PME 3100 • Mecânica I • Módulo 3.2

Momentos de inércia, translação de eixos
Energia cinética de um corpo rígido
Potência e trabalho
Teorema da Energia Cinética

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Representação matricial do produto escalar entre vetores

A representação do vetor $\vec{\mathrm{p}}$ na base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\mathrm{k}})$ pode ser feita na forma da matriz-coluna $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_{\mathrm{x}} \\ p_{\mathrm{y}} \\ p_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathrm{p}} = p_{\mathrm{x}}\hat{\imath} + p_{\mathrm{y}}\hat{\jmath} + p_{\mathrm{z}}\hat{\mathrm{k}}$$

Considere os vetores $\vec{\mathrm{p}}$ e $\vec{\mathrm{q}}$ e suas representações em uma **base ortonormal** $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\mathrm{k}})$. Pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{p}} \cdot \vec{\mathrm{q}} &= (p_{\mathrm{x}}\hat{\imath} + p_{\mathrm{y}}\hat{\jmath} + p_{\mathrm{z}}\hat{\mathrm{k}}) \cdot (q_{\mathrm{x}}\hat{\imath} + q_{\mathrm{y}}\hat{\jmath} + q_{\mathrm{z}}\hat{\mathrm{k}}) \\ &= p_{\mathrm{x}}q_{\mathrm{x}} + p_{\mathrm{y}}q_{\mathrm{y}} + p_{\mathrm{z}}q_{\mathrm{z}} \\ &= \begin{bmatrix} p_{\mathrm{x}} & p_{\mathrm{y}} & p_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\mathrm{x}} \\ q_{\mathrm{y}} \\ q_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\mathrm{p}} \cdot \vec{\mathrm{q}} = \mathbf{p}^{\top}\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\top}\mathbf{p}}$$

Matrizes antissimétricas e a representação do produto vetorial

A representação de produtos vetoriais, contudo requer a introdução da representação do vetor $\vec{p}$ em uma **base ortonormal positiva** $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ na forma de uma **matriz quadrada antissimétrica** $\tilde{\boldsymbol{p}} = -\tilde{\boldsymbol{p}}^{\top}$:

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} = p_x \hat{\imath} + p_y \hat{\jmath} + p_z \hat{k}$$

Dessa forma, o produto vetorial $\vec{w} = \vec{p} \wedge \vec{q}$ pode ser representado na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} p_y q_z - p_z q_y \\ p_z q_x - p_x q_z \\ p_x q_y - p_y q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{w} = \vec{p} \wedge \vec{q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = \tilde{\boldsymbol{p}}\mathbf{q} = -\tilde{\boldsymbol{q}}\mathbf{p}}$$

Campos de velocidades e acelerações de um corpo rígido

A **equação do campo de velocidades** de um corpo rígido permite calcular a velocidade de qualquer ponto P do corpo em um dado instante de tempo, se forem conhecidos os valores, neste *mesmo instante de tempo*:

- do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ (vetor rotação) do corpo;
- da velocidade $\vec{v}_{\mathrm{Q}}$, de um único ponto Q a ele solidário;
- do vetor de posição relativa $\vec{\rho} = (\mathrm{P} - \mathrm{Q})$.

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \vec{v}_{\mathrm{Q}} + \vec{\omega} \wedge \vec{\rho} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{v}_{\mathrm{P}} = \mathbf{v}_{\mathrm{Q}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\rho}}$$

A **equação do campo de acelerações** de um corpo rígido permite calcular a aceleração de qualquer ponto P do corpo em um dado instante de tempo, se forem conhecidos os valores, neste *mesmo instante de tempo*:

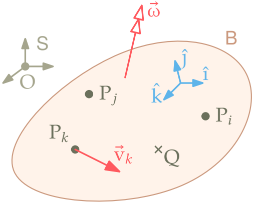
- dos vetores de velocidade angular $\vec{\omega}$ e aceleração angular $\vec{\alpha}$ do corpo;
- da aceleração $\vec{a}_{\mathrm{Q}}$, de um único ponto Q a ele solidário;
- do vetor de posição relativa $\vec{\rho} = (\mathrm{P} - \mathrm{Q})$.

