio de momentos de um segmento de cabo:




**Equilíbrio:** $\boxed{\sum M_{(A)} = 0,\ \forall x \in [0, L]}$

$$\sum M_{(A)} = +\left(N(x)\cos\theta\right)\cdot y(x) - \left(N(x)\sin\theta\right)\cdot x - \int_0^x \left(p(\xi)\cdot\xi\right)d\xi$$

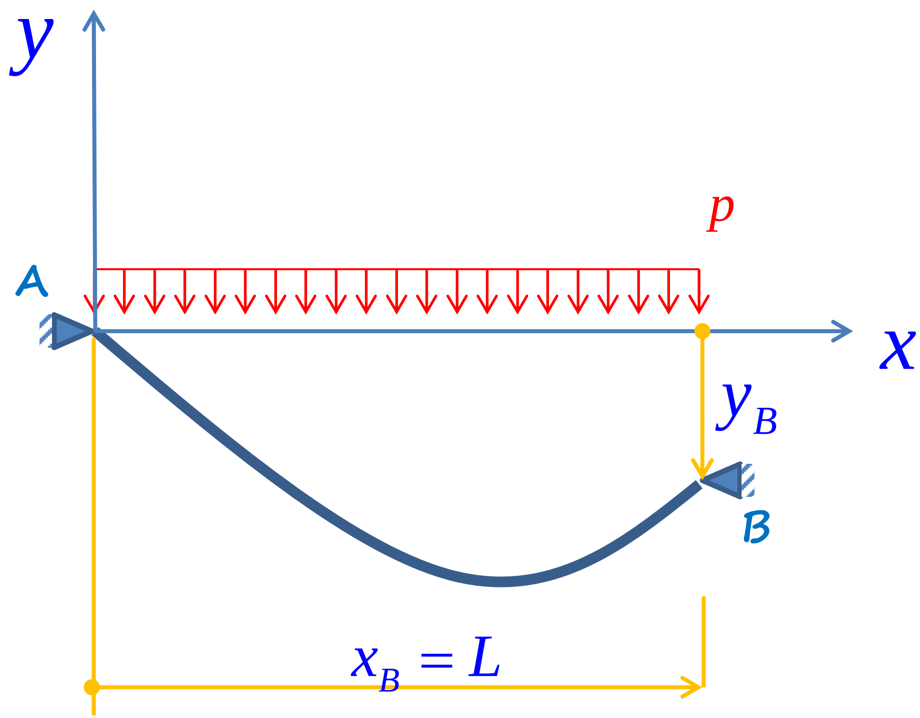
$$\boxed{\sum M_{(A)} = \left(N(x)\cos\theta\right)\cdot y(x) - \left(N(x)\sin\theta\right)\cdot x - \int_0^x \left(p(\xi)\cdot\xi\right)d\xi = 0}$$

$$\forall x \in [0, L]$$

## Cabo sujeito à carga vertical uniformemente distribuída:

"CABO PARABÓLICO"

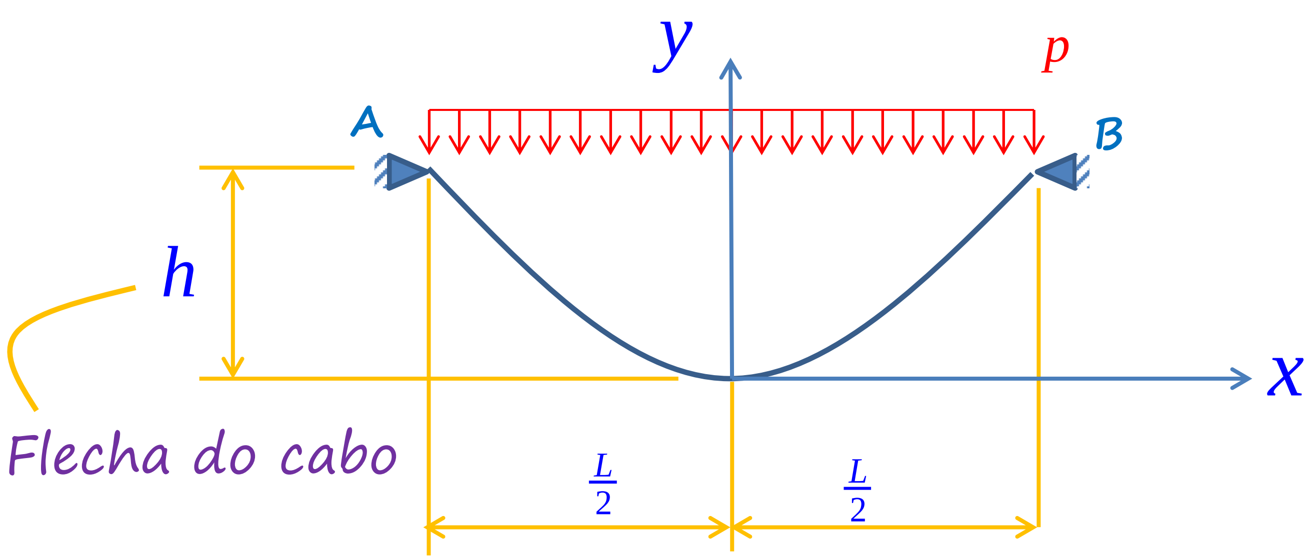
Caso geral: apoios desnivelados:



