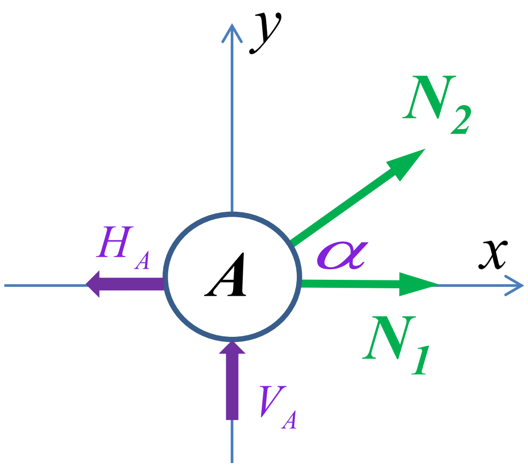
PEF2602
Estruturas na Arquitetura II - Sistemas Reticulados

Treliças– II

Professores
Ruy Marcelo Pauletti, Leila Meneghetti Valverdes, Luís A.G. Bitencourt Jr.

Regra de Maxwell para Treliças Planas



* Cada nó de uma treliça plana fornece **2** equações de equilíbrio

$$\sum_i F_x^i = 0 \qquad \sum_i F_y^i = 0$$

– Logo, sendo **n** o número de nós, tem-se um total de <u>2n equações de equilíbrio</u>;

* Cada barra treliça fornece **1** esforço solicitante, inicialmente incógnito

– Logo, sendo *b* o número de barras tem-se um total de *b* esforços incógnitos;

* Cada vínculo externo também fornece uma incógnita!

– Logo, sendo *r* o número de vínculos, tem-se um <u>total de incógnitas igual (r+b)</u>

Regra de Maxwell para Treliças Planas

* Uma condição necessária (mas não suficiente) para que uma treliça seja isostática, isto é, possa ser resolvida exclusivamente por equações de equilíbrio é que $2n = b + r$

* Se $b + r > 2n$, existe um excesso de incógnitas, e novas equações devem ser acrescentadas para a resolução do problema – a treliça é hiperestática!

* Se $b + r < 2n$, existe uma carência de vínculos (internos e externos), e a treliça é hipostática (apresenta movimentos de corpo rígido ou mecanismos!)

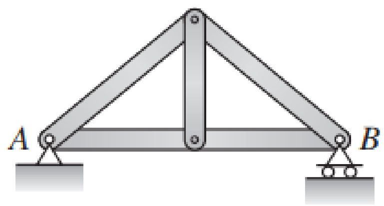
- Rearranjando e resumindo:

Regra de Maxwell
(para treliças planas):

$$2n - b \begin{cases} < r & \therefore \text{ treliça hiperestática} \\ = r & \therefore \text{ treliça isostática} \\ > r & \therefore \text{ treliça hipostática} \end{cases}$$

- Observa-se que a regra de Maxwell apresenta condições necessárias, mas não suficientes, para os casos de treliças isostáticas ou hiperestáticas, pois o arranjo das barras e vínculos pode ser deficiente!

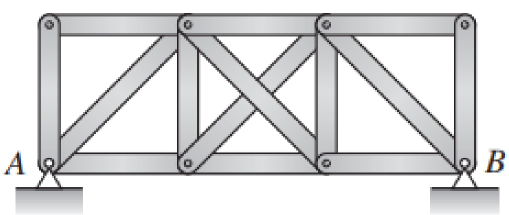
<u>Exercício</u>. Determine o grau de estaticidade das treliças esquematizadas a seguir.
(Adaptado de *Leet et al., Fundamentos da análise Estrutural, 3ª Edição, McGraw-Hill, 2009*).



(*a*)

$$2n - b = 2 \times 4 - 5 = 3$$
$$r = 3$$

$\therefore$ treliça isostática

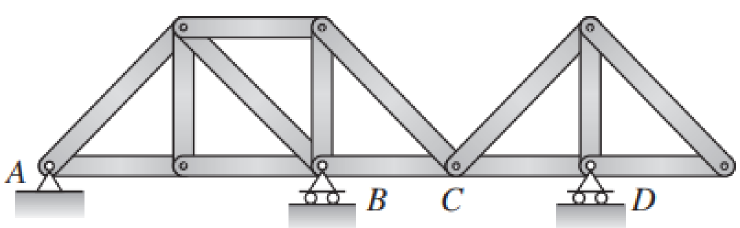


(*b*)

$$2n - b = 2 \times 8 - 14 = 2$$
$$r = 4$$

$\therefore$ treliça 2 vezes hiperestática

(1 grau de hiperestaticidade interna
+ 1 grau de hiperestaticidade externa)



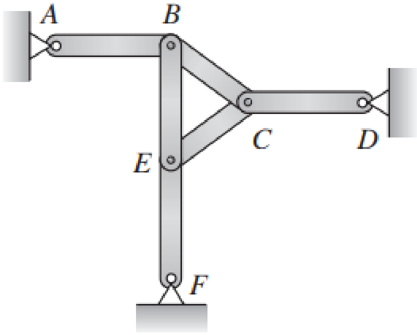
(*c*)

$$2n - b = 2 \times 9 - 14 = 4$$
$$r = 4$$

$\therefore$ treliça isostática

Regra de Maxwell para Treliças Planas

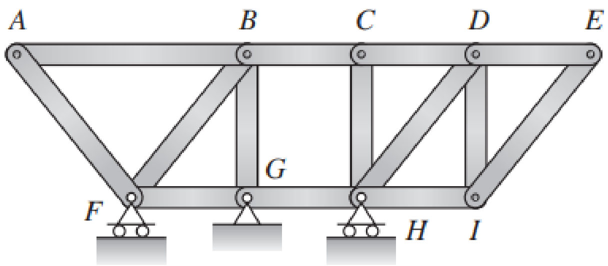
Exercício. Determine o grau de estaticidade das treliças esquematizadas a seguir.
(Adaptado de *Leet et al., Fundamentos da análise Estrutural, 3ª Edição, McGraw-Hill, 2009*).
Consulte respostas comentadas nessa referencia!



(d)

$$2n-b=2\times 6-6=6$$

$$r=3\times 2=6 \qquad \therefore \quad \text{treliça isostática}$$

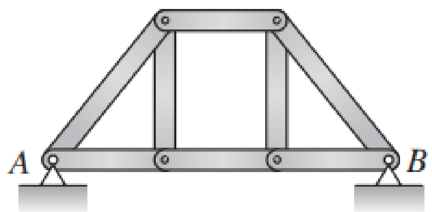


(e)

$$2n-b=2\times 9-14=4$$

$$r=1+2+1=4 \qquad \therefore \quad \text{treliça isostática}$$

<u>Exercício</u>. Determine o grau de estaticidade das treliças esquematizadas a seguir.
(Adaptado de *Leet et al., Fundamentos da análise Estrutural*, 3ª Edição, McGraw-Hill, 2009).
<u>*Consulte respostas comentadas nessa referencia!*</u>

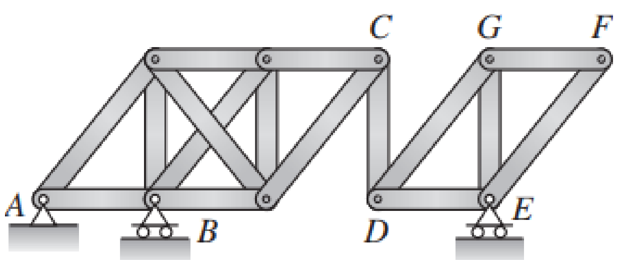


(*f*)

$$2n - b = 2 \times 6 - 8 = 4$$

$$r = 2 + 2 = 4$$

$\therefore$ a treliça atende a Regra de Maxwell, e parece isostática, mas apresenta um mecanismo infinitesimal, que a torma indeterminada para pequenos deslocamentos...



(*g*)

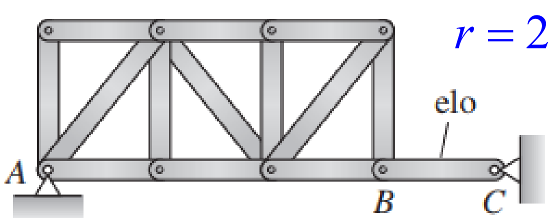
$$2n - b = 2 \times 10 - 16 = 4$$

$$r = 2 + 1 + 1 = 4$$

$\therefore$ a treliça atende a Regra de Maxwell, mas apresenta um mecanismo, que a torma 1 vez internamente hipostática.

$$2n - b = 2 \times 9 - 14 = 4$$

$$r = 2 + 2 = 4$$

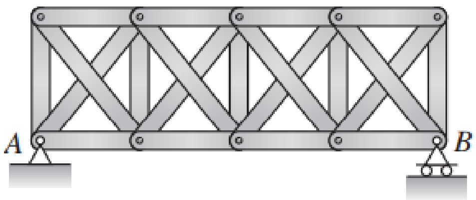


(*h*)

$\therefore$ a treliça atende a Regra de Maxwell, e parece isostática, mas apresenta um mecanismo infinitesimal, que a torma indeterminada para pequenos deslocamentos...