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \vec{a}_{\mathrm{Q}} + \vec{\alpha} \wedge \vec{\rho} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{a}_{\mathrm{P}} = \mathbf{a}_{\mathrm{Q}} + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\rho} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^2\boldsymbol{\rho}}$$

Quantidade de movimento angular de um corpo rígido

Considere um corpo rígido B modelado como um sistema de pontos materiais $\{\mathrm{P}_k | k = 1, \ldots, n\}$. Seja Q um ponto solidário a B e adote a notação:

- m_k: massa da partícula P_k.
- $\vec{\rho}_k = (\mathrm{P}_k - \mathrm{Q})$: vetor posição da partícula material P_k relativa ao ponto Q.
- $\vec{v}_k = \vec{v}_\mathrm{Q} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{\rho}_k}{\mathrm{d}t}$: velocidade da partícula P_k com respeito a um **referencial inercial** S.



A **quantidade de movimento angular** (ou momento da quantidade de movimento) do corpo rígido B com respeito ao pólo Q é dada por:

$$\vec{H}_\mathrm{Q} = \sum_i \vec{\rho}_i \wedge m_i \vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_\mathrm{Q} = \sum_i m_i \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_i \mathbf{v}_i$$

Quantidade de movimento angular de um corpo rígido

Utilizando a forma matricial da equação de campo de velocidades de B, a propriedade anticomutativa do produto vetorial e recordando a definição do centro de massa G do corpo, $m(\mathrm{G}-\mathrm{Q}) = m\vec{\rho}_\mathrm{G} = \sum_i m_i \vec{\rho}_i$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_\mathrm{Q} &= \sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \left(\mathbf{v}_\mathrm{Q} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho}_i\right) \\
&= \left(\sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i\right)\mathbf{v}_\mathrm{Q} + \left(-\sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^2\right)\boldsymbol{\omega} \\
&= m\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mathrm{G}\mathbf{v}_\mathrm{Q} + \boldsymbol{J}_\mathrm{Q}\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
$$

Define-se assim a **matriz de inércia** $\boldsymbol{J}_\mathrm{Q}$ do corpo B no sistema de coordenadas $\mathrm{Qxyz} = (\mathrm{Q}, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\mathrm{k}})$ por meio da expressão:

$$
\boxed{\boldsymbol{J}_\mathrm{Q} = -\sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^2}
$$

Energia cinética de um corpo rígido

Realizando procedimento similar para a simplificação da expressão da energia cinética do corpo B:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_Q + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho}_i)^\top (\mathbf{v}_Q + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho}_i)$$
$$= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_Q^\top \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_Q^\top \tilde{\boldsymbol{\omega}} \left(\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \right) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^\top \left(- \sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^2 \right) \boldsymbol{\omega}$$
$$= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_Q^\top \mathbf{v}_Q + m \mathbf{v}_Q^\top \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho}_G + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{J}_Q \boldsymbol{\omega}$$

Novamente, utiliza-se a expressão da **matriz de inércia** do corpo B no sistema de coordenadas $\mathrm{Qxyz} = (\mathrm{Q}, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\mathrm{k}})$:

$$\boxed{\boldsymbol{J}_Q = - \sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^2}$$

Matriz de inércia de um corpo rígido

Considere um corpo rígido B modelado como um sistema de pontos materiais $\{\mathrm{P}_k | k = 1, \ldots, n\}$. Seja Q um ponto solidário a B e defina-se um sistema de coordenadas $\mathrm{Qxyz} = (\mathrm{Q}, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\mathrm{k}})$, de tal forma que:

$$\vec{\rho}_i = (\mathrm{P}_i - \mathrm{Q}) = x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{\mathrm{k}}$$

A **matriz de inércia** do corpo B no sistema de coordenadas Qxyz é:

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}} = -\sum_i m_i \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} J_{\mathrm{Qx}} & -J_{\mathrm{Qxy}} & -J_{\mathrm{Qxz}} \\ -J_{\mathrm{Qxy}} & J_{\mathrm{Qy}} & -J_{\mathrm{Qyz}} \\ -J_{\mathrm{Qxz}} & -J_{\mathrm{Qyz}} & J_{\mathrm{Qz}} \end{bmatrix}$$

$$J_{\mathrm{Qx}} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) \qquad J_{\mathrm{Qy}} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) \qquad J_{\mathrm{Qz}} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

$$J_{\mathrm{Qxy}} = \sum_i m_i x_i y_i \qquad J_{\mathrm{Qxz}} = \sum_i m_i x_i z_i \qquad J_{\mathrm{Qyz}} = \sum_i m_i y_i z_i$$

A matriz de inércia é uma **matriz simétrica**.