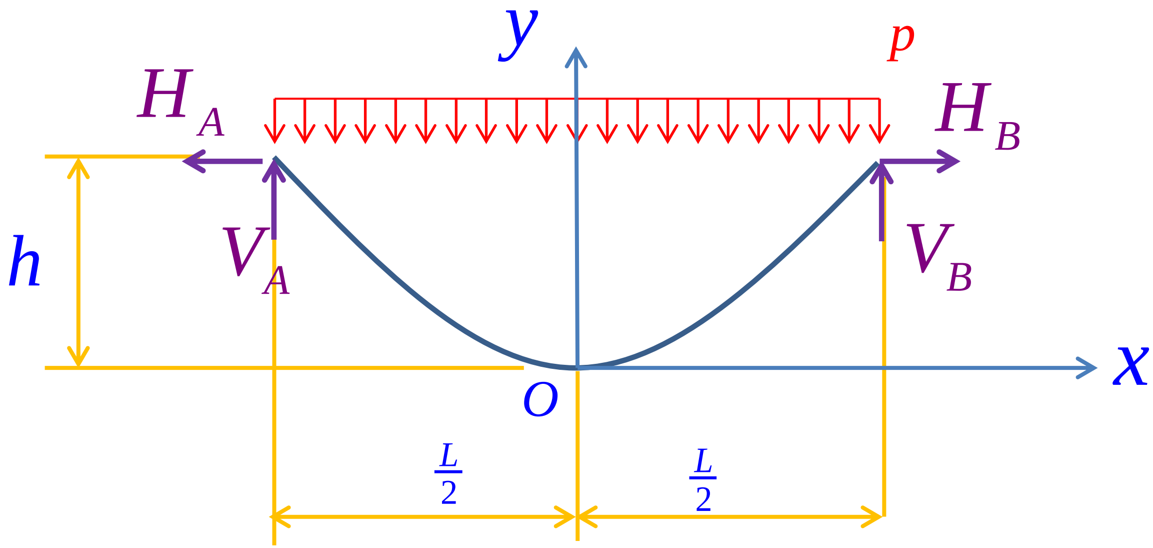
## Cabo sujeito à carga vertical uniformemente distribuída:

"CABO PARABÓLICO"

Caso particular: apoios nivelados



# Equilíbrio do cabo parabólico:

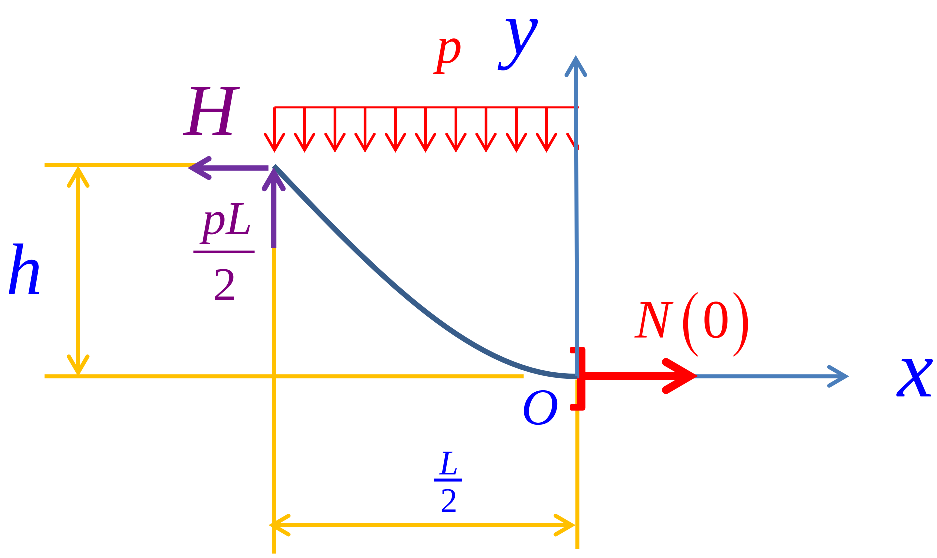



$$\sum F_X = H_B - H_A = 0 \quad \therefore \quad \boxed{H_A = H_B = H}$$ "Empuxo"