Regra de Maxwell para Treliças Planas

<u>Exercício</u>. Determine o grau de estaticidade das treliças esquematizadas a seguir.
(Adaptado de *Leet et al., Fundamentos da análise Estrutural*, 3ª Edição, McGraw-Hill, 2009).
<u>*Consulte respostas comentadas nessa referência!*</u>

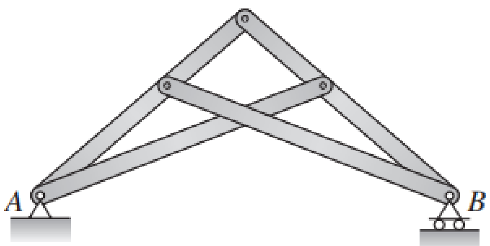


(*i*)

$$2n - b = 2 \times 10 - 21 = -1$$

$$r = 2 + 1 = 3$$

$\therefore$ treliça quatro vezes internamente hiperestática, mas externamente isostática.

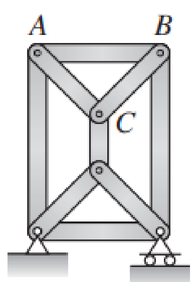


(*j*)

$$2n - b = 2 \times 5 - 6 = 4$$

$$r = 2 + 1 = 3$$

$\therefore$ treliça uma vez hipostática



(*k*)

$$2n - b = 2 \times 6 - 9 = 3$$

$$r = 2 + 1 = 3$$

$\therefore$ a treliça atende a Regra de Maxwell, e parece isostática, mas apresenta um mecanismo infinitesimal, que a torma indeterminada para pequenos deslocamentos...

PEF 2602 – TRELIÇAS ISOSTÁTICAS

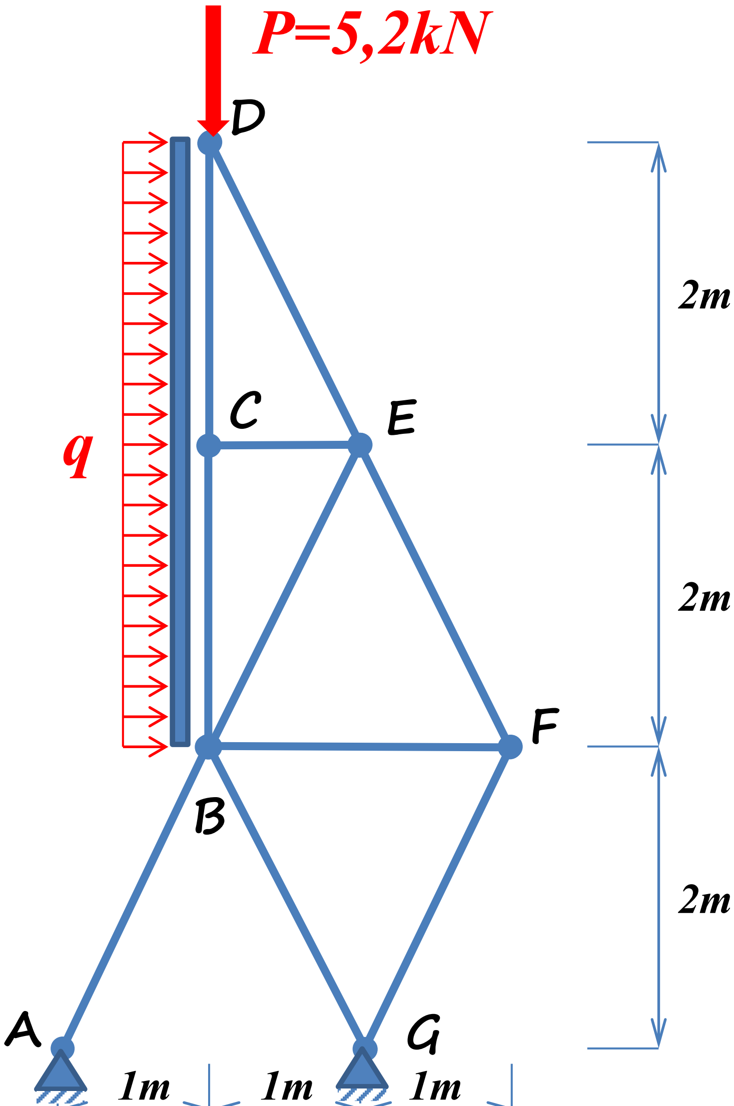
<u>Exemplo 1:</u>

Um painel sujeito a uma pressão de vento p=1,0kN/m² é suportado por treliças como as da figura ao lado, espaçadas de b=2,6m.

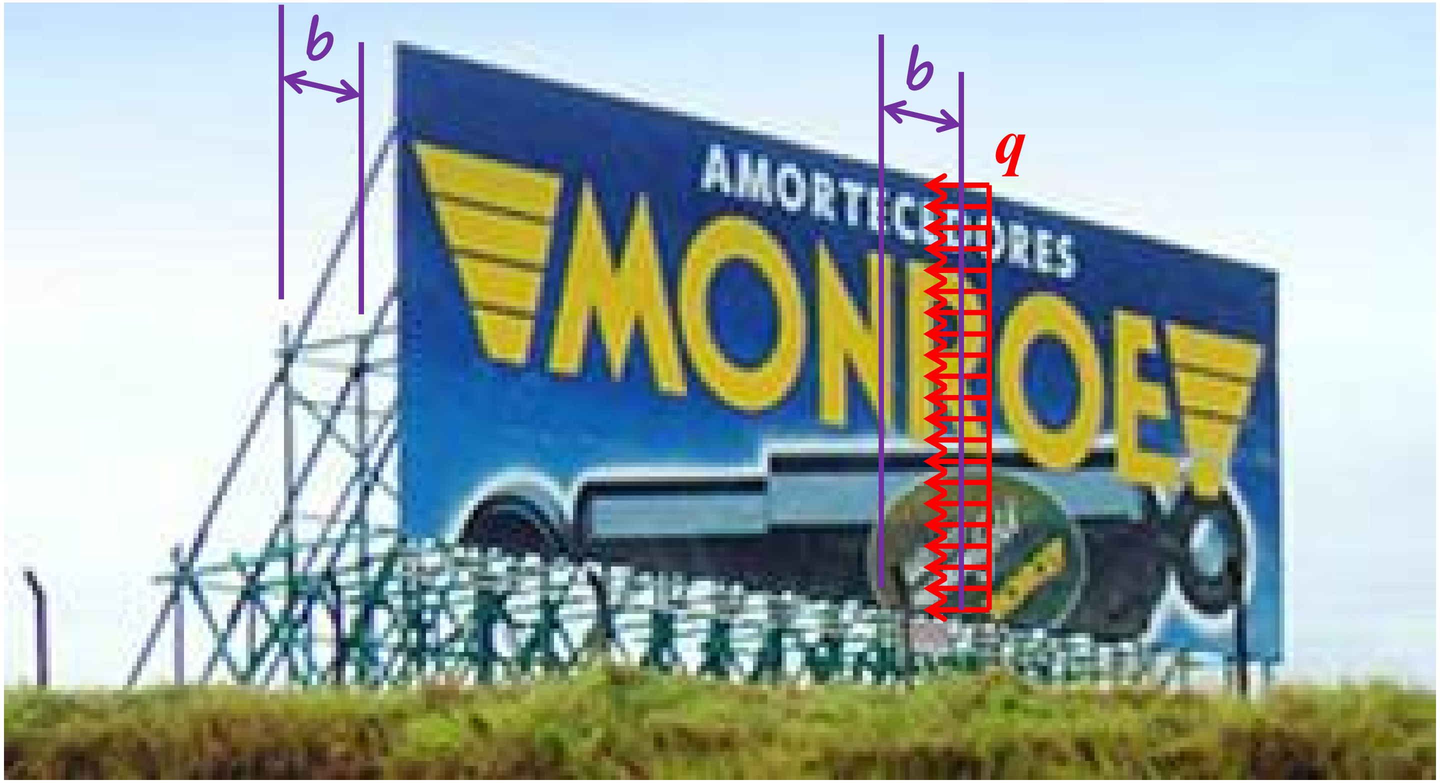
Dimensionar as barras da treliça, considerando uma única seção transversal, e admitindo que as cargas de vento (horizontais) possam agir em ambas as direções. Adote:

$$\sigma_e = 250MPa \qquad s_\sigma = 1{,}25$$

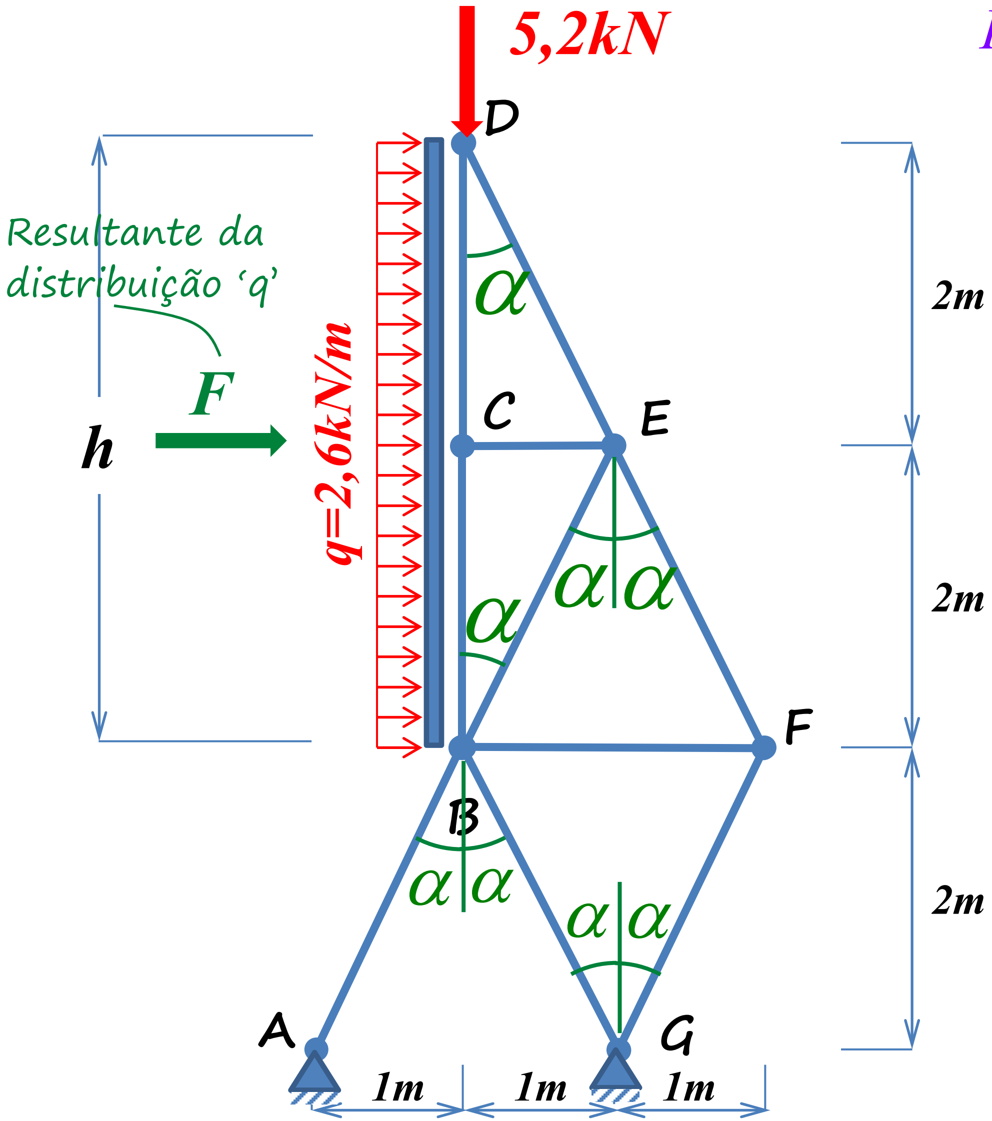
$$E = 210GPa \qquad s_{fl} = 2{,}0$$



Faixa de influência e carregamento linearmente distribuído:



$$q = p \times b = 1{,}0\frac{kN}{m^2} \times 2{,}6m = 2{,}6\frac{kN}{m}$$



$$F = q \times h = 2,6\frac{kN}{m} \times 4m = 10,4kN$$

Devemos considerar dois casos:

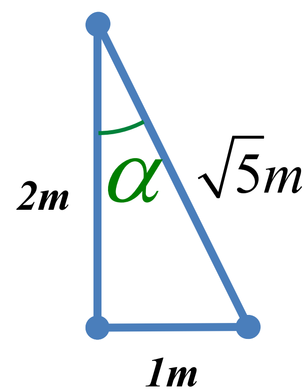
(A) Vento da esquerda para a direita

F=10,4kN (➔)

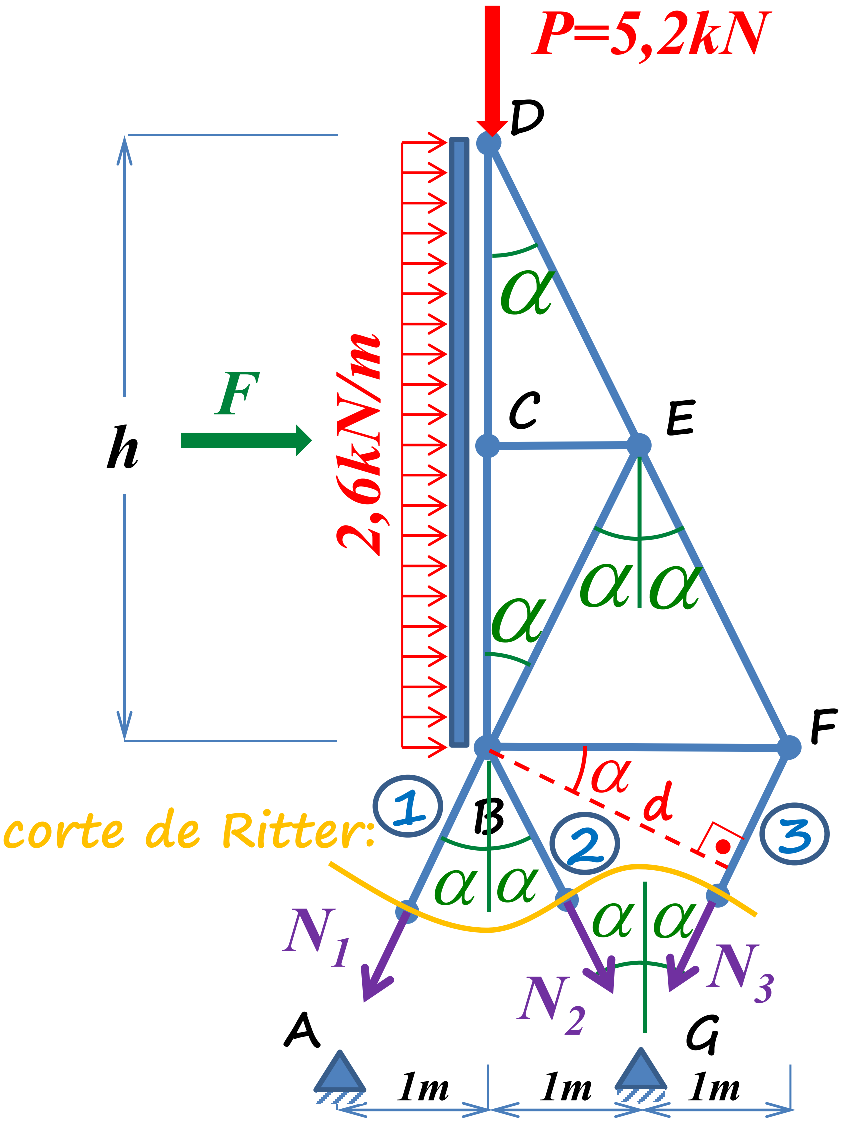
(B) Vento da direita para a esquerda

F=-10,4kN (🡐)

Reconhecemos um ângulo **α**:



$$\begin{cases} \sin\alpha = 1/\sqrt{5} \\ \cos\alpha = 2/\sqrt{5} \end{cases}$$



Por inspeção, percebe-se que as barras mais solicitadas são as barras da base da treliça!

Fazemos um corte de Ritter por estas barras!

