PME 3100 • Mecânica I • Módulo 1.2

Centro de massa, centro de forças paralelas
Mudança de polo de momento
Momento com respeito a um eixo
Equilíbrio de estruturas e classificação

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

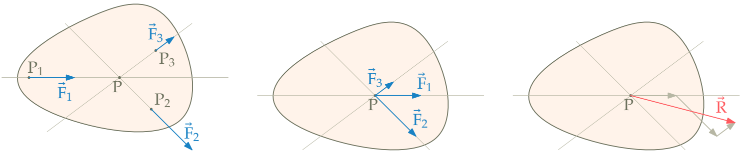
Sistemas de forças concorrentes

Um sistema de forças concorrentes $\mathcal{F}$ é um conjunto de forças cujas linhas de ação são retas que possuem um ponto de concorrência comum:

$$\mathcal{F} = \{(\vec{F}_i, P_i) : i = 1, 2, \ldots, n \mid \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : (P_i - P) = \lambda_i \vec{F}_i\}$$

Se todas as forças puderem ser modeladas como **vetores deslizantes**, $\mathcal{F}$ é equivalente a uma única força $(\vec{R}, P)$ com $\vec{R}$ denotando a **resultante do sistema de forças**:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$



Sistemas de forças paralelas

Um sistema de forças paralelas $\mathcal{F}$ é um conjunto de forças cujas linhas de ação são retas paralelas:

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathrm{F}}_i, \mathrm{P}_i) : i = 1, 2, \ldots, n \mid \exists F_i \in \mathbb{R} : \vec{\mathrm{F}}_i = F_i \hat{\mathrm{u}}\}$$

Caso a **resultante** $\vec{\mathrm{R}} = R\hat{\mathrm{u}}$ do sistema seja **não-nula**, pode-se afirmar que $\mathcal{F}$ equivale a uma única força $(\vec{\mathrm{R}}, \mathrm{C})$ com a posição do **centro de forças paralelas** C com respeito a uma origem arbitrária O sendo dada pela média das posições, com respeito à mesma origem, dos P_k de aplicação de forças, ponderadas pelas respectivas componentes de força F_k, ou seja:

$$\mathcal{F} \sim \{(R\hat{\mathrm{u}}, \mathrm{C})\} \quad \Leftrightarrow \quad R = \sum_{k=1}^{n} F_k \neq 0 \quad \text{e} \quad \boxed{(\mathrm{C} - \mathrm{O}) = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{n} F_k (\mathrm{P}_k - \mathrm{O})}$$

A demonstração deste resultado é apresentada nos dois slides seguintes para um par de forças paralelas e pode ser estendida por indução para um sistema com n forças, e via Cálculo para um sistema de forças distribuídas.

*Par de forças paralelas

$$\vec{H} = \mu(P_1 - P_2)$$

$$(P_1 - P) = \lambda_1(F_1\hat{u} + \vec{H})$$

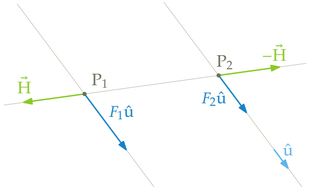
$$(P_2 - P) = \lambda_2(F_2\hat{u} - \vec{H})$$

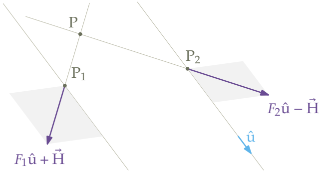
$$(P_1 - P_2) = (\lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2)\hat{u} + (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{H}$$

$$[\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - 1](P_1 - P_2) + (\lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2)\hat{u} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu(\lambda_1 + \lambda_2) = 1 \\ \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{F_2}{\mu(F_1 + F_2)}$$

$$(P - P_1) = \underbrace{\frac{F_2}{(F_1 + F_2)}(P_2 - P_1)}_{\text{paralelo a } (P_2 - P_1)} \underbrace{- \frac{F_1 F_2}{\mu(F_1 + F_2)}\hat{u}}_{\text{paralelo a } \hat{u}}$$