Momento de inércia

A distância d_i de um ponto P_i a um eixo Qu, orientado pelo vetor unitário $\hat{\mathrm{u}}$, pode ser calculada a partir da expressão:

$$d_i = |(\mathrm{P}_i - \mathrm{Q}) \wedge \hat{\mathrm{u}}| = |\vec{\rho}_i \wedge \hat{\mathrm{u}}|$$

O **momento de inércia** com respeito ao eixo Qu de um corpo rígido B, modelado como um sistema de pontos materiais $\{\mathrm{P}_k | k = 1, \ldots, n\}$, é definido pela expressão:

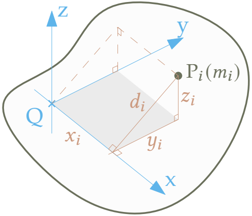
$$J_{\mathrm{Qu}} = \sum_i m_i d_i^2 = \sum_i m_i |\vec{\rho}_i \wedge \hat{\mathrm{u}}|^2 = \sum_i m_i (\vec{\rho}_i \wedge \hat{\mathrm{u}}) \cdot (\vec{\rho}_i \wedge \hat{\mathrm{u}})$$

Utilizando a representação matricial:

$$J_{\mathrm{Qu}} = \sum_i m_i (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \mathbf{u})^\top (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \mathbf{u}) = \mathbf{u}^\top \left(- \sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^2 \right) \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{\mathrm{Qu}} = \mathbf{u}^\top \boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}} \mathbf{u}}$$

Por definição, $J_{\mathrm{Qu}} > 0$. Portanto, $\mathbf{u}^\top \boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}} \mathbf{u} > 0$, qualquer seja o vetor unitário $\hat{\mathrm{u}}$. Por ter esta propriedade, $\boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}}$ é uma matriz **definida positiva**.

Momento de inércia



Considere, por exemplo, o eixo Qx, orientado pelo vetor unitário $\hat{\imath}$:

$$\vec{\rho}_i \wedge \hat{\imath} = (x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k}) \wedge \hat{\imath} = z_i\hat{\jmath} - y_i\hat{k}$$

$$J_{Qx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)$$

Utilizando a identidade $|\vec{\rho}_i|^2 = (\vec{\rho}_i \cdot \hat{u})^2 + |\vec{\rho}_i \wedge \hat{u}|^2$, válida para qualquer vetor unitário $\hat{u}$, conclui-se que, para um eixo Qu genérico, orientado pelo vetor unitário $\hat{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$:

$$J_{Qu} = \sum_i m_i|\vec{\rho}_i \wedge \hat{u}|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[|\vec{\rho}_i|^2 - (\vec{\rho}_i \cdot \hat{u})^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \left[(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (x_i u_x + y_i u_y + z_i u_z)^2\right]$$

Raio de giração e momento polar de inércia

O **raio de giração** com respeito ao eixo Qu de um corpo rígido B, de massa m, é definido pela expressão:

$$r_{\mathrm{Qu}} = \sqrt{\frac{J_{\mathrm{Qu}}}{m}} = \sqrt{\frac{\mathbf{u}^{\top} \boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}} \mathbf{u}}{m}} \quad \Leftrightarrow \quad J_{\mathrm{Qu}} = m r_{\mathrm{Qu}}^2$$

O **momento polar de inércia** com respeito ao ponto Q de um corpo de inércia B, é definido pela expressão:

$$J_{\mathrm{Q}} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}}) = \frac{1}{2} \left(J_{\mathrm{Qx}} + J_{\mathrm{Qy}} + J_{\mathrm{Qz}} \right)$$

Em particular, modelando o corpo rígido B, como um sistema de pontos materiais $\{\mathrm{P}_k | k = 1, \ldots, n\}$, tem-se: $J_{\mathrm{Q}} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i |\vec{\rho}_i|^2$.

Para um corpo rígido modelado como uma **figura plana esbelta** sobre o plano xy, $z_i = 0, \forall \mathrm{P}_i \;\Rightarrow\; J_{\mathrm{Q}} = J_{\mathrm{Qz}}$ e, portanto, $J_{\mathrm{Qz}} = J_{\mathrm{Qx}} + J_{\mathrm{Qy}}$.

Teorema de Steiner (eixos paralelos)

Considere dois sistemas de eixos, Qxyz e Gxyz, o último com origem no centro de massa G do corpo rígido B e tal que os eixos Gx, Gy e Gz sejam respectivamente paralelos aos eixos Qx, Qy e Qz. Adote:

$$\vec{\rho}_i = (\mathrm{P}_i - \mathrm{Q}) = x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k}$$

$$\vec{\rho}_\mathrm{G} = (\mathrm{G} - \mathrm{Q}) = x_\mathrm{G}\hat{\imath} + y_\mathrm{G}\hat{\jmath} + z_\mathrm{G}\hat{k}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_\mathrm{G} &= -\sum_i m_i(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mathrm{G})(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mathrm{G}) \\
&= -\sum_i m_i\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^2 + \left(\sum_i m_i\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i\right)\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mathrm{G} + \tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mathrm{G}\left(\sum_i m_i\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i\right) - \left(\sum_i m_i\right)\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mathrm{G}^2 \\
&= \boldsymbol{J}_\mathrm{Q} + m\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mathrm{G}^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{J}_\mathrm{Q} = \boldsymbol{J}_\mathrm{G} - m\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mathrm{G}^2}$$

Teorema de Steiner (eixos paralelos)

Desenvolvendo a expressão anterior, obtém-se:

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{G}} + m \begin{bmatrix} (y_{\mathrm{G}}^2 + z_{\mathrm{G}}^2) & -x_{\mathrm{G}} y_{\mathrm{G}} & -x_{\mathrm{G}} z_{\mathrm{G}} \\ -x_{\mathrm{G}} y_{\mathrm{G}} & (x_{\mathrm{G}}^2 + z_{\mathrm{G}}^2) & -y_{\mathrm{G}} z_{\mathrm{G}} \\ -x_{\mathrm{G}} z_{\mathrm{G}} & -y_{\mathrm{G}} z_{\mathrm{G}} & (x_{\mathrm{G}}^2 + y_{\mathrm{G}}^2) \end{bmatrix}$$

Assim, os momentos e produtos de inércia correspondentes aos eixos paralelos destes sistemas podem ser relacionados pelas expressões:

$$J_{\mathrm{Qx}} = J_{\mathrm{Gx}} + m(y_{\mathrm{G}}^2 + z_{\mathrm{G}}^2) \qquad J_{\mathrm{Qxy}} = J_{\mathrm{Gxy}} + m x_{\mathrm{G}} y_{\mathrm{G}}$$

$$J_{\mathrm{Qy}} = J_{\mathrm{Gy}} + m(x_{\mathrm{G}}^2 + z_{\mathrm{G}}^2) \qquad J_{\mathrm{Qxz}} = J_{\mathrm{Gxz}} + m x_{\mathrm{G}} z_{\mathrm{G}}$$

$$J_{\mathrm{Qz}} = J_{\mathrm{Gz}} + m(x_{\mathrm{G}}^2 + y_{\mathrm{G}}^2) \qquad J_{\mathrm{Qyz}} = J_{\mathrm{Gyz}} + m y_{\mathrm{G}} z_{\mathrm{G}}$$

Energia cinética de um corpo rígido

A expressão anteriormente obtida para a **energia cinética** de um corpo rígido B, tomando um ponto Q a ele **solidário**, pode ser escrita utilizando as representações matricial e vetorial para as operações algébricas envolvidas:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{\mathrm{Q}}^{\top} \mathbf{v}_{\mathrm{Q}} + m \mathbf{v}_{\mathrm{Q}}^{\top} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{G}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{\top} \boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}} \boldsymbol{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2} m \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} + m \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} \cdot \left[\vec{\omega} \wedge (\mathrm{G} - \mathrm{Q}) \right] + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\omega}$$

Em particular, se a velocidade angular de B é $\vec{\omega} = \omega_{\mathrm{x}} \hat{\imath} + \omega_{\mathrm{y}} \hat{\jmath} + \omega_{\mathrm{z}} \hat{\mathrm{k}}$, então:

$$\vec{\omega} \cdot \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{\top} \boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}} \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_{\mathrm{x}} & \omega_{\mathrm{y}} & \omega_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{\mathrm{Qx}} & -J_{\mathrm{Qxy}} & -J_{\mathrm{Qxz}} \\ -J_{\mathrm{Qxy}} & J_{\mathrm{Qy}} & -J_{\mathrm{Qyz}} \\ -J_{\mathrm{Qxz}} & -J_{\mathrm{Qyz}} & J_{\mathrm{Qz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{\mathrm{x}} \\ \omega_{\mathrm{y}} \\ \omega_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}$$

$$= +J_{\mathrm{Qx}} \omega_{\mathrm{x}}^2 + J_{\mathrm{Qy}} \omega_{\mathrm{y}}^2 + J_{\mathrm{Qz}} \omega_{\mathrm{z}}^2 - 2 J_{\mathrm{Qxy}} \omega_{\mathrm{x}} \omega_{\mathrm{y}} - 2 J_{\mathrm{Qxz}} \omega_{x} \omega_{\mathrm{z}} - 2 J_{\mathrm{Qyz}} \omega_{\mathrm{y}} \omega_{\mathrm{z}}$$

Energia cinética de um corpo rígido – casos particulares

- Translação pura, $\vec{\omega} = \vec{0}$: $\boxed{T = \frac{1}{2} m |\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}}|^2}$
- Rotação pura em torno de ponto fixo, $\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} = \vec{0}$: $\boxed{T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\omega}}$
- Rotação pura em torno de eixo fixo, $\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} = \vec{0}$ e $\vec{\omega} = \omega \hat{\mathrm{k}}$: $\boxed{T = \frac{1}{2} J_{\mathrm{Qz}} \omega^2}$
- Movimento plano, $\vec{\omega} = \omega \hat{\mathrm{k}}$:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m |\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}}|^2 + m \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} \cdot \left[\vec{\omega} \wedge (\mathrm{G} - \mathrm{Q})\right] + \frac{1}{2} J_{\mathrm{Qz}} \omega^2}$$

- Movimento geral, tomando $\mathrm{Q} = \mathrm{G}$:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m |\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}}|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{G}} \cdot \vec{\omega}}$$

Potência de um sistema de forças aplicado a um corpo rígido

Considerando Q um ponto solidário ao corpo rígido, temos a equação de campo de velocidades:

$$\vec{\mathrm{v}}_k = \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{Q} + \vec{\omega} \wedge (\mathrm{P}_k - \mathrm{Q})$$

Assim, a potência de um sistema de forças aplicado ao corpo pode ser calculada a partir da expressão:

$$\begin{aligned} P &= \sum_k \vec{\mathrm{F}}_k \cdot \vec{\mathrm{v}}_k \\ &= \sum_k \vec{\mathrm{F}}_k \cdot \left[\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{Q} + \vec{\omega} \wedge (\mathrm{P}_k - \mathrm{Q})\right] \\ &= \left[\sum_k \vec{\mathrm{F}}_k\right] \cdot \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{Q} + \left[\sum_k (\mathrm{P}_k - \mathrm{Q}) \wedge \vec{\mathrm{F}}_k\right] \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

$$\boxed{P = \vec{\mathrm{R}} \cdot \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{Q} + \vec{\mathrm{M}}_\mathrm{Q} \cdot \vec{\omega}}$$

Trabalho de um sistema de forças constante aplicado a um corpo rígido em movimento plano

Para um corpo rígido em movimento plano:

$$\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} = \dot{x}_{\mathrm{Q}}\hat{\imath} + \dot{y}_{\mathrm{Q}}\hat{\jmath} \qquad \vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{\mathrm{k}}$$

$$\vec{\mathrm{R}} = R_{\mathrm{x}}\hat{\imath} + R_{\mathrm{y}}\hat{\jmath} \qquad \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{Q}} = M_{\mathrm{Qz}}\hat{\mathrm{k}}$$

Assim, a potência do sistema de forças sobre este corpo é dada por:

$$P = \vec{\mathrm{R}} \cdot \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} + \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\omega} = R_{\mathrm{x}}\dot{x}_{\mathrm{Q}} + R_{\mathrm{y}}\dot{y}_{\mathrm{Q}} + M_{\mathrm{Qz}}\dot{\theta}$$

Em particular, se R_{x}, R_{y} e M_{Qz} forem constantes:

$$W = R_{\mathrm{x}} \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}_{\mathrm{Q}}\,\mathrm{d}t + R_{\mathrm{y}} \int_{t_1}^{t_2} \dot{y}_{\mathrm{Q}}\,\mathrm{d}t + M_{\mathrm{Qz}} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{W = R_{\mathrm{x}}\Delta x_{\mathrm{Q}} + R_{\mathrm{y}}\Delta y_{\mathrm{Q}} + M_{\mathrm{Qz}}\Delta\theta}$$