$$\left.\begin{array}{l} \sum F_Y = V_A + V_B - pL = 0 \\ \sum M_{(A)} = V_B L - \dfrac{pL^2}{2} = 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{V_A = V_B = \dfrac{pL}{2}}$$

Simetria, OK!

Cortando no ponto O, e fazendo o equilíbrio da parte da esquerda:

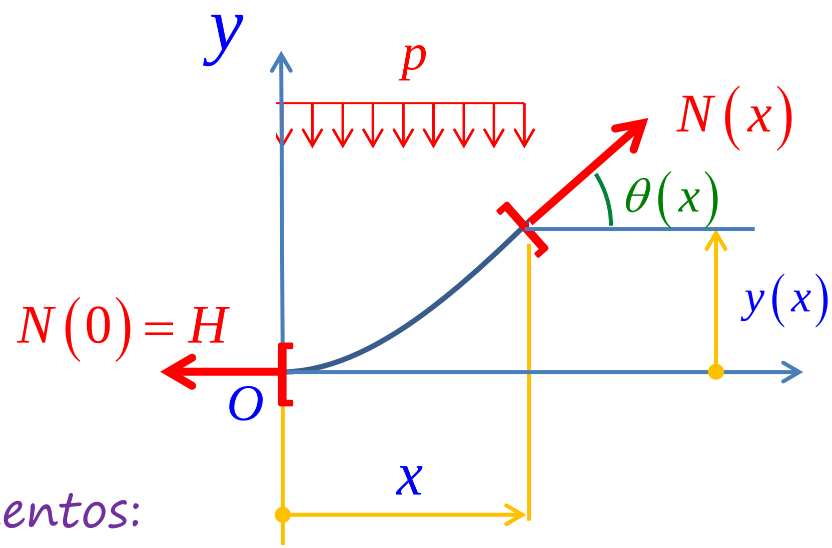



$$\sum M_{(O)} = 0 \quad \therefore \quad Hh - \frac{pL}{2}\cdot\frac{L}{2} + \frac{pL}{2}\cdot\frac{L}{4} = 0$$

$$\boxed{H = \frac{pL^2}{8h}}$$ "Fórmula do empuxo"

$$\sum F_X = -H + N(0) = 0 \quad \therefore \quad N(0) = H$$

## Cortando em uma abscissa qualquer, x>0:

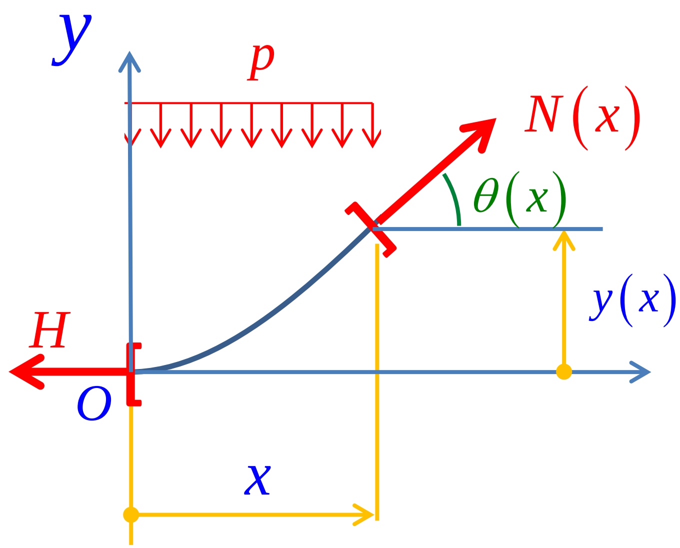



Equilíbrio de Momentos:

$$\sum M_{(\mathrm{SN}(x))} = 0 \quad \therefore \quad -Hy + px \cdot \frac{x}{2} = 0 \quad \therefore \quad y = \frac{px^2}{2H}$$