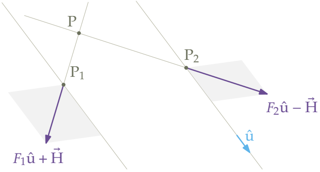


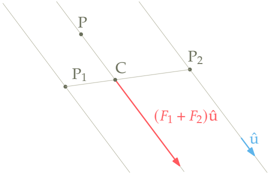


*Par de forças paralelas

$$(\mathrm{P}-\mathrm{P}_1) = \underbrace{\frac{F_2}{(F_1+F_2)}(\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_1)}_{\text{paralelo a }(\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_1)} \underbrace{-\frac{F_1F_2}{\mu(F_1+F_2)}\hat{u}}_{\text{paralelo a }\hat{u}}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{C}-\mathrm{P}_1) = \frac{F_2}{(F_1+F_2)}(\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_1)$$





Caso sejam conhecidas as posições de P_1 e P_2 com respeito a uma origem O:

$$(\mathrm{C}-\mathrm{P}_1) = (\mathrm{C}-\mathrm{O}) - (\mathrm{P}_1-\mathrm{O})$$
$$(\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_1) = (\mathrm{P}_2-\mathrm{O}) - (\mathrm{P}_1-\mathrm{O})$$

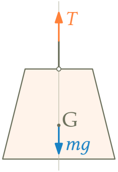
Após simplificação, obtém-se:

$$\boxed{(\mathrm{C}-\mathrm{O}) = \frac{F_1(\mathrm{P}_1-\mathrm{O}) + F_2(\mathrm{P}_2-\mathrm{O})}{(F_1+F_2)}}$$

Centro de massa

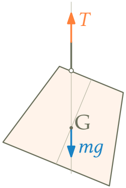
Considere um **sistema material** $\mathcal{M}$ formado por um número finito n de **partículas** P_k de massas m_k, $k = 1, \ldots, n$. O **centro de massa** ou **baricentro** de $\mathcal{M}$ é o ponto G definido a partir da seguinte expressão:

$$(\mathrm{G} - \mathrm{O}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k (\mathrm{P}_k - \mathrm{O}), \quad \text{com} \quad m = \sum_{k=1}^{n} m_k$$



Esta definição pode ser estendida para um sistema material $\mathcal{S}$ de **massas distribuídas** em um meio contínuo:

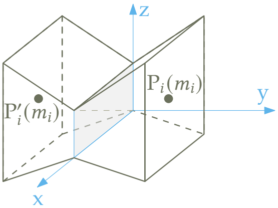
$$(\mathrm{G} - \mathrm{O}) = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{S}} (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \, \mathrm{d}m, \quad \text{com} \quad m = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}m$$



Em um campo gravitacional constante, o **centro de massa** de um sistema coincide com o **centro de gravidade** (centro de forças paralelas gravitacionais).

Propriedades

Por serem definidos como médias ponderadas, os conceitos de centro de massa (e de centro de forças paralelas) herdam todas as propriedades matemáticas associadas a médias:



P1 Se houver simetria de uma distribuição de massas com respeito a um plano ou a um eixo, então o centro de massa está contido neste plano ou eixo.

P2 Se um sistema de massas $\mathcal{M}$ pode ser descrito como a união de um número finito s de subsistemas disjuntos:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_s \text{ com } \mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \emptyset, i \neq j$$

e são conhecidas as massas m_r e as posições dos centros de massa G_r de cada subsistema $\mathcal{M}_r$, então para $\mathcal{M}$:

$$(\mathrm{G} - \mathrm{O}) = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{s} m_r (\mathrm{G}_r - \mathrm{O}), \quad \text{com} \quad m = \sum_{r=1}^{s} m_r$$

Propriedades

P3 O conjunto de pesos de ponderação utilizados no cálculo da posição de um centro de massa pode ser substituído por qualquer outro conjunto de pesos proporcional sem que isto afete o resultado.