Teorema da Energia Cinética (TEC)

São formas equivalentes de se enunciar o Teorema da Energia Cinética:

1. A **derivada temporal da energia cinética** de um sistema material é **igual à potência total** dos esforços externos e internos atuantes sobre ele:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P^{\text{ext}} + P^{\text{int}}}$$

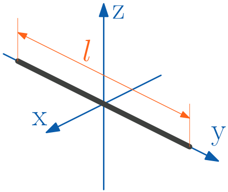
2. A **variação da energia cinética** de um sistema material é **igual ao trabalho total**, no intervalo de tempo considerado, dos esforços externos e internos atuantes sobre ele:

$$\boxed{\Delta T = W^{\text{ext}} + W^{\text{int}}}$$

3. A **variação da energia mecânica** $(E = T + V)$ de um sistema material é **igual ao trabalho**, no intervalo de tempo considerado, **dos esforços não-conservativos** (externos e internos) atuantes sobre ele:

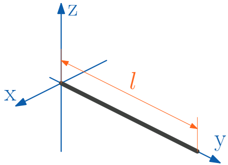
$$\boxed{\Delta E = \tilde{W}}$$

Momentos de inércia de sólidos homogêneos



Barra esbelta homogênea (origem no centro)

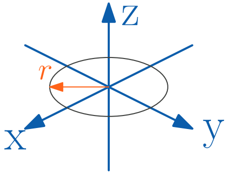
$$\boxed{J_x = J_z = \frac{1}{12} m l^2} \qquad J_y = 0$$

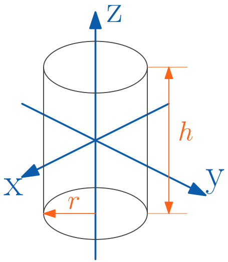


Barra esbelta homogênea (origem na extremidade)

$$J_x = J_z = \frac{1}{3} m l^2 \qquad J_y = 0$$

Momentos de inércia de sólidos homogêneos





Disco homogêneo (maciço)

$$J_x = J_y = \frac{1}{4} m r^2 \qquad \boxed{J_z = \frac{1}{2} m r^2}$$

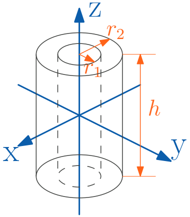
Anel cilíndrico

$$J_x = J_y = \frac{1}{12} m \left(6r^2 + h^2\right) \qquad J_z = m r^2$$

Cilindro maciço

$$J_x = J_y = \frac{1}{12} m \left(3r^2 + h^2\right) \qquad J_z = \frac{1}{2} m r^2$$

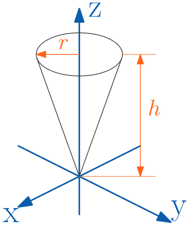
Momentos de inércia de sólidos homogêneos



Cilindro oco de parede espessa

$$J_x = J_y = \frac{1}{12} m \left(3(r_1^2 + r_2^2) + h^2\right)$$

$$J_z = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$$

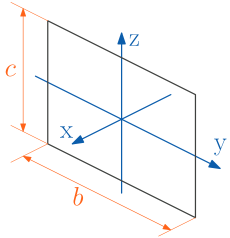


Cone maciço

$$J_x = J_y = m \left(\frac{3}{20} r^2 + \frac{3}{5} h^2\right)$$

$$J_z = \frac{3}{10} m r^2$$

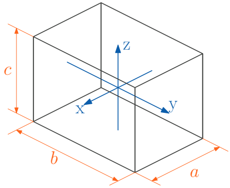
Momentos de inércia de sólidos homogêneos



Placa retangular

$$J_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$$

$$J_y = \frac{1}{12}mc^2 \qquad J_z = \frac{1}{12}mb^2$$

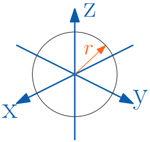


Paralelepípedo

$$J_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$$

$$J_y = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) \qquad J_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

Momentos de inércia de sólidos homogêneos

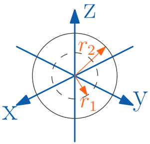


Esfera maciça

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m r^2$$

Esfera oca de parede fina

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} m r^2$$



Esfera oca de parede espessa

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m \frac{r_2^5 - r_1^5}{r_2^3 - r_1^3}$$

Perguntas?

reorsino@usp.br