Mas $\quad H = \dfrac{pL^2}{8h} \quad$ logo $\quad \boxed{y = \left(\dfrac{4h}{L^2}\right)x^2} \quad$ Uma parábola! (CQD)

Cortando em uma abscissa qualquer, x>0:




Equilíbrio Horizontal:

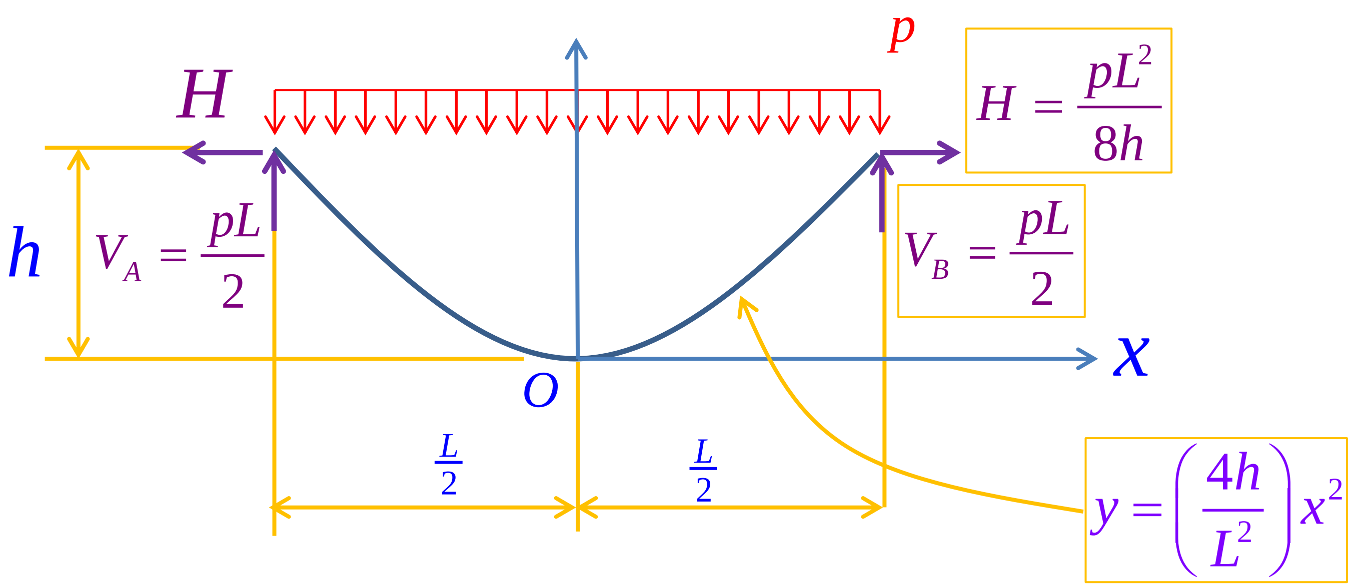
$\therefore \quad N(x)\cos\theta = H$ , constante!

$\therefore$ A componente horizontal da força no cabo parabólico é constante e igual ao empuxo!

$N(x) = \dfrac{H}{\cos\theta}$ $\therefore$ N(x) é máxima nos apoios, onde cos(θ) é mínimo

$$N_{\max} = \sqrt{H^2 + V_A^2} \qquad N_{\max} = \frac{pL}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{L}{4h}\right)^2}$$

# Em resumo, para o cabo parabólico (com apoios nivelados):




Para h=L/10 (típico): $N_{\max} = 1{,}34\, pL = 2{,}68 V_A$

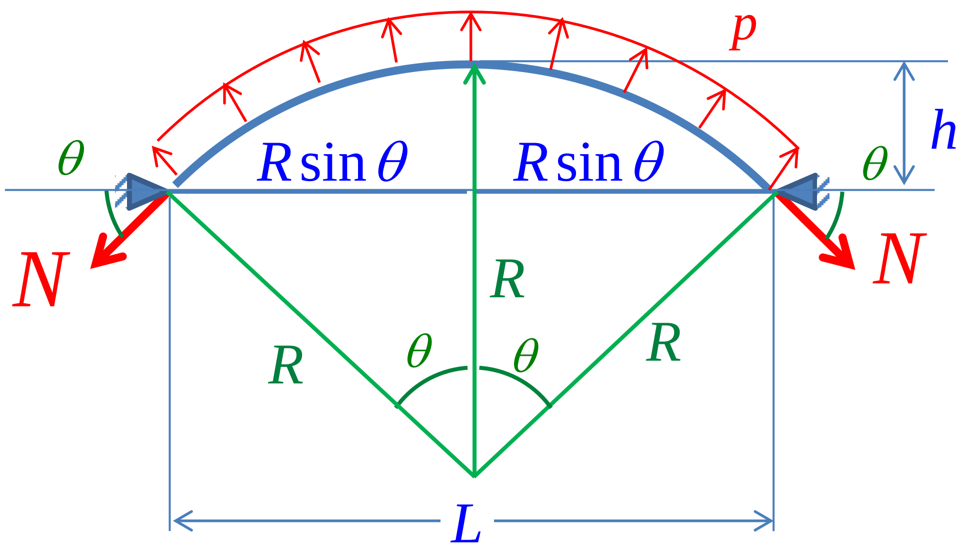
Comprimento do cabo parabólico: $\ell = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{8h\,x}{L^2}\right)^2}\, dx$

$\ell = \ell(L, h)$ tem expressão exata, mas complicada...

É útil a aproximação: $\boxed{\ell \cong L + \frac{8h^2}{3L}}$

## Cabo sujeito à pressão transversal uniforme:

"CABO CIRCULAR"




A simetria de qualquer seção exige que a curvatura seja constante!

Logo o Raio de curvatura é constante!

$$\boxed{R = \frac{L^2}{8h} + \frac{h}{2}}$$

Logo a força normal N em qualquer seção é constante!

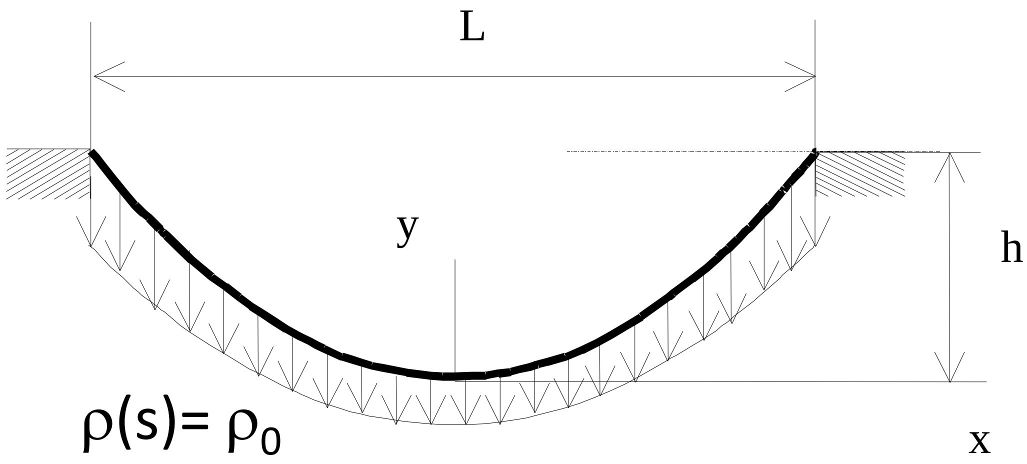
Equilíbrio vertical : $2pR\sin\theta - 2N\sin\theta = 0\,, \quad \forall\theta$

$$\boxed{N = pR}$$

Comprimento do cabo circular: $\boxed{\ell = 2R\theta}$

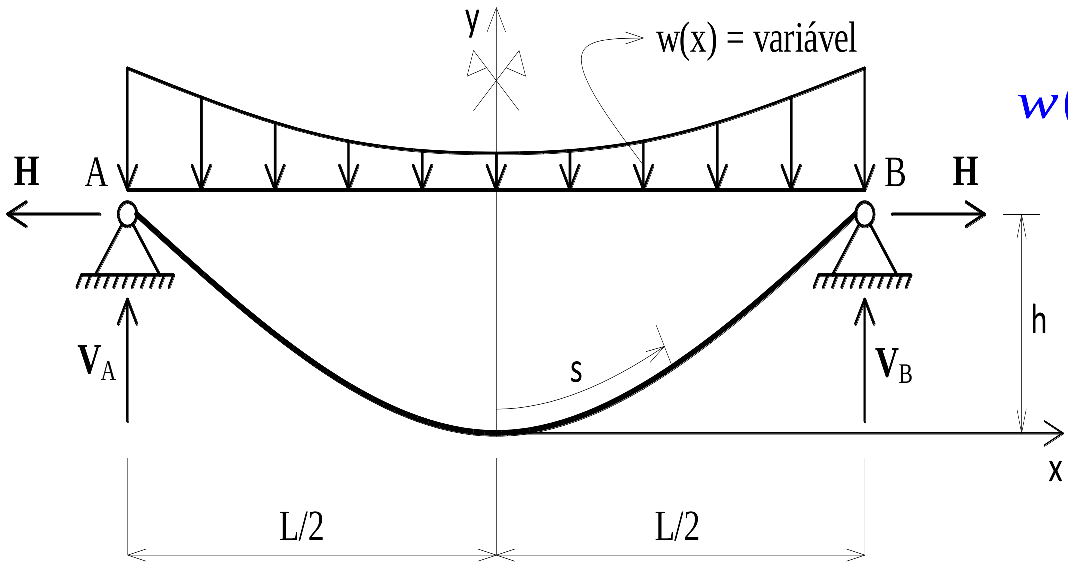
Onde: $\boxed{\cos\theta = \frac{R-h}{R}}$ Ou seja, $\boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{R-h}{R}\right)}$

# Cabo sujeito ao peso próprio: CABO CATENÁRIO




Peso próprio por unidade de comprimento (kN/m): $\rho_0$

# Cabo sujeito ao peso próprio: CABO CATENÁRIO




$$w(x) = \frac{\rho_0}{\cos\theta(x)}$$

Geometria do cabo catenário:

$$\boxed{y(x) = \frac{H}{\rho_0}\left[\cosh\frac{\rho_0}{H}x - 1\right]}$$

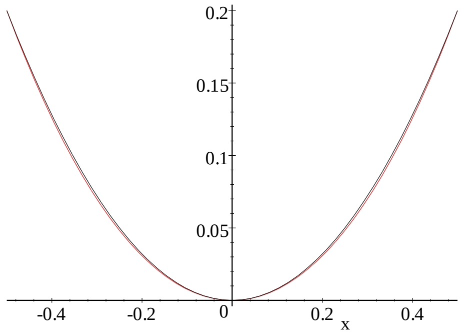
(Vide artigo "Sobre Cabos e Cordas", na página da disciplina!)

Para h<=L/10, o cabo catenário e o cabo parabólico praticamente se confundem!

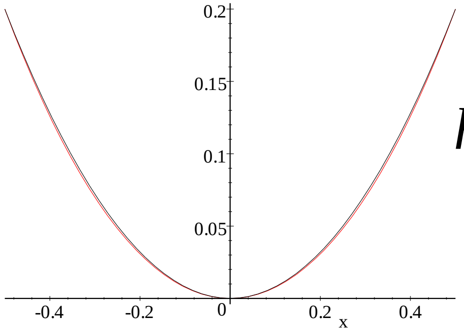
Comprimento do cabo catenário:

$$\boxed{\ell = \frac{2H}{\rho_0}\sinh\left(\frac{\rho_0 L}{2H}\right)}$$

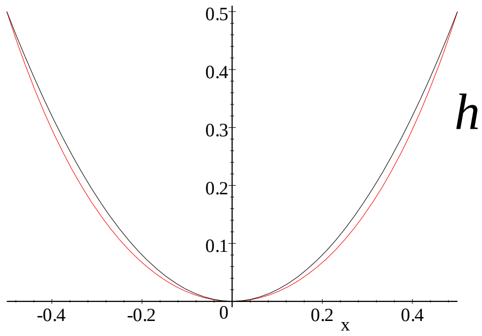
# Comparação entre a catenária e a parábola:



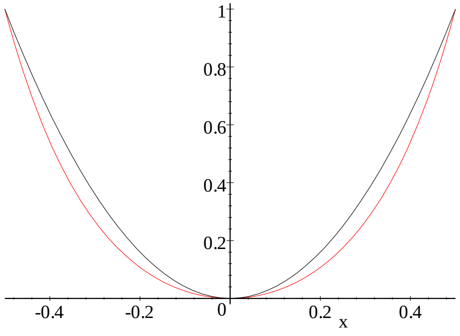

$$h = \frac{L}{5}$$




$$h = \frac{L}{3}$$



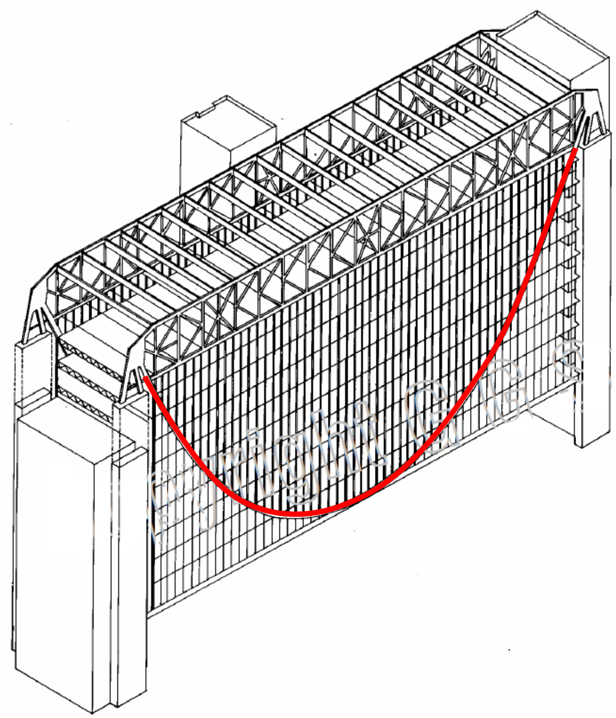

$$h = \frac{L}{2}$$

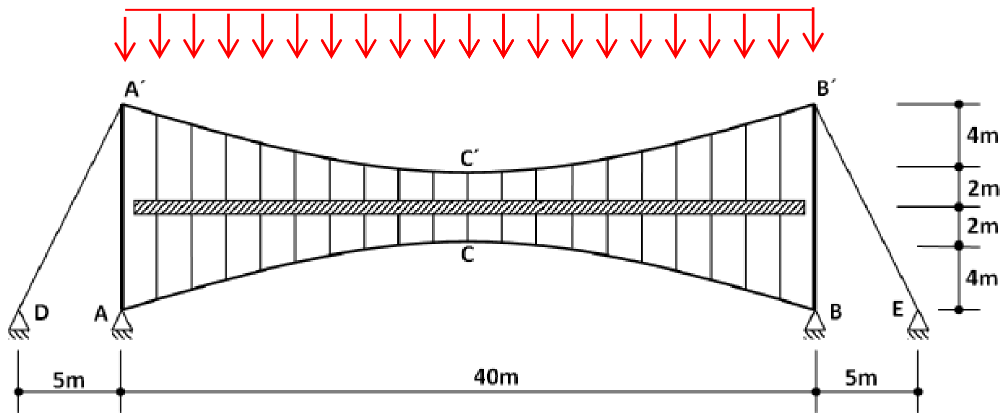


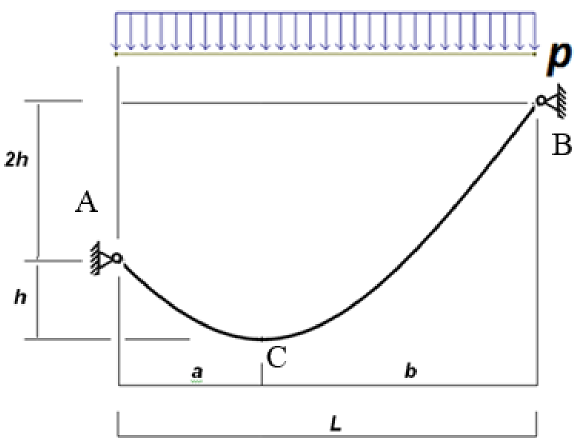

$$h = L$$

Note-se que a escala do eixo está sempre exagerada, exceto no caso h=L

Para pequenas flechas a catenária e a parábola se confundem!