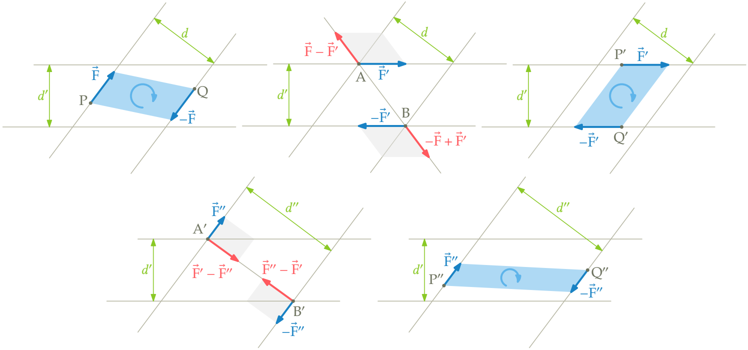
Quando a distribuição de massas em um corpo respeita todas as simetrias de sua geometria, havendo uma proporção constante entre massa de cada porção e seu volume (isto é, há uma densidade de massa ρ constante tal que $m_r = \rho V_r$ para qualquer subsistema material deste corpo), dizemos que tal corpo é **homogêneo**. Neste caso, o centro de massa corresponderá ao **centróide** ou centro geométrico deste corpo, ou seja:

$$(\mathrm{G} - \mathrm{O}) = \frac{1}{V}\sum_{r=1}^{s} V_r(\mathrm{G}_r - \mathrm{O}), \quad \text{com} \quad V = \sum_{r=1}^{s} V_r$$

1 Sistemas de forças concorrentes e paralelas
2 Centro de massa
3 Binário e momento
4 Momento de uma força
5 Equivalência entre sistemas de força
6 Estática: condições necessárias para o equilíbrio
7 Classificação das estruturas

Binário

Binário é um sistema de forças paralelas, formado por duas forças $(\vec{F}, P)$ e $(-\vec{F}, Q)$ de mesma intensidade e mesma direção porém com orientações opostas e linhas de ação distintas.



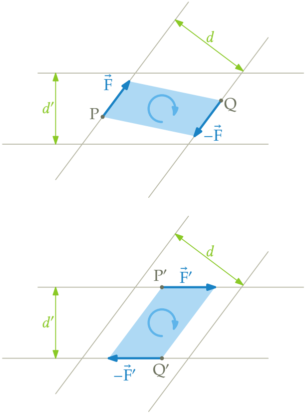
Momento do binário

Momento do binário

$$\vec{M} = (P - Q) \wedge \vec{F}$$

- **Direção**: direção normal ao plano definido pelo binário.
- **Orientação**: dada pela **regra da mão direita**, corresponde ao sentido de rotação induzida pelo binário.
- **Intensidade**: área do paralelogramo definido pelas forças do binário.

$$\left|\vec{M}\right| = \left|(P - Q) \wedge \vec{F}\right| = \left|\vec{F}\right|\left|P - Q\right| \sin\phi = Fd$$
$$d = |P - Q| \sin\phi$$



*Momento do binário

Proposição 1

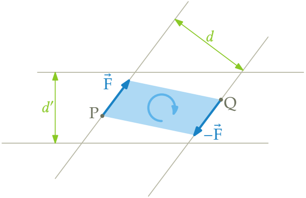
Dois binários são equivalentes se e somente se têm o mesmo vetor momento.

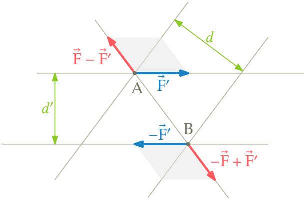
Notando que ambos $(P - A)$ e $(B - Q)$ são vetores paralelos a $\vec{F}$:

$$\vec{M} = (P - Q) \wedge \vec{F}$$
$$= [(P - A) + (A - B) + (B - Q)] \wedge \vec{F}$$
$$= (A - B) \wedge \vec{F}$$

Ainda, como $\vec{F} - \vec{F}'$ é paralelo a $(A - B)$:

$$\vec{M} = (A - B) \wedge [\vec{F}' + (\vec{F} - \vec{F}')] = (A - B) \wedge \vec{F}'$$



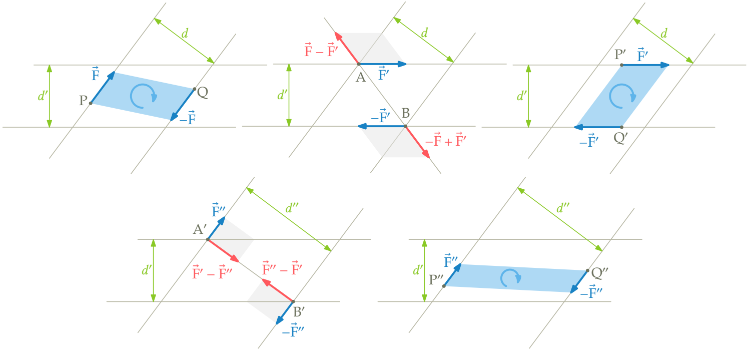


*Momento do binário

Notando que ambos $(A - P')$ e $(Q' - B)$ são vetores paralelos a $\vec{F}'$:

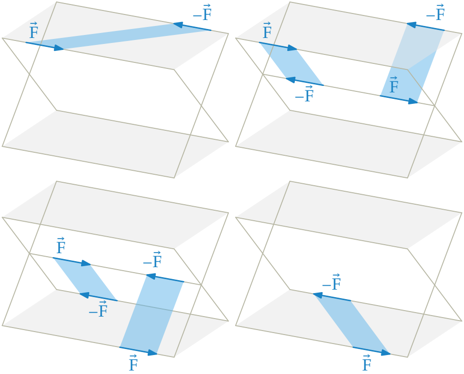
$$\vec{M} = [(A - P') + (P' - Q') + (Q' - B)] \wedge \vec{F}' = (P' - Q') \wedge \vec{F}'$$

Analogamente: $\vec{M} = (A' - B') \wedge \vec{F}' = (A' - B') \wedge \vec{F}'' = (P'' - Q'') \wedge \vec{F}''$.



*Momento do binário

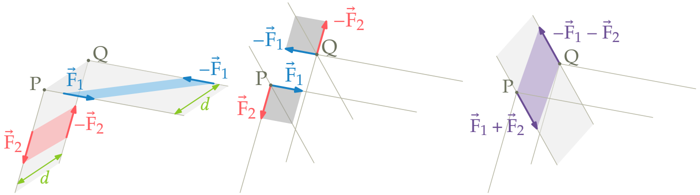
O momento $\vec{M}$ enquanto **vetor livre** não está associado a nenhum plano específico. Para que dois binários sejam equivalentes não é necessário que eles estejam no mesmo plano, apenas que os planos sejam paralelos.



*Momento do binário

Proposição 2

Um sistema formado por dois ou mais binários é equivalente a um único binário cujo momento é igual à soma dos momentos de cada um dos binários originais.



$$\vec{M} = (P - Q) \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = (P - Q) \wedge \vec{F}_1 + (P - Q) \wedge \vec{F}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

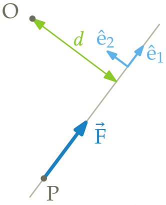
Um vetor **momento** é uma **representação matemática completa de um binário** e de **toda a classe de binários** a ele **equivalentes**.

Momento de uma força com respeito a um **polo**

Definição

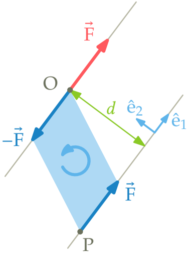
O **momento de uma força** $(\vec{F}, P)$ **com respeito a um polo** O, denotado por $\vec{M}_O$, é a **medida do binário** produzido quando se **transporta a força** de sua linha de ação original, passante por P, para uma **linha de ação paralela passante por** O:

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$$



Dado um polo O arbitrário, qualquer força $(\vec{F}, P)$ que possa ser modelada como **vetor deslizante** equivale ao sistema formado por uma força de mesma intensidade, direção e sentido $(\vec{F}, O)$, aplicada em O, e um binário de momento $\vec{M}_O$.

$$\{(\vec{F}, P)\} \sim \{\underbrace{(\vec{F}, P), (-\vec{F}, O)}_{\text{binário de momento } \vec{M}_O}, (\vec{F}, O)\} \sim \{(\vec{F}, O), \vec{M}_O\}$$



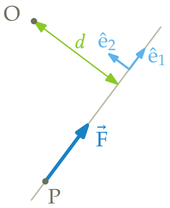
Momento de uma força com respeito a um **polo**

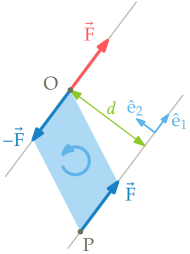
P1 Se o polo O escolhido já pertence à linha de ação da força $(\vec{\mathrm{F}}, \mathrm{P})$, então o momento $\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}$ é nulo.

