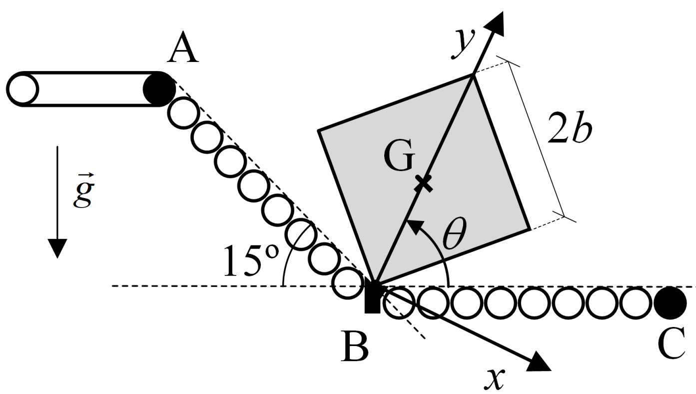
PME 3100 – MECÂNICA I – Atividade E3.3 – Reoferecimento 2023

- Esta atividade é composta por 1 questão e deve ser realizada individualmente.
- Antes de realizar sua submissão, o aluno deve ler as regras para a realização das atividades remotas.
- Além da pontuação indicada em cada um dos itens, o aluno poderá receber até **0,2 ponto** no quesito "Apresentação e Diagramação", conforme avaliação que receber de seus colegas.

Enunciado

Após um revigorante fim de semana no parque de diversões, os quatro amigos voltam à sua rotina de estudos e aventuras na Escola Politécnica. Durante uma visita técnica a uma fábrica, eles observam atentamente ao funcionamento de uma esteira transportadora como a ilustrada na figura abaixo:



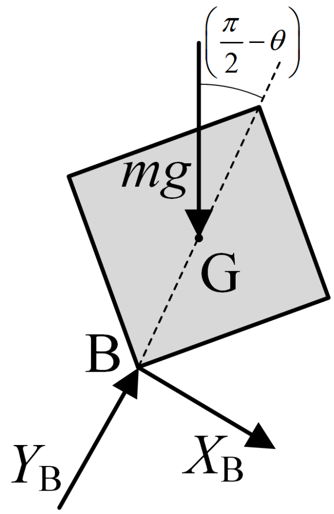
Um deles então começa a se lembrar do que aprendeu em suas aulas de Mecânica I e imagina um modelo para o movimento descrito pelos pacotes quando eles atingem o ponto B, desde o instante imediatamente posterior à perda de contato entre um pacote e o trecho AB até o instante imediatamente anterior à sua colisão com o trecho BC. O aluno então nota que o movimento em questão aparenta ser uma rotação pura em torno do eixo Bz, e considera razoável modelar, ao menos durante o movimento observado, o ponto B como um ponto fixo ao qual a extremidade do pacote se encontra articulada. O aluno ainda assume que o pacote seja um corpo cúbico e homogêneo de lado $2b$, massa m e momento de inércia central $J_{Gz} = \frac{2}{3}mb^2$, que tem velocidade angular inicial (ou seja, na posição $\theta = 120°$) de intensidade ω_0. Finalmente ele admite a hipótese de conservação de energia durante o movimento observado e adota um sistema de eixos Bxyz solidário ao pacote, como mostrado na figura.

Para o modelo concebido por este aluno para a rotação do pacote em torno de B, pede-se para uma posição genérica θ do pacote:

a) **(0,4)** O diagrama de corpo livre (DCL) do pacote.
b) **(1,2)** O vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ do pacote.
c) **(0,8)** O mínimo valor de ω_0 compatível com o movimento observado.
d) **(1,2)** O vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ do pacote.
e) **(1,2)** As componentes da reação em B sobre o pacote.

Resolução comentada

(a) Diagrama de corpo livre (DCL) do pacote é apresentado na figura abaixo:



Atribua um valor na escala 0/3 a 3/3 para a solução de seu colega sendo 1/3 para cada componente de força representada corretamente.

(b) O módulo do vetor velocidade angular $|\vec{\omega}|$ do pacote pode ser obtido a partir do princípio do trabalho e energia. Desta forma, considerando que o sistema seja conservativo, a energia mecânica do pacote em uma posição genérica durante sua rotação, E, será igual a energia mecânica do pacote em sua posição incial E_0. Logo:

$$E = T + U = E_0 = T_0 + U_0$$

sendo T e T_0, respectivamente, a energia cinética em uma posição genérica e na posição inicial, e U e U_0, da mesma forma, a energia potencial em uma posição genérica e na posição inicial.
Como a única força que realiza trabalho durante o movimento do pacote é seu peso, a energia potencial considerada é a energia potencial gravitacional, medida a partir da distância vertical do centro de massa do pacote, G, até o plano horizontal no qual se encontra a origem do referencial adotado.
Por outro lado, a energia cinética depende apenas do momento de inércia do bloco em relação ao ponto B, J_{Bz}. Este, por sua vez, pode ser obtido a partir do teorema dos eixos paralelos. Neste caso:

$$J_{Bz} = J_{Gz} + m\left(x_G^2 + y_G^2\right) = \frac{2}{3}mb^2 + m\left[(0)^2 + \left(\frac{2b\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] = \frac{2}{3}mb^2 + 2mb^2 = \frac{8}{3}mb^2$$

Desta forma:

$$E = \frac{1}{2}J_{Bz}\omega^2 + mg\left(b\sqrt{2}\sin\theta\right) = \frac{4}{3}mb^2\omega^2 + mgb\sqrt{2}\sin\theta$$

$$E_0 = \frac{1}{2}J_{Bz}\omega_0^2 + mg\left(b\sqrt{2}\sin 120^\circ\right) = \frac{4}{3}mb^2\omega_0^2 + mg\left(b\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3}mb^2\omega_0^2 + mgb\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Assim:

$$\frac{4}{3}mb^2\omega^2 + mgb\sqrt{2}\sin\theta = \frac{4}{3}mb^2\omega_0^2 + mgb\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3mgb}{4mb^2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{2}\sin\theta\right)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3g\sqrt{2}}{4b}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\theta\right)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3g\sqrt{2}}{4b}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\theta\right)}$$

Como pode-se notar, a rotação do pacote se dá no sentido oposto ao do eixo z, definido pelo referencial adotado. Desta forma:

$$\boxed{\vec{\omega} = -\sqrt{\omega_0^2 + \frac{3g\sqrt{2}}{4b}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\theta\right)}\vec{\mathrm{k}}}$$

Atribua um valor na escala 0/2 a 2/2 para a solução de seu colega respeitando o seguinte critério:

2/2: resposta inteiramente correta.

1/2: raciocínio correto, porém com algum erro de cálculo.

0/2: demais casos.

(c) O mínimo valor de ω_0, compatível com o movimento observado, é obtido ao se considerar que a velocidade de rotação do pacote quando $\theta = 90^\circ$ deva ser positiva, de tal forma que o pacote complete seu movimento de rotação e alcance a posição em $\theta = 0$. Desta forma:

$$\sqrt{\omega_0^2 + \frac{3g\sqrt{2}}{4b}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right)} \geq 0$$

$$\omega_0^2 + \frac{3g\sqrt{2}}{4b}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \geq 0$$

$$\omega_0^2 \geq \frac{3g\sqrt{2}}{4b}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\omega_0^2 \geq \frac{3\sqrt{2}}{8}\left(2 - \sqrt{3}\right)\frac{g}{b}$$

$$\boxed{|\omega_0| \geq \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{8}\left(2 - \sqrt{3}\right)\frac{g}{b}}}$$

Atribua um valor na escala 0/2 a 2/2 para a solução de seu colega respeitando o seguinte critério:

2/2: resposta inteiramente correta.

1/2: raciocínio correto, porém com algum erro de cálculo.

0/2: demais casos.

(d) O vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ do pacote é obtido ao se considerar o Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA), tendo como polo o ponto B. Neste caso, por se tratar de um movimento plano e o ponto B ter aceleração nula, o TQMA se reduz a:

$$J_{Bz}\alpha\vec{k} = M_{Bz}\vec{k}$$

Como a única força que produz momento em relação ao ponto B é a componente em x do peso do pacote, temos desta forma:

$$\frac{8}{3}mb^2\alpha\vec{k} = (-mg)\left[2b\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]\vec{k}$$

$$\alpha\vec{k} = -\frac{3mgb\sqrt{2}}{8mb^2}\cos(\theta)\,\vec{k}$$

$$\alpha\vec{k} = -\frac{3g\sqrt{2}}{8b}\cos\theta\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\alpha} = -\frac{3g\sqrt{2}}{8b}\cos\theta\vec{k}}$$

Atribua um valor na escala 0/2 a 2/2 para a solução de seu colega respeitando o seguinte critério:

2/2: resposta inteiramente correta.

1/2: raciocínio correto, porém com algum erro de cálculo.

0/2: demais casos.

(e) As componentes da reação em B sobre o pacote podem ser obtidas a partir do Teorema da Resultante (TR). Desta forma:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}$$

Como:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \wedge (G - B) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - B)]$$

$$\vec{a}_G = (0) - \alpha_z \vec{k} \wedge \left(\frac{2b\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j} - \omega_z \vec{k} \wedge \left[-\omega_z \vec{k} \wedge \left(\frac{2b\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}\right]$$

$$\vec{a}_G = \left(b\sqrt{2}\alpha_z\right)\vec{i} - \left(b\sqrt{2}\omega_z^2\right)\vec{j}$$

$$\vec{a}_G = b\sqrt{2}\left(\alpha_z \vec{i} - \omega_z^2 \vec{j}\right)$$

E:

$$\vec{R} = (X_B + mg\cos\theta)\,\vec{i} + (Y_B - mg\sin\theta)\,\vec{j}$$

Logo, para a direção x:

$$m\left(b\sqrt{2}\alpha_z\right) = X_B + mg\cos\theta$$

$$X_B = mb\sqrt{2}\left(\frac{3g\sqrt{2}}{8b}\cos\theta\right) - mg\cos\theta$$

$$X_B = mg\frac{3}{4}\cos\theta - mg\cos\theta$$

$$\boxed{X_B = -mg\frac{1}{4}\cos\theta}$$

E, para a direção y:

$$m\left(-b\sqrt{2}\omega_z^2\right) = Y_B - mg\sin\theta$$

$$Y_B = mg\sin\theta - mb\sqrt{2}\left[\sqrt{\omega_0^2 + \frac{3g\sqrt{2}}{4b}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\theta\right)}\right]^2$$

$$Y_B = mg\sin\theta - mb\sqrt{2}\omega_0^2 - \frac{3mg}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\theta\right)$$

$$Y_B = m\left(g\sin\theta - b\sqrt{2}\omega_0^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}g + \frac{3}{2}g\sin\theta\right)$$

$$Y_B = m\left[-b\sqrt{2}\omega_0^2 - g\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{5}{2}\sin\theta\right)\right]$$

$$\boxed{Y_B = -m\left(b\sqrt{2}\omega_0^2 + \frac{3\sqrt{3} - 10\sin\theta}{4}g\right)}$$

Atribua um valor na escala 0/3 a 3/3 para a solução de seu colega respeitando o seguinte critério:

3/3: resposta inteiramente correta.

2/3: raciocínio correto, porém apenas uma das componentes está correta e a outra apresenta algum erro de cálculo.

1/3: raciocínio correto, porém com erros de cálculo nas duas componentes.

0/3: demais casos.