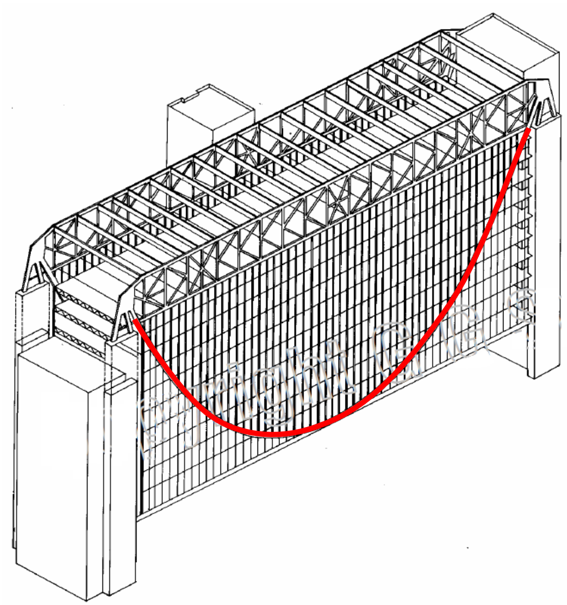


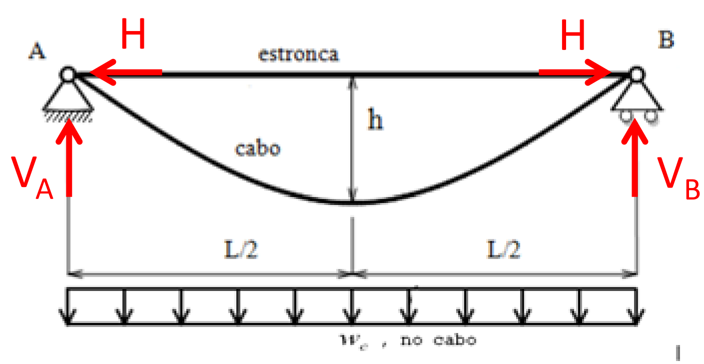

A´
B´
C´
C
D
A
B
E
4m
2m
2m
4m
5m
40m
5m

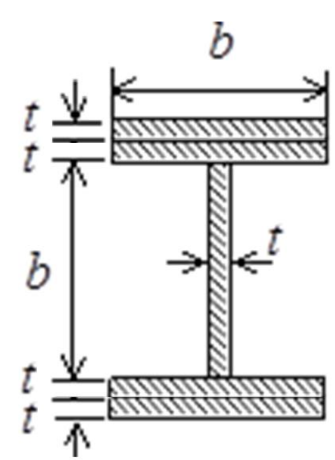

p
2h
h
A
B
C
a
b
L

Exemplo (PEF2602-P1-Q1-2010): A figura mostra o prédio do 'Federal Reserve Bank', localizado em Minneapolis, EUA. Cada um dos 11 pisos tem vão transversal de 18m, e a carga total dos pisos é transferida para dois "cabos parabólicos" (constituídos, na prática, por perfis metálicos), por meio de montantes (trabalhando à compressão, nos trechos acima dos cabos) e por tirantes (trabalhando à tração, nos trechos abaixo dos cabos). Os cabos têm vão L=84m e flecha h=30m , e são ancorados ao topo de duas torres laterais. As reações verticais das ancoragens são transferidas às torres, enquanto o empuxo é equilibrado por duas estroncas treliçadas, localizadas no topo do prédio.

- Considere uma carga total, uniformemente distribuída sobre cada um dos 11 pisos, $q=2,5\ kN/m^2$ e determine a carga w (em kN/m), uniformemente distribuída, agindo em cada um dos cabos parabólicos;
- Determine o empuxo horizontal H e as reações apoios A e B de cada cabo, indicados no modelo estrutural esquematizado abaixo;
- Determine a máxima tração $N_{max}$ em cada cabo;
- Considere que a seção transversal dos cabos seja composta por três chapas de aço de espessura t=30mm e largura b. Admitindo um coeficiente de segurança s=2 e um aço com tensão de escoamento tração $\sigma_e$=450MPa, determine a largura de chapa necessária.





$$\begin{cases} q = 2,5kN/m^2 \\ d = 18m; \quad L = 84m; \quad h = 30m \\ n = 11 \end{cases} \qquad w = n\frac{qd}{2} = 11\frac{2,5\times 18}{2} = 247,5kN/m$$

Reações de apoio

$$H_A = H$$

$$V_A = V_B = \frac{wL}{2} = \frac{247,5\times 84}{2} = 10.395,0kN$$

O empuxo do cabo é sustentado pela estronca, que trabalha comprimida, e vale

$$H = \frac{wL^2}{8h} = \frac{247,5\times 84^2}{8\times 30} = 7.276,5kN$$

A máxima força normal ocorre nos apoios e vale

$$N_{\max} = \sqrt{V_A^{\ 2} + H^2} = \sqrt{10.395^2 + 7.276,5^2} = 12.688,7kN$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A_c} \le \frac{\sigma_e}{s} \qquad A_c = 5bt \ge \frac{sN_{\max}}{\sigma_e}$$

$$b \ge \frac{sN_{\max}}{5t\sigma_e} = \frac{2\times 12.688,7\times 10^3}{5\times 30\times 10^{-3}\times 450\times 10^6} = 0,376m$$