P2 Consistentemente com o modelo de força como **vetor deslizante**, o momento de uma força **independe do ponto** de aplicação considerado **ao longo de sua própria linha de ação**. Se Q é um ponto sobre a linha de ação de $(\vec{\mathrm{F}}, \mathrm{P})$ então $(\mathrm{P} - \mathrm{Q})$ é um vetor paralelo a $\vec{\mathrm{F}}$:

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}} &= (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \wedge \vec{\mathrm{F}} \\ &= [(\mathrm{P} - \mathrm{Q}) + (\mathrm{Q} - \mathrm{O})] \wedge \vec{\mathrm{F}} \\ &= (\mathrm{Q} - \mathrm{O}) \wedge \vec{\mathrm{F}}\end{aligned}$$

P3 A intensidade de $\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}$ é igual ao produto da intensidade da força pela distância do polo O à sua linha de ação (trata-se, portanto, da **distância de um ponto a uma reta**).



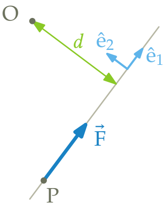


Momento de uma força com respeito a um **eixo**

Definição

O **momento de uma força** $(\vec{\mathrm{F}}, \mathrm{P})$ **com respeito a um eixo** Ou, passante por um ponto O e orientado por um vetor unitário $\hat{\mathrm{u}}$, é o **escalar** M_{Ou} que representa a componente do vetor $\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}$ sobre este eixo, ou seja:

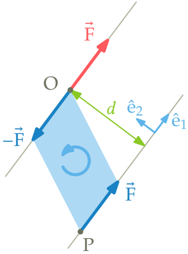
$$M_{\mathrm{Ou}} = \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}} \cdot \hat{\mathrm{u}}$$



P1 O momento de uma força com respeito a um eixo independe do polo escolhido sobre este eixo.

P2 o momento de uma força com respeito a um **eixo coplanar** (paralelo ou concorrente) à sua linha de ação é **nulo**.

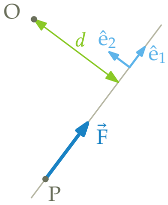
P3 o momento de uma força com respeito a um **eixo reverso** à sua linha de ação é **não-nulo**.

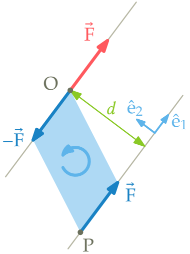


*Momento de uma força com respeito a um **eixo**

Para verificar a propriedade **P1**, considere um ponto A do eixo Ou. Neste caso, $(\mathrm{A}-\mathrm{O})$ é paralelo a $\hat{\mathrm{u}}$ e, portanto $(\mathrm{A}-\mathrm{O}) \wedge \vec{\mathrm{F}}$ é ortogonal a $\hat{\mathrm{u}}$; assim:

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{Ou}} &= \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}} \cdot \hat{\mathrm{u}} \\
&= \left[(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \vec{\mathrm{F}}\right] \cdot \hat{\mathrm{u}} \\
&= \left[\big((\mathrm{P}-\mathrm{A}) + (\mathrm{A}-\mathrm{O})\big) \wedge \vec{\mathrm{F}}\right] \cdot \hat{\mathrm{u}} \\
&= \left[(\mathrm{P}-\mathrm{A}) \wedge \vec{\mathrm{F}}\right] \cdot \hat{\mathrm{u}} + \left[(\mathrm{A}-\mathrm{O}) \wedge \vec{\mathrm{F}}\right] \cdot \hat{\mathrm{u}} \\
&= \left[(\mathrm{P}-\mathrm{A}) \wedge \vec{\mathrm{F}}\right] \cdot \hat{\mathrm{u}} \\
&= \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{A}} \cdot \hat{\mathrm{u}}
\end{aligned}
$$



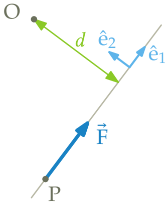


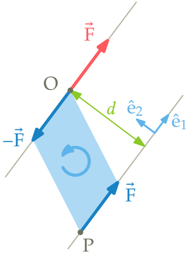
*Momento de uma força com respeito a um **eixo**