<u>Consideremos o caso (A):</u>

F=10,4kN (➔)

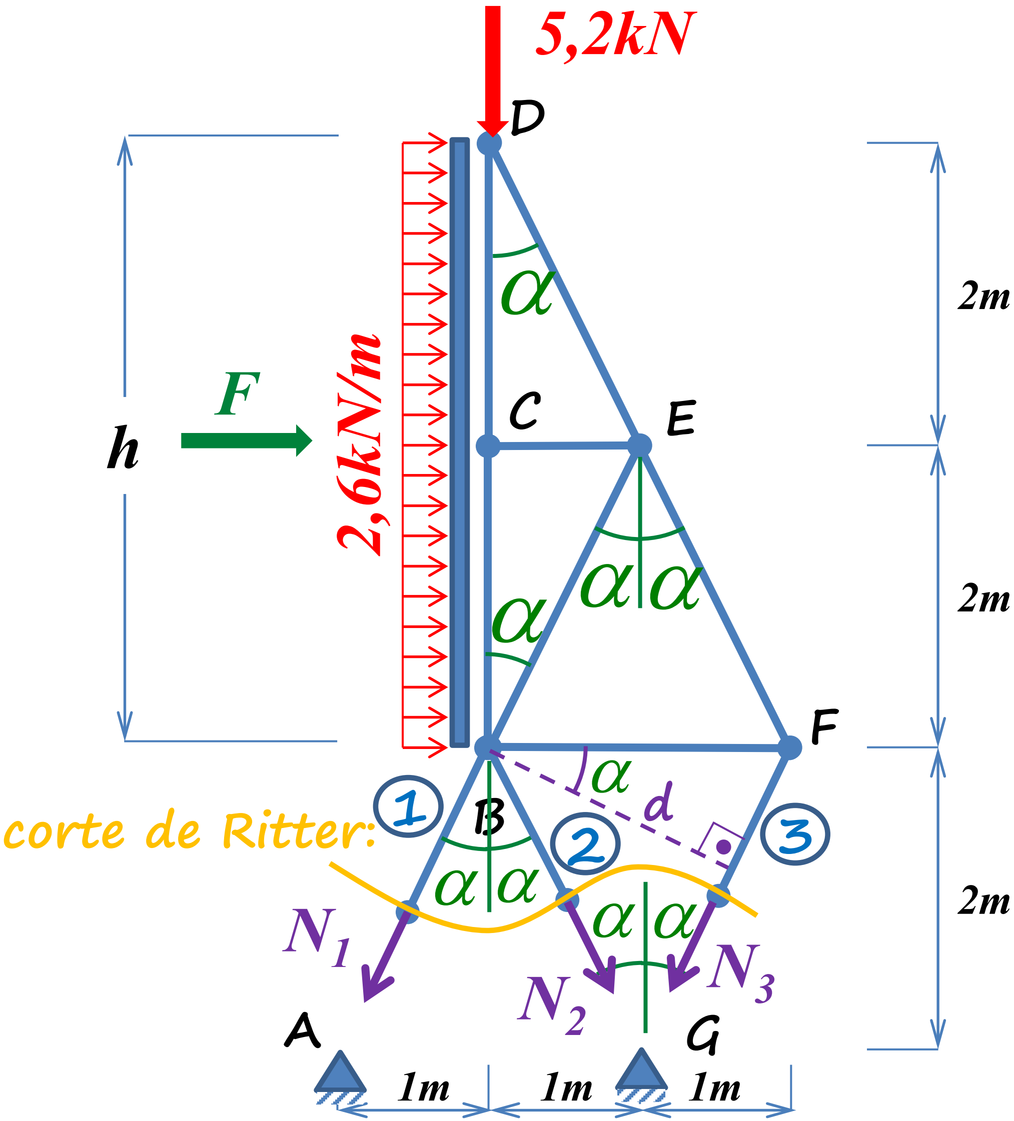
$$\sum M_{(G)} = 0$$

$$\sum M_{(G)} = N_1 d + P \times 1 - F \times 4 = 0$$

$$d = 2 \times \cos\alpha = 2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 1{,}78885m$$

$$N_1 = \frac{4F - P}{d} = \frac{4 \times 10{,}4 - 5{,}2}{1{,}78885} = 20{,}348\,\text{kN}$$

(tração!)



$$\sum M_{(B)} = -N_3 d - F \times 2 = 0$$

$$N_3 = -\frac{2F}{d} = -\frac{2 \times 10,4}{1,78885}$$

$$N_3 = -11,628\,\mathrm{kN}$$

(compressão!)

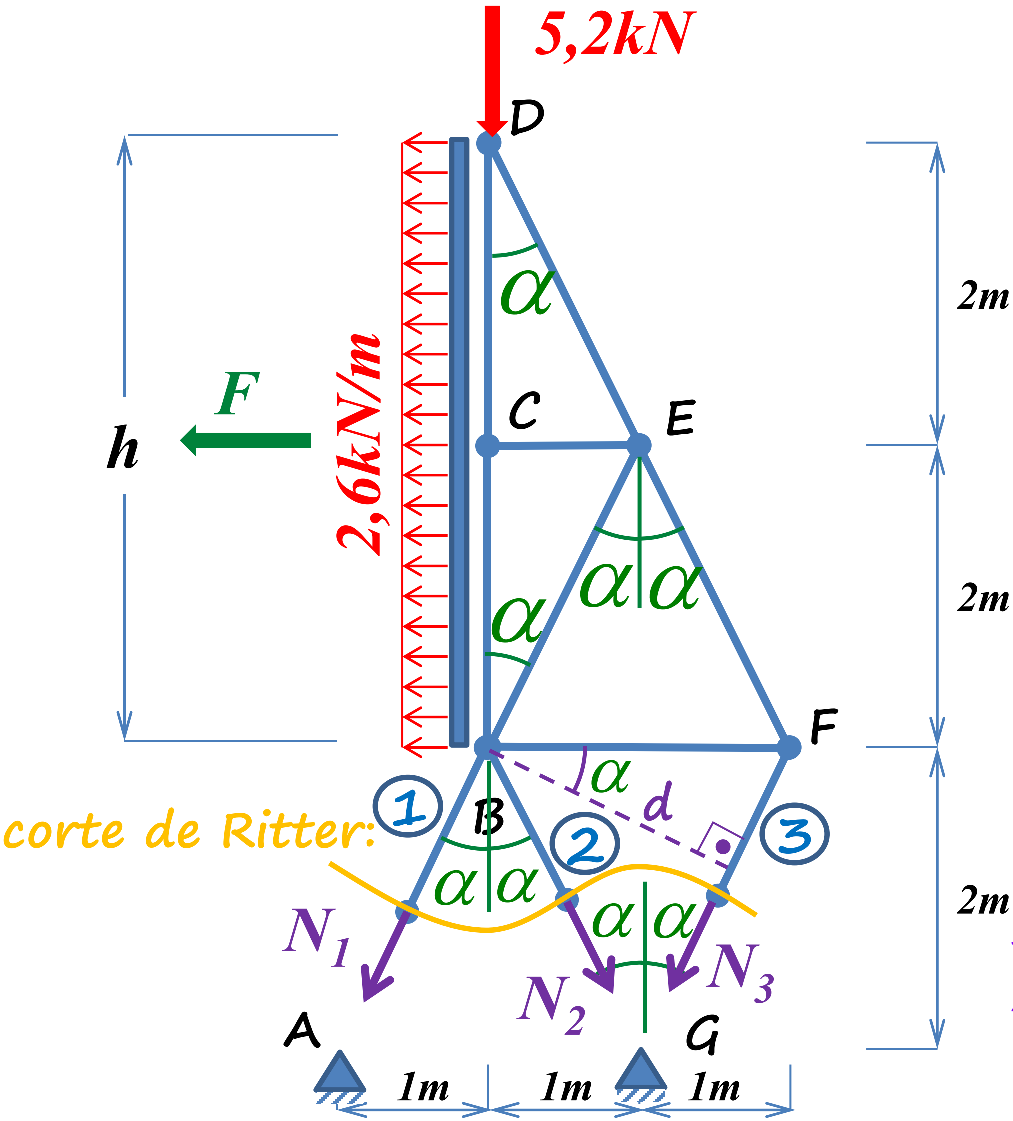
$$\sum M_{(F)} = N_1 d + N_2 d - F \times 2 + P \times 2 = 0$$

$$N_2 = \frac{-N_1 d + 2F - 2P}{d}$$

$$N_2 = \frac{-20,348 \times 1,78885 + 2 \times 10,4 - 2 \times 5,2}{1,78885} = -14,534kN$$

(compressão!)

Consideremos o caso (B): F=10,4kN (🡐)



$$\sum M_{(G)} = N_1 d + P\times 1 + F\times 4 = 0$$

$$N_1 = \frac{-4\times 10,4 - 5,2}{1,78885} = -26,162\,\text{kN}$$

$$\sum M_{(B)} = -N_3 d + F\times 2 = 0$$

$$N_3 = \frac{2F}{d} = \frac{2\times 10,4}{1,78885} = 11,628\,\text{kN}$$

(tração!)

$$\sum M_{(F)} = N_1 d + N_2 d + F\times 2 + P\times 2 = 0$$

$$N_2 = \frac{26,162\times 1,78885 - 2\times 10,4 - 2\times 5,2}{1,78885} = +8,72kN$$

Em resumo:

[kN]	(A)	(B)
N_1	+20,348	**-26,162**
N_2	-11,628	+11,628
N_3	-14,534	+8,720

Considerando uma única seção transversal, a condição determinante para o dimensionamento é o da barra (1), no caso (B):

1º Critério: Tensão Normal:

$$\left|\sigma_{\max}\right| = \frac{\left|N^c_{\max}\right|}{A} \leq \frac{\sigma_e}{s_\sigma}$$

$$A \geq \frac{s_\sigma \left|N^c_{\max}\right|}{\sigma_e}$$

$$A \geq \frac{1,25 \times 26,162 \times 10^3}{250 \times 10^6} = 1,31 \times 10^{-4}\, m^2$$

$$\boxed{A \geq 1,31\, cm^2}$$

Em resumo:

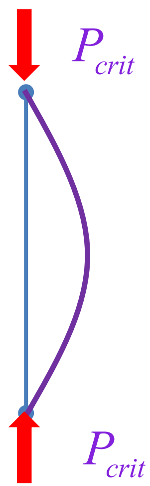
[kN]	(A)	(B)
N_1	+20,348	**-26,162**
N_2	-11,628	+11,628
N_3	-14,534	+8,720

Considerando uma única seção transversal, a condição determinante para o dimensionamento é o da barra (1), no caso (B):

2º Critério: Estabilidade

$$\left|N_{\max}^{c}\right| \leq \frac{1}{s_{fl}} \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

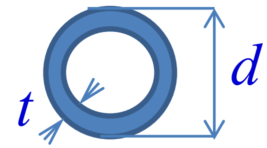
$$\boxed{I \geq \frac{s_{fl}\,\ell^2 \left|N_{\max}^{c}\right|}{\pi^2 E}}$$



$$I \geq \frac{2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 \times 26{,}162 \times 10^3}{\pi^2 \times 210 \times 10^9} = 1{,}26 \times 10^{-7}\, m^4$$

$$\boxed{I \geq 12{,}6\ cm^4}$$

Escolha de um perfil comercial:



$$\boxed{A \geq 1{,}31\ cm^2}$$

$$\boxed{I \geq 12{,}6\ cm^4}$$

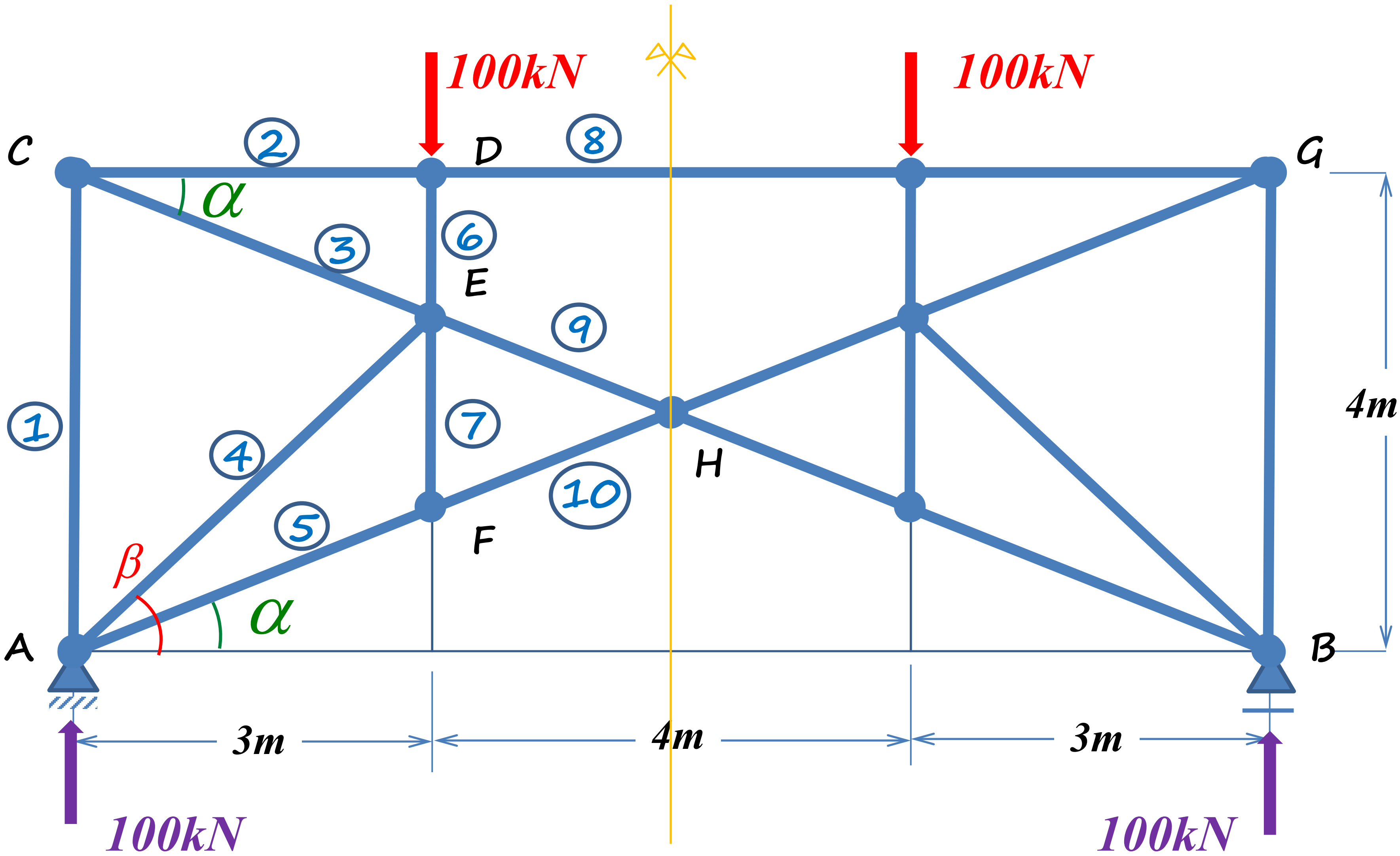
Perfis MSH com seção circular

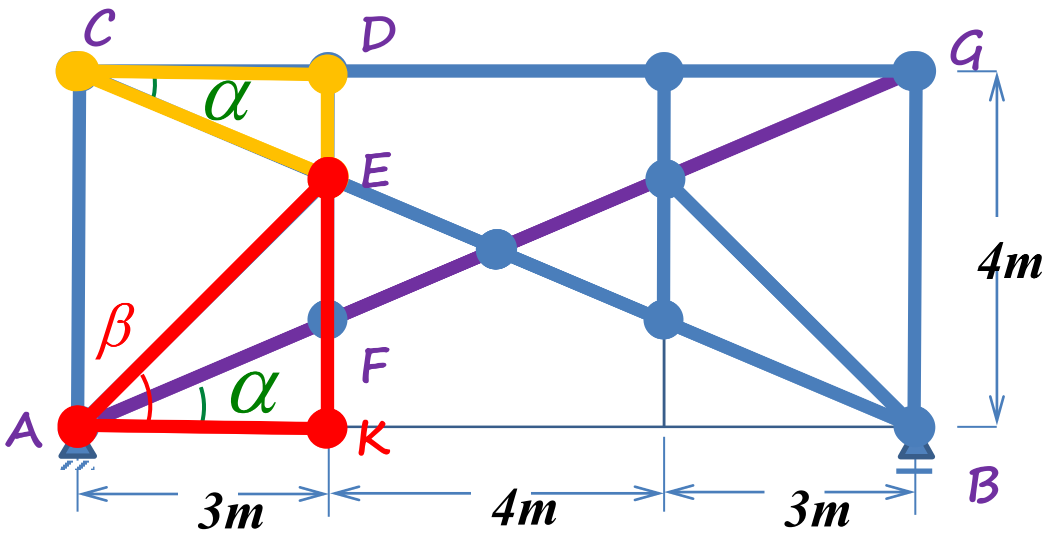
Diâmetro externo	Espessura da parede	Massa linear	Superfície de corte transversal	Segundo momento da superfície
D	T	M	A	I
mm	mm	kg/m	cm^2	cm^4
21,3	2,3	1,08	1,37	0,629
	2,6	1,20	1,53	0,681
	2,9	1,32	1,68	0,727
	3,2	1,43	1,82	0,768

Perfis MSH com seção circular

Diâmetro externo	Espessura da parede	Massa linear	Superfície de corte transversal	Segundo momento da superfície
D	T	M	A	I
mm	mm	kg/m	cm^2	cm^4
42,4	2,9	2,82	3,60	7,06
	3,2	3,09	3,94	7,62
	3,6	3,44	4,39	8,33
	4,0	3,79	4,83	8,99
	4,5	4,21	5,36	9,76
	5,0	4,61	5,87	10,5
	5,6	5,08	6,47	11,2
	6,3	5,61	7,14	12,0
	7,1	6,18	7,87	12,8
	8,0	6,79	8,65	13,5
48,3	2,9	3,25	4,14	10,7
	3,2	3,56	4,53	11,6
	3,6	3,97	5,06	12,7
	4,0	4,37	5,57	13,8

Exemplo 2:


100kN
100kN
C
D
G
2
8
α
3
6
E
9
1
4
7
H
10
5
F
β
α
A
B
4m
3m
4m
3m
100kN
100kN



$$\overline{AG} = \sqrt{10^2 + 4^2} = 10,7703m$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BG}}{\overline{AG}} = \frac{4}{10,7703} = 0,3714$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{10}{10,7703} = 0,9285$$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,3714}{0,9285} = 0,4$$

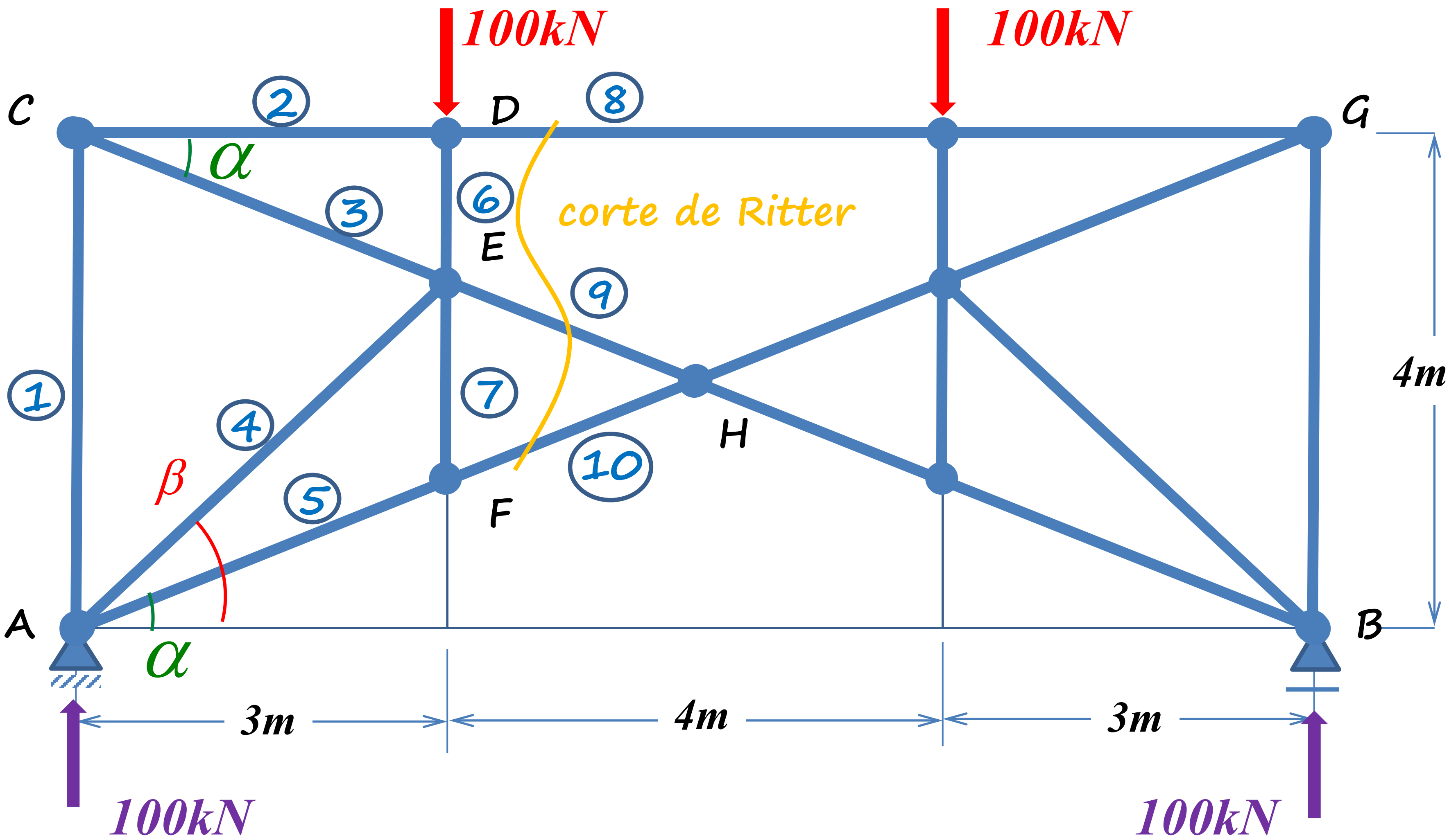
$$\overline{DE} = \overline{CD}\tan\alpha = 0,4 \times 3 = 1,2m$$

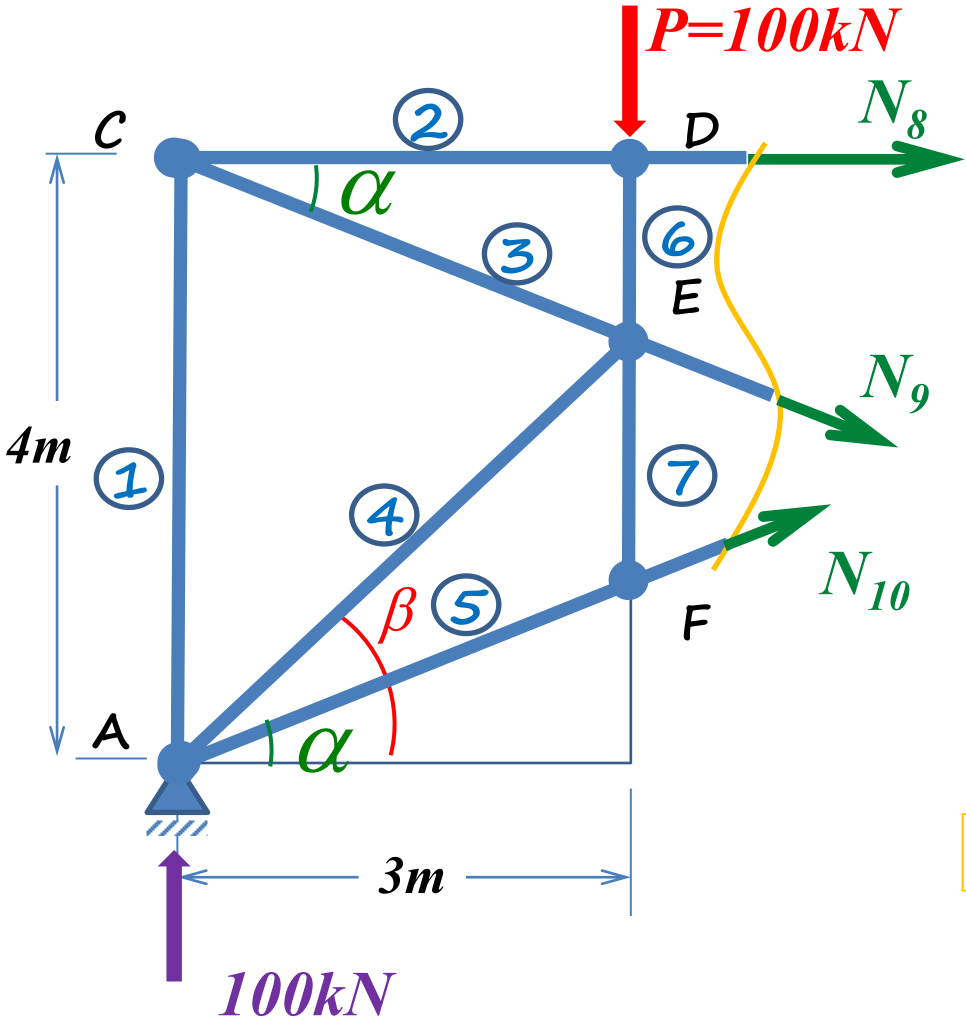
$$\overline{EK} = \overline{AC} - \overline{DE} = 4 - 1,2 = 2,8m$$

$$\overline{AE} = \sqrt{\overline{AK}^2 + \overline{EK}^2} = \sqrt{3^2 + 2,8^2} = 4,10366m$$

$$\sin\beta = \frac{\overline{EK}}{\overline{AE}} = \frac{2,8}{4,10366} = 0,6823$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{AK}}{\overline{AE}} = \frac{3}{4,10366} = 0,7310$$


100kN
100kN
C
2
D
8
G
α
3
6
E
corte de Ritter
9
4m
1
4
7
H
10
β
5
F
A
B
α
3m
4m
3m
100kN
100kN



$$\sum M_{(C)} = \left(N_{10}\cos\alpha\right)\times\overline{AC} - P\times\overline{CD} = 0$$

$$\left(N_{10}\times 0{,}9285\right)\times 4 - 100\times 3 = 0$$

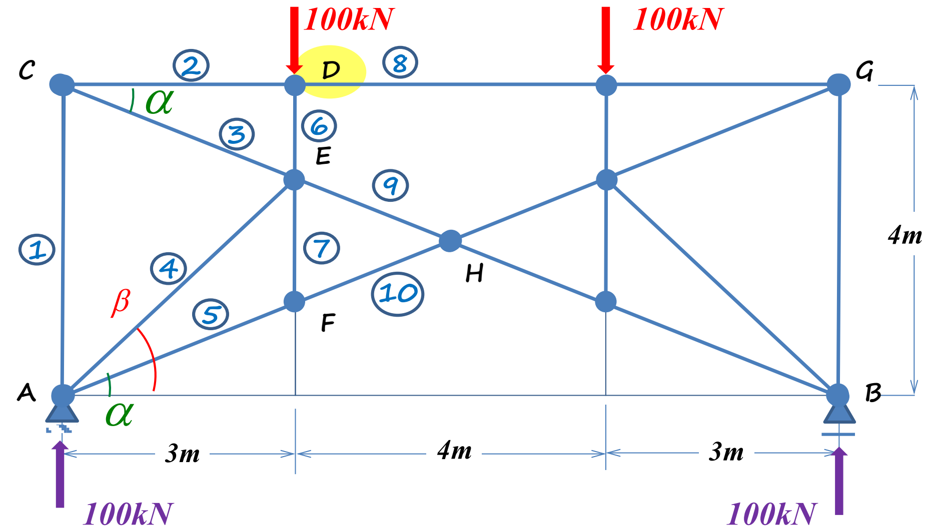
$$\boxed{N_{10} = 80{,}7764kN}$$

$$\sum F_Y = N_{10}\sin\alpha - N_9\sin\alpha - P + V_A = 0$$

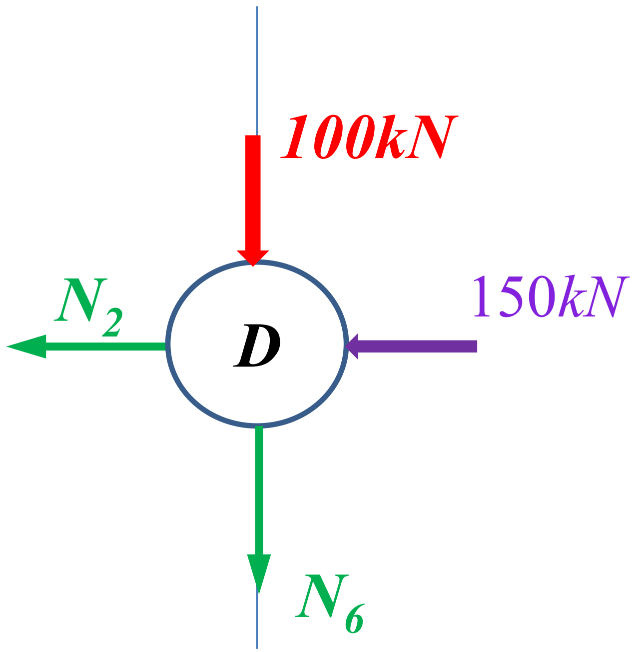
$$\boxed{N_9 = N_{10}}$$

$$\sum F_X = N_8 + N_{10}\cos\alpha + N_9\cos\alpha = 0$$

$$\boxed{N_8 = -2\times\left(80{,}7764\times 0{,}9285\right) = -150kN}$$

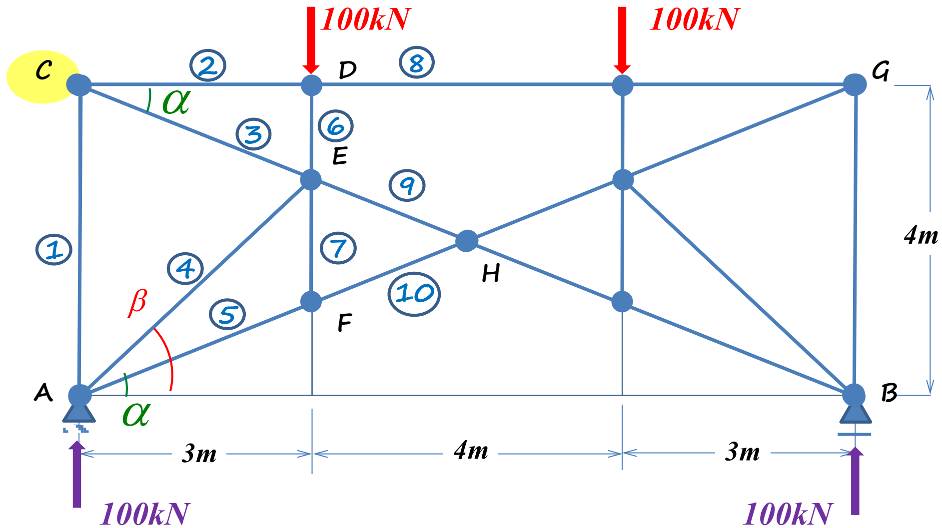


Equilíbrio Nó D:

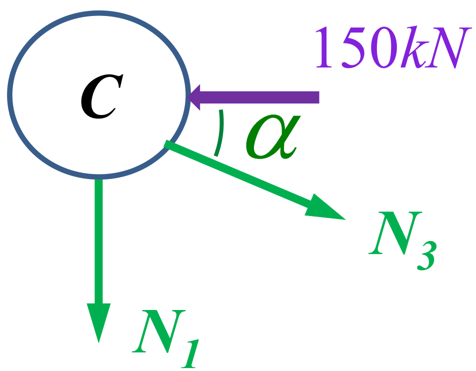


$$N_2 = -150kN$$

$$N_6 = -100kN$$



Equilíbrio Nó C:

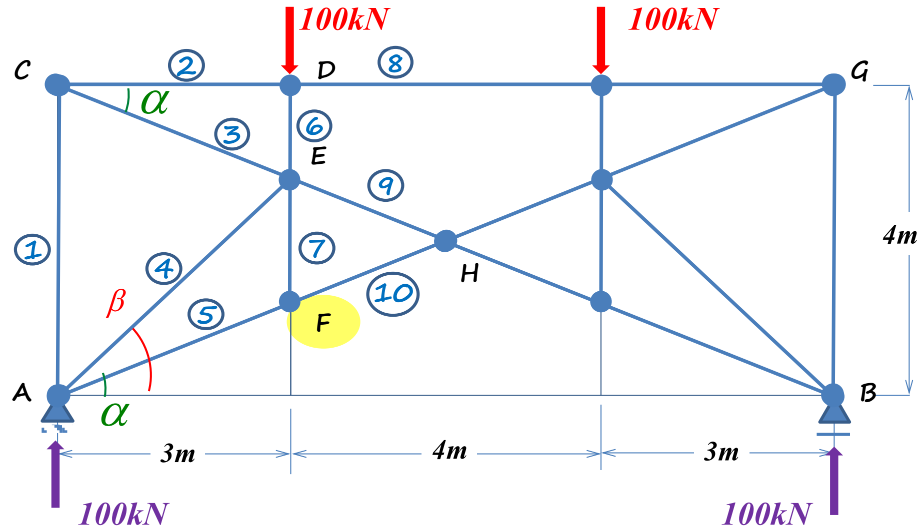


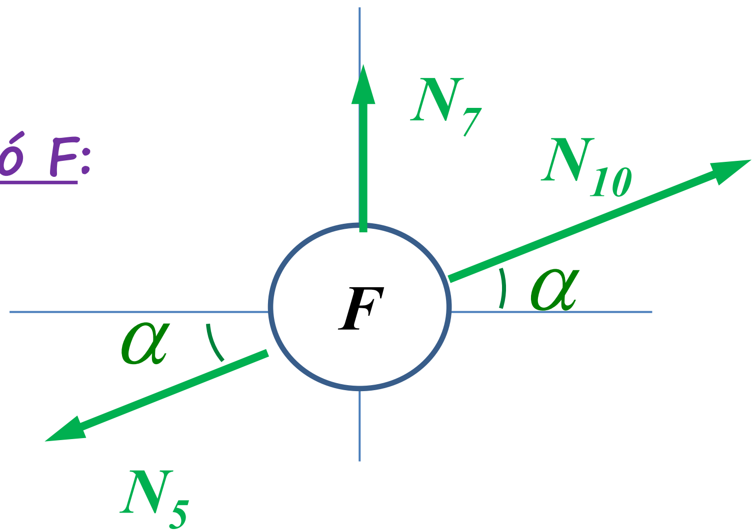
$$\sum F_X = N_3 \cos\alpha - 150 = 0$$

$$N_3 = \frac{150}{0,9285} = 161,55kN$$

$$\sum F_Y = -N_1 - N_3 \sin\alpha = 0$$

$$N_1 = -N_3 \sin\alpha = -161,55 \times 0,3714 = -60kN$$

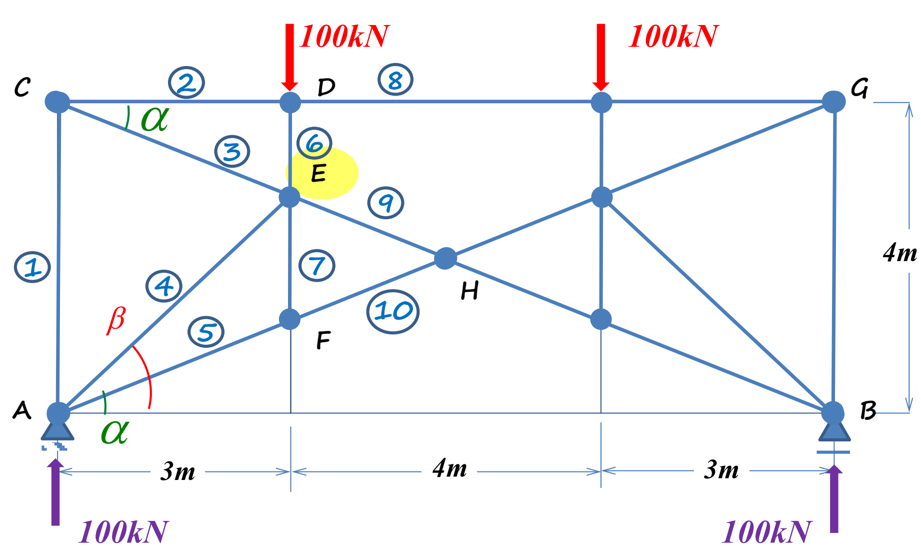




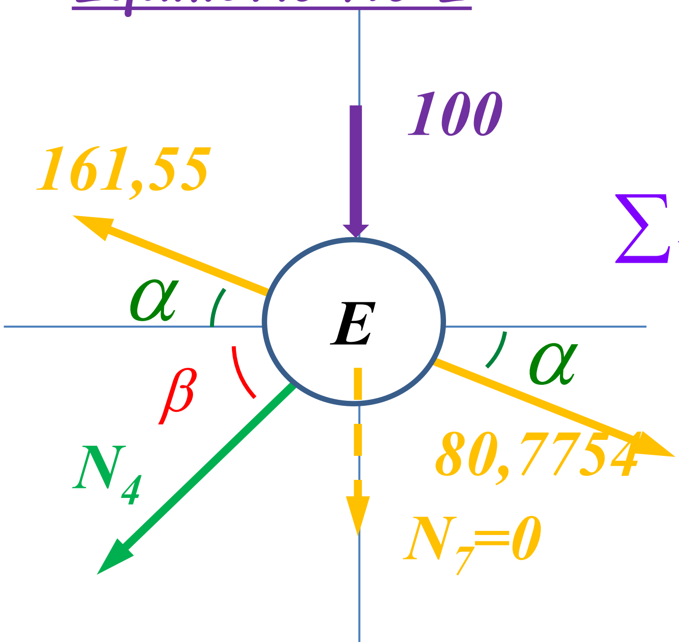
Equilíbrio Nó F:

$$N_5 = N_{10} = 80,7154kN$$

$$N_7 = 0$$

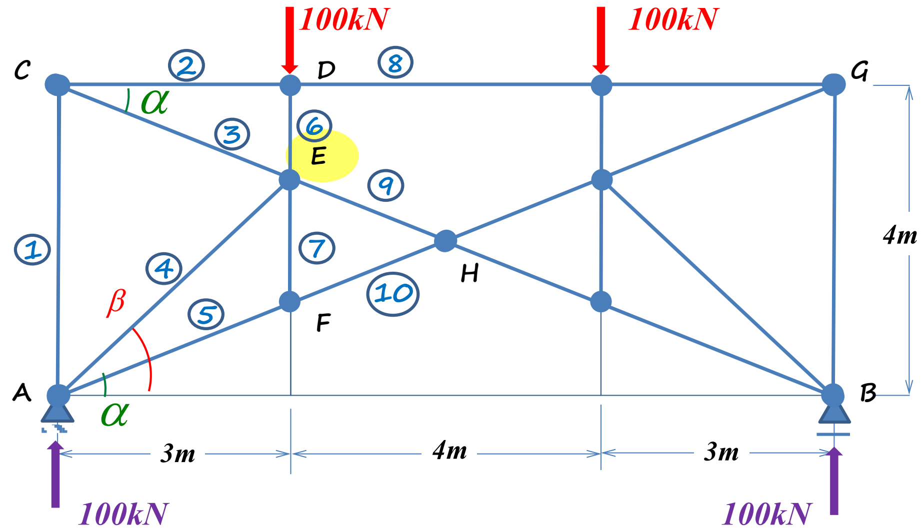


Equilíbrio Nó E:

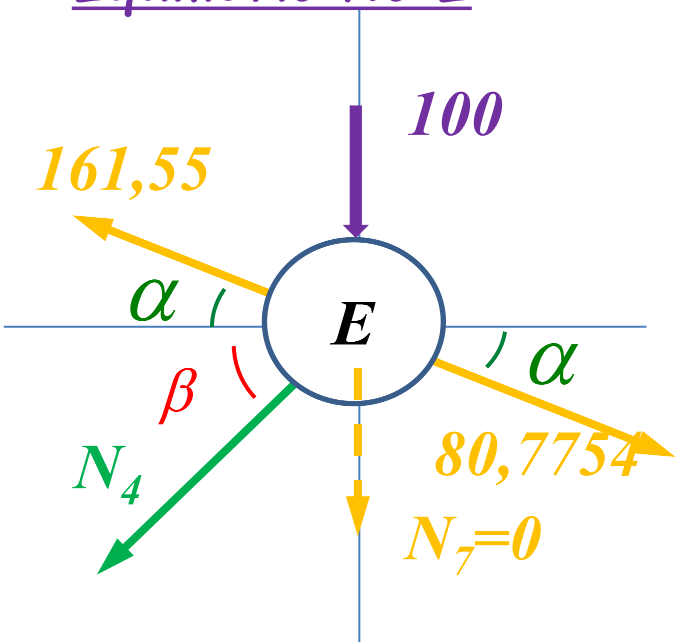


$$\sum F_X = -N_4 \cos\beta - 161{,}509 \cos\alpha + 80{,}7754 \cos\alpha = 0$$

$$N_4 = \frac{(-161{,}55 + 80{,}7754) \times 0{,}9285}{0{,}7310} = -102{,}6kN$$



Equilíbrio Nó E:

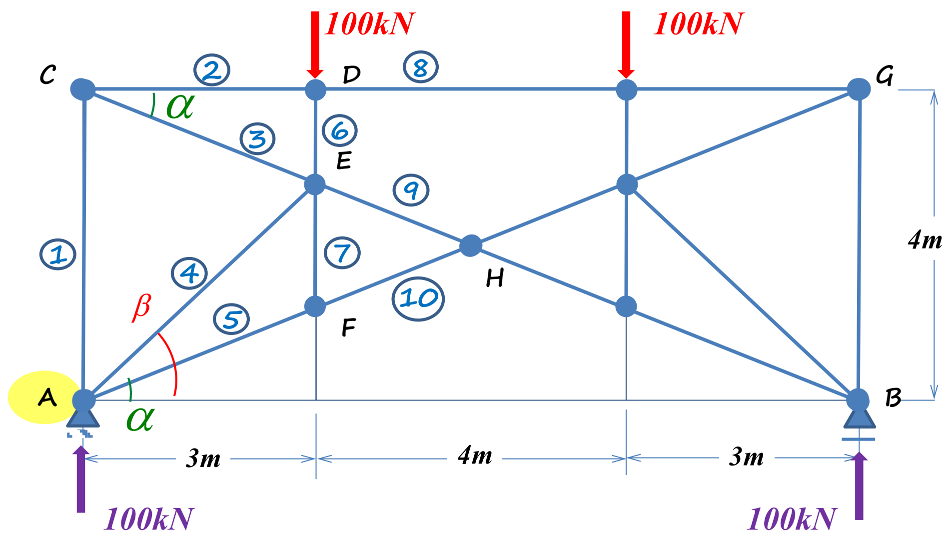


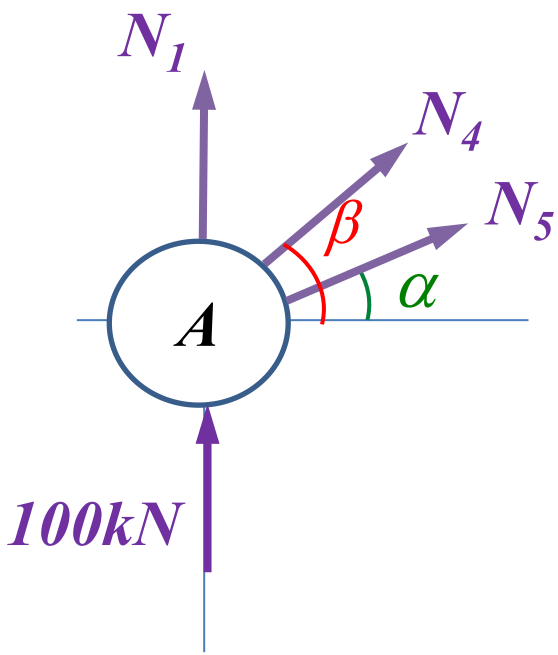
Nota: Equilíbrio vertical do nó E serve como verificação:

$$\sum F_Y = -N_4 \sin\beta - 100 + 161{,}509 \sin\alpha - 80{,}7754 \sin\alpha = 0$$

$$N_4 = \frac{-100 + (161{,}55 - 80{,}7754) \times 0{,}3714}{0{,}6823} = -102{,}6kN$$

OK!





Nota: Equilíbrio do nó A serve como verificação!