Nome:

Número USP:

Desafio I

Apesar de seu enorme sucesso, a teoria da gravitação de Newton com potencial $V \propto -\frac{1}{r}$ falha ao tentar explicar fenômenos orbitais do Sistema Solar, como a precessão do periélio de Mercúrio. Mesmo quando esse problema em particular é resolvido por métodos de cálculo perturbativos, considerando o efeito gravitacional dos vários corpos do sistema, outras questões, como o deslocamento do perigeu lunar, ficaram mal resolvidas até o aparecimento da teoria da relatividade geral.

A energia potencial gravitacional na teoria de Einstein pode ser representada com boa aproximação (para campos fracos) pelo chamado *potencial de Manev*, dado por:

$$V_M(r) = -\frac{mMG}{r}\left(1 + \gamma\frac{MG}{c^2 r}\right),$$

em que M é a massa do Sol e m a do planeta, G a constante de Newton, c é a velocidade da luz, e γ um número adimensional tal que o termo $-\gamma\frac{mM^2G^2}{c^2r^2}$ represente a correção relativística (a qual pode depender da configuração de massa da estrela).

(a) Dado uma energia potencial de força central V, escreva o potencial efetivo V_{ef} correspondente para um corpo com momento angular L.

(b) Escreva as condições sobre V_{ef} para que esse potencial admita órbitas estáveis.

(c) Considere uma teoria com potencial atrativo do tipo $V = -\frac{K}{r^n}$. Mostre que somente para $n < 2$ essa teoria pode admitir órbitas estáveis para quaisquer valores de L (a depender do sinal de K, é claro).

Para os itens seguintes, você precisará calcular o período de oscilação radial de uma órbita newtoniana.

(d) Calcule aproximadamente o período de oscilação T_r do raio de uma órbita newtoniana.

(e) Supondo que a média ao longo da órbita do inverso do quadrado do raio seja, aproximadamente:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{r(t)^2}dt = \frac{1}{r_0^2},$$

em que r_0 é o raio da órbita circular, calcule o momento angular L dessa órbita em função de r_0 e do período de translação T_O.

(f) Escreva, em função dos períodos orbital T_O e radial T_r, o que significa uma órbita apresentar ou não precessão.

(g) Mostre que, com essas aproximações, uma órbita newtoniana com potencial $V \propto -\frac{1}{r}$ não pode apresentar precessão.

(h) Sendo T_r^M o período de oscilação radial de uma órbita para o potencial de Manev com momento angular L, e T_r o período para a órbita newtoniana de mesmo momento angular, mostre que:

$$\frac{T_r^M}{T_r} \approx 1 - 3\gamma \left(\frac{mMG}{cL} \right)^2 .$$

(i) Suponha que o período orbital e o raio de órbita circular para os potenciais de Manev e de Newton sejam aproximadamente iguais. Justifique por que é esperada uma precessão mais acentuada para as órbitas mais internas do Sistema Solar.

Dica: lembre-se da terceira lei de Kepler: os quadrados dos períodos de translação são proporcionais aos cubos dos raios de órbita.