Para verificar as propriedades **P2** e **P3** considere os versores $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$ sobre o plano definido por $(\vec{F}, P)$ e O, com $\hat{e}_1 \parallel \vec{F}$, e o versor $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$ normal a este plano. Existe um escalar λ tal que $(P - O) = \lambda\hat{e}_1 - d\hat{e}_2$; assim:

$$
\begin{aligned}
M_{Ou} &= \left[(P - O) \wedge \vec{F}\right] \cdot \hat{u} \\
&= \left[(\lambda\hat{e}_1 - d\hat{e}_2) \wedge F\hat{e}_1\right] \cdot \hat{u} \\
&= Fd(\hat{e}_3 \cdot \hat{u})
\end{aligned}
$$

Portanto, $M_{Ou} \neq 0$ somente se $\hat{u}$ for não-ortogonal a $\hat{e}_3$. Como $\hat{e}_3$ é normal ao plano definido pela força e pelo polo, tal condição implica que o eixo Ou não pode estar contido neste plano.





1 Sistemas de forças concorrentes e paralelas
2 Centro de massa
3 Binário e momento
4 Momento de uma força
5 Equivalência entre sistemas de força
6 Estática: condições necessárias para o equilíbrio
7 Classificação das estruturas

Equivalência entre sistemas de força

Considere um sistema de forças genérico em que as forças possam ser modeladas como **vetores deslizantes**. Assuma, em princípio, um sistema de forças concentradas:

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathrm{F}}_i, \mathrm{P}_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Escolhendo um polo A, pode-se criar, um sistema equivalente a $\mathcal{F}$ adicionando pares de forças opostas $(\vec{\mathrm{F}}_i, \mathrm{A})$ e $(-\vec{\mathrm{F}}_i, \mathrm{A})$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, todas aplicadas em A.

$$\mathcal{F} \sim \underbrace{\{(\vec{\mathrm{F}}_i, \mathrm{A}) : i = 1, 2, \ldots, n\}}_{n \text{ forças aplicadas em A}} \cup \underbrace{\{(\vec{\mathrm{F}}_i, \mathrm{P}_i), (-\vec{\mathrm{F}}_i, \mathrm{A}) : i = 1, 2, \ldots, n\}}_{n \text{ binários}}$$

$$\mathcal{F} \sim \{(\vec{\mathrm{R}}, \mathrm{A}), \vec{\mathrm{M}}_\mathrm{A}\} \quad \text{com} \quad \vec{\mathrm{R}} = \sum_{k=1}^{n} \vec{\mathrm{F}}_k \quad \text{e} \quad \vec{\mathrm{M}}_\mathrm{A} = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge \vec{\mathrm{F}}_i$$

Equivalência entre sistemas de força e mudança de polo de momento

Teorema

(i) Todo **sistema de forças** em que elas possam ser modeladas como **vetores deslizantes** é **equivalente** a um sistema formado por **no máximo duas forças** ou por **uma força e um binário**.

(ii) Dois sistemas de forças modeladas como vetores deslizantes são equivalentes entre si se, e somente se, suas resultantes de força $\vec{R}$ e de momentos $\vec{M}_O$ são idênticas, qualquer seja o polo O escolhido.

Em particular se, em vez de A quisermos utilizar outro polo B:

$$\mathcal{F} \sim \{(\vec{R}, A), \vec{M}_A\} \sim \{(\vec{R}, B), \underbrace{(-\vec{R}, B), (\vec{R}, A), \vec{M}_A}_{\vec{M}_B}\} \sim \{(\vec{R}, B), \vec{M}_B\}$$

$$\boxed{\vec{M}_B = \vec{M}_A + (A - B) \wedge \vec{R}}$$

Resumo

- Um sistema de **forças concorrentes em um ponto P equivale a uma única força $(\vec{\mathrm{R}}, \mathrm{P})$** aplicada em P.
- Um sistema de **forças paralelas de resultante não-nula equivale a uma única força $(\vec{\mathrm{R}}, \mathrm{C})$** aplicada no **centro de forças paralelas**.
- Um **binário**, sistema de **forças paralelas de resultante nula, não é equivalente a uma única força**.
- Um vetor **momento** é uma **representação matemática completa de um binário** e de **toda a classe de binários** a ele **equivalentes**.
- Dois sistemas de forças modeladas como **vetores deslizantes** são **equivalentes** se, e somente se, suas resultantes de força $\vec{\mathrm{R}}$ e de momentos $\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}$ são idênticas, qualquer seja o polo O escolhido:

$$\vec{\mathrm{R}} = \sum_{k=1}^{n} \vec{\mathrm{F}}_k \quad \text{e} \quad \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}} = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{P}_i - \mathrm{O}) \wedge \vec{\mathrm{F}}_i$$

