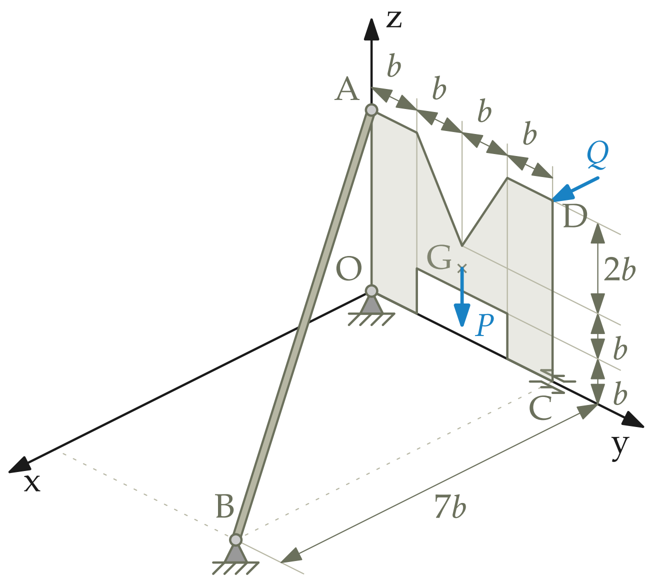
PME 3100 – MECÂNICA I – Atividade E1.2 – Reoferecimento 2023

- Esta atividade é composta por 1 questão e deve ser realizada *individualmente*.
- Antes de realizar sua submissão, o aluno deve ler as regras para a realização das atividades remotas.
- Além da pontuação indicada em cada um dos itens, o aluno poderá receber até **0,2 ponto** no quesito "Apresentação e Diagramação", conforme avaliação que receber de seus colegas.

Enunciado

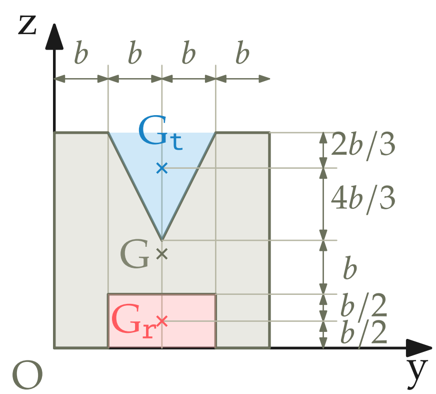
O sistema ilustrado na figura abaixo é constituído por uma placa rígida homogênea OADC, de centro de massa G e peso P e por uma barra AB, rígida e de peso desprezível, articulada em ambas as extremidades. A placa encontra-se vinculada à base fixa por meio de uma articulação em O e um anel em C. Além disso, é aplicada uma força $(Q\vec{\imath}, \mathrm{D})$ sobre a placa. Considerando a geometria da placa, as dimensões e o sistema de coordenadas fornecidos na figura, obtenha:



a) (0,8 ponto) o vetor posição (G – O) do centro de massa da placa;
b) (0,8 ponto) o momento da força $(Q\vec{\imath}, \mathrm{D})$ com respeito ao eixo $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$;
c) (0,8 ponto) o diagrama de corpo livre (DCL) da placa;
d) (0,4 ponto) o diagrama de corpo livre (DCL) da barra AB;
e) (1,2 ponto) o sistema de equações de equilíbrio da placa (utilize o polo O para obter as equações de equilíbrio de momentos);
f) (0,3 ponto) a intensidade e a expressão do vetor da força que a barra AB aplica sobre a placa em A;
g) (0,5 ponto) as componentes das forças de reação sobre a placa em O e C.

Resolução comentada

(a) Para calcularmos a posição do centro de massa G da placa homogênea OADC dada, podemos imaginar que se preenchêssemos os rasgos retangular r, indicado na figura abaixo em vermelho, e triangular t, indicado em azul, homogeneamente com um material de mesma densidade que o da placa original, obteríamos, ao fim, uma placa quadrada q, também homogênea.



São conhecidos:

- Área retangular r: $A_r = (2b)(b) = 2b^2$, $G_r = (0, 2b, b/2)$.
- Área triangular t: $A_t = (2b)(2b)/2 = 2b^2$, $G_t = (0, 2b, 10b/3)$.
- Área quadrada q: $A_q = (4b)(4b) = 16b^2$, $G_q = (0, 2b, 2b)$.

Dessa forma a área da placa OADC dada no problema é:

$$A = A_q - A_r - A_t = 12b^2$$

Dado a homogeneidade de todas as partes envolvidas, há uma proporção direta entre massa e área, de tal forma que:

$$(G_q - O) = \frac{A(G - O) + A_r(G_r - O) + A_t(G_t - O)}{A + A_t + A_r}$$

Isolando $(G - O)$ na expressão anterior, e notando que $A + A_t + A_r = A_q$:

$$(G - O) = \frac{A_q(G_q - O) - A_r(G_r - O) - A_t(G_t - O)}{A} = \frac{A_q(G_q - O) - A_r(G_r - O) - A_t(G_t - O)}{A_q - A_r - A_t}$$

Esta última expressão pode ser interpretada como o cálculo do centro de massa da placa OADC se originalmente tivéssemos a placa homogênea quadrada q e dela removêssemos a placa retangular r e a placa triangular t. Dessa forma, na média ponderada a área de q entra como peso de ponderação positivo, enquanto as áreas de r e r entram como pesos de ponderação negativos.

Cabe observar ainda que dada a simetria da placa e de seus rasgos os centros de massa de todas as partes envolvidas estão sobre a mesma linha vertical e têm coordenadas $x = 0$ e $y = 2b$ já conhecidas, sendo a rigor necessário realizar a média ponderada em questão apenas com as coordenadas z:

$$z_{\mathrm{G}} = \frac{A_{\mathrm{q}} z_{\mathrm{G_q}} - A_{\mathrm{r}} z_{\mathrm{G_r}} - A_{\mathrm{t}} z_{\mathrm{G_t}}}{A} = \frac{(16b^2)(2b) - (2b^2)(b/2) - (2b^2)(10b/3)}{12b^2} = \frac{73}{36} b$$

Portanto:

$$\boxed{(\mathrm{G} - \mathrm{O}) = 2b\,\vec{\jmath} + \frac{73}{36} b\,\vec{\mathrm{k}}}$$

Atribua uma nota na escala 0/2, 1/2 ou 2/2 para a solução de seu colega respeitando o critério estabelecido a seguir:

2/2: solução sem nenhum erro;

1/2: solução com raciocínio correto, sem nenhum erro dimensional porém com algum erro de cálculo;

0/2: demais casos.

Observação: no presente caso, solução sem erro dimensional significa fornecer a expressão de um vetor em que cada componente possa ser escrita como o produto entre um número real (sem dimensão) e a dimensão de comprimento b.

(b) O momento da força $(Q\vec{\imath}, \mathrm{D})$ com respeito ao eixo $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ pode ser calculado pela expressão:

$$M_{\mathrm{BA}} = \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{A}} \cdot \vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{BA}}$$

com $\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{A}}$ sendo o momento da força $(Q\vec{\imath}, \mathrm{D})$ com respeito ao polo A (pode-se usar alternativamente o ponto B ou qualquer outro ponto do eixo $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ como polo):

$$\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{A}} = (\mathrm{D} - \mathrm{A}) \wedge Q\,\vec{\imath} = (4b\,\vec{\jmath}) \wedge Q\,\vec{\imath} = -4bQ\,\vec{\mathrm{k}}$$

e com $\vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{BA}}$ denotando o versor do eixo $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, dado por:

$$\vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{BA}} = \frac{(\mathrm{A} - \mathrm{B})}{|\mathrm{A} - \mathrm{B}|} = \frac{(-7b\,\vec{\imath} - 4b\,\vec{\jmath} + 4b\,\vec{\mathrm{k}})}{\sqrt{(-7b)^2 + (-4b)^2 + (4b)^2}} = \frac{(-7b\,\vec{\imath} - 4b\,\vec{\jmath} + 4b\,\vec{\mathrm{k}})}{9b} = -\frac{7}{9}\,\vec{\imath} - \frac{4}{9}\,\vec{\jmath} + \frac{4}{9}\,\vec{\mathrm{k}}$$

Assim:

$$M_{\mathrm{BA}} = (-4bQ\,\vec{\mathrm{k}}) \cdot \left(-\frac{7}{9}\,\vec{\imath} - \frac{4}{9}\,\vec{\jmath} + \frac{4}{9}\,\vec{\mathrm{k}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{\mathrm{BA}} = -\frac{16}{9} bQ}$$

Atribua uma nota na escala 0/2, 1/2 ou 2/2 para a solução de seu colega respeitando o critério estabelecido a seguir:

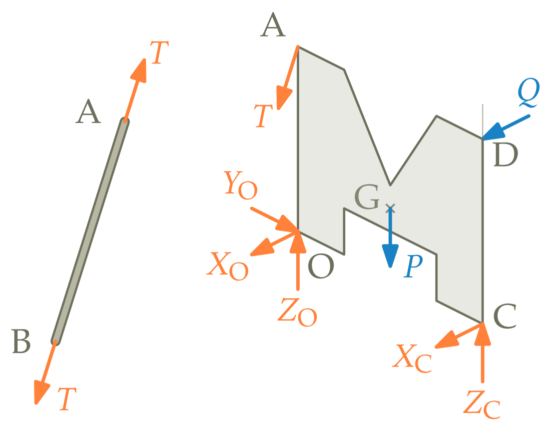
2/2: solução sem nenhum erro;

1/2: solução com raciocínio correto, sem nenhum erro dimensional porém com algum erro de cálculo;

0/2: demais casos.

Observação: no presente caso, solução com raciocínio correto e sem erro dimensional significa fornecer uma expressão **escalar** descrita como o produto entre um número real (sem dimensão), o comprimento b e a componente de força Q; erros no sinal ou na magnitude do número real em questão ($-16/9$) são considerados erros de cálculo.

(c, d) Os diagramas de corpo livre (DCLs) da placa e da barra AB são mostrados na figura abaixo:



Para o DCL da placa **[item (c)]**, atribua uma nota na escala 0/2, 1/2 ou 2/2 para a solução de seu colega respeitando o critério estabelecido a seguir:

2/2: solução sem nenhum erro;

1/2: solução com erros em *no máximo duas* componentes;

0/2: demais casos.

Para o DCL da barra AB **[item (d)]**, atribua uma nota na escala 0/1 ou 1/1 para a solução de seu colega respeitando o critério estabelecido a seguir:

1/1: solução sem nenhum erro;

0/1: demais casos.

Observações:

- O nome dado por seu colega a cada componente não deve ser levado em consideração na correção. No entanto, cada vez que seu colega deixar de atribuir um nome a uma componente ou atribuir o mesmo nome a dois esforços incógnitos distintos (que não sejam pares ação-reação), *você deve contar como 1 componente errada*.
- A convenção de sentido adotada para cada esforço incógnito tampouco deve ser considerada como acerto ou erro.

(e) As equações de equilíbrio são obtidas a partir das identidades abaixo:

$$\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}} = \vec{0} \qquad \vec{\mathrm{R}} = \vec{0}$$

com:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}} &= (\mathrm{A}-\mathrm{O}) \wedge (-T\,\vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{BA}}) + (\mathrm{G}-\mathrm{O}) \wedge (-P\,\vec{\mathrm{k}}) + (\mathrm{D}-\mathrm{O}) \wedge (Q\,\vec{\mathrm{i}}) + (\mathrm{C}-\mathrm{O}) \wedge (X_{\mathrm{C}}\,\vec{\mathrm{i}} + Z_{\mathrm{C}}\,\vec{\mathrm{k}}) \\
&= 4b\,\vec{\mathrm{k}} \wedge \frac{T}{9}(7\,\vec{\mathrm{i}} + 4\,\vec{\mathrm{j}} - 4\,\vec{\mathrm{k}}) + \left(2b\,\vec{\mathrm{j}} + \frac{73}{36}b\,\vec{\mathrm{k}}\right) \wedge (-P\,\vec{\mathrm{k}}) + 4b(\vec{\mathrm{j}} + \vec{\mathrm{k}}) \wedge Q\vec{\mathrm{i}} + 4b\,\vec{\mathrm{j}} \wedge (X_{\mathrm{C}}\,\vec{\mathrm{i}} + Z_{\mathrm{C}}\,\vec{\mathrm{k}}) \\
&= \left(-\frac{16}{9}bT - 2bP + 4bZ_{\mathrm{C}}\right)\vec{\mathrm{i}} + \left(\frac{28}{9}bT + 4bQ\right)\vec{\mathrm{j}} + (-4bQ - 4bX_{\mathrm{C}})\,\vec{\mathrm{k}} \\
\vec{\mathrm{R}} &= (X_{\mathrm{O}}\,\vec{\mathrm{i}} + Y_{\mathrm{O}}\,\vec{\mathrm{j}} + Z_{\mathrm{O}}\,\vec{\mathrm{k}}) - T\,\vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{BA}} - P\,\vec{\mathrm{k}} + Q\,\vec{\mathrm{i}} + (X_{\mathrm{C}}\,\vec{\mathrm{i}} + Z_{\mathrm{C}}\,\vec{\mathrm{k}}) \\
&= \left(X_{\mathrm{O}} + X_{\mathrm{C}} + \frac{7}{9}T + Q\right)\vec{\mathrm{i}} + \left(Y_{\mathrm{O}} + \frac{4}{9}T\right)\vec{\mathrm{j}} + \left(Z_{\mathrm{O}} + Z_{\mathrm{C}} - P - \frac{4}{9}T\right)\vec{\mathrm{k}}
\end{aligned}$$

Observe que, de acordo com o DCL da placa [item (c)], a força aplicada em A tem intensidade T, direção do eixo $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ e sentido contrário à sua orientação. Dessa forma, o versor utilizado para esta força é $-\vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{BA}}$. Lembre-se que $\vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{BA}}$ já foi obtido no item (b).

As equações de equilíbrio são, portanto:

$$-\frac{16}{9}bT - 2bP + 4bZ_{\mathrm{C}} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{28}{9}bT + 4bQ = 0 \tag{2}$$

$$-4bQ - 4bX_{\mathrm{C}} = 0 \tag{3}$$

$$X_{\mathrm{O}} + X_{\mathrm{C}} + \frac{7}{9}T + Q = 0 \tag{4}$$

$$Y_{\mathrm{O}} + \frac{4}{9}T = 0 \tag{5}$$

$$Z_{\mathrm{O}} + Z_{\mathrm{C}} - P - \frac{4}{9}T = 0 \tag{6}$$

Atribua uma nota na escala 0/6 a 6/6 para a solução de seu colega sendo 1/6 atribuído a cada equação de equilíbrio inteiramente correta. Fique atento a possíveis erros dimensionais que possam ter sido cometidos.

Observação: caso seu colega tenha fatorado ou simplificado uma das equações, isto naturalmente não deve ser considerado um erro. Por exemplo, escrever a eq. (3) na forma $Q + X_{\mathrm{C}} = 0$ é uma forma equivalente e simplificada da solução apresentada acima e deve ser considerada uma resposta correta. Por outro lado, algo como $-bQ - X_{\mathrm{C}} = 0$ é uma simplificação incorreta (o primeiro termo tem dimensão de momento e o segundo, de força) e não deve ser pontuada.

(f) Resolvendo a eq. (2), obtém-se:

$$T = -\frac{9}{7}Q$$

Dessa forma, obtemos a intensidade e a expressão do vetor da força que a barra AB aplica sobre a placa em A:

$$\boxed{|\vec{\mathrm{T}}| = |T| = \frac{9}{7}Q} \qquad \boxed{\vec{\mathrm{T}} = -T\,\vec{\mathrm{u}}_{\mathrm{BA}} = \frac{Q}{7}(-7\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath} + 4\,\vec{\mathrm{k}})}$$

Atribua uma nota na escala 0/3 a 3/3 para a solução de seu colega respeitando o critério estabelecido a seguir:

3/3: expressões da magnitude e do vetor sem nenhum erro;

2/3: uma das expressões sem nenhum erro, outra delas com algum erro que não seja dimensional;

1/3: raciocínio correto porém com erro de cálculo em ambas as respostas, porém sem erro dimensional;

0/3: demais casos.

Observação: no presente caso, solução sem erro dimensional significa fornecer expressões em que a magnitude e cada componente do vetor possam ser escritas como o produto entre um número real (sem dimensão) e a força Q.

(f) Resolvendo as eqs. (3), (1), (5), (4) e (6), nesta ordem, obtêm-se as respostas desejadas:

$$\boxed{X_{\mathrm{C}} = -Q} \quad \boxed{Z_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}P - \frac{4}{7}Q} \quad \boxed{Y_{\mathrm{O}} = \frac{4}{7}Q} \quad \boxed{X_{\mathrm{O}} = Q} \quad \boxed{Z_{\mathrm{O}} = \frac{1}{2}P}$$

Atribua uma nota na escala 0/5 a 5/5 para a solução de seu colega sendo 1/5 atribuído a cada componente inteiramente correta. Fique atento a possíveis erros dimensionais que possam ter sido cometidos. É importante também observar a consistência entre as respostas apresentadas e a convenção de sentidos adotada no DCL e o sinal de cada componente da resposta. Se o colega escolheu em seu DCL uma convenção de sentido contrária à apresentada neste texto para uma das incógnitas acima (não há nada errado nisto), sua resposta deve, *consistentemente*, estar com o sinal trocado para ser considerada correta.