Condição necessária para o equilíbrio

- **Estática** é o estudo das condições necessárias para o **equilíbrio** de corpos materiais e de **estruturas** formadas por múltiplos corpos.
- A **condição necessária** para o equilíbrio de um corpo é que o sistema formado por todas as forças sobre ele atuantes, ativas e reativas, seja **equivalente a zero**, ou seja:

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \vec{0}, \text{ para algum polo O}$$

No espaço (3D)	
$M_{Ox} = 0$	$R_x = 0$
$M_{Oy} = 0$	$R_y = 0$
$M_{Oz} = 0$	$R_z = 0$

No plano (2D)
$M_{Oz} = 0$
$R_x = 0$
$R_y = 0$

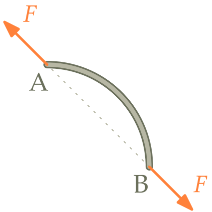
- No caso do equilíbrio de uma estrutura, os sistemas de forças atuantes sobre cada um dos corpos constituintes é equivalente a zero, o que implica que o sistema formado por todas as forças atuantes na estrutura também é equivalente a zero.

Casos elementares de equilíbrio

Corpo em equilíbrio sob ação exclusiva de 2 forças

As forças devem ter mesma intensidade, direção e linha de ação, ao passo que suas orientações devem ser opostos.

*De fato, pela condição $\vec{R} = \vec{0}$, os dois vetores de força devem ser opostos. Caso as linhas de ação fossem distintas, tal sistema seria equivalente a um binário, o que tornaria impossível atender à condição $\vec{M}_O = \vec{0}$. Exemplos típicos deste caso são cabos, fios e barras de treliça ideais.



Casos elementares de equilíbrio

Corpo em equilíbrio sob ação exclusiva de 3 forças

As três forças devem ser **coplanares** constituindo um sistema de forças paralelas ou um sistema de forças concorrentes.

*Considere o sistema de forças $\{(\vec{F}_1, P_1), (\vec{F}_2, P_2), (\vec{F}_3, P_3)\}$:

- A menos que as três linhas de ação coincidam (o que é um caso consistente com a proposição enunciada), é possível usar o modelo de vetor deslizante para evitar que os pontos de aplicação das três forças sejam colineares, de tal forma que P_1, P_2 e P_3 definam um plano.
- Para garantir a condição de equilíbrio de momentos, é necessário que o momento com respeito a qualquer eixo seja nulo. Com respeito ao eixo P_1P_2, por exemplo, $(\vec{F}_1, P_1)$ e $(\vec{F}_2, P_2)$ não produzem momento. Para haver equilíbrio, a linha de ação de $(\vec{F}_3, P_3)$ deve ser coplanar a P_1P_2e, portanto, contida no plano $P_1P_2P_3$. O mesmo argumento pode ser aplicado às demais forças.
- Sendo coplanares, se não forem paralelas, as linhas de ação de pelo menos duas das forças, digamos $(\vec{F}_1, P_1)$ e $(\vec{F}_2, P_2)$ devem concorrer em um ponto P. Para satisfazer $\vec{M}_P = \vec{0}$, portanto, a linha de ação de $(\vec{F}_3, P_3)$ deve passar por P.

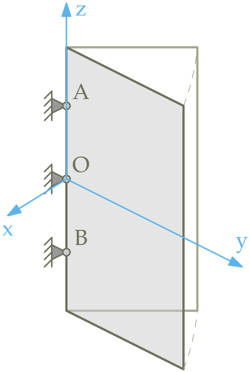
1. Sistemas de forças concorrentes e paralelas
2. Centro de massa
3. Binário e momento
4. Momento de uma força
5. Equivalência entre sistemas de força
6. Estática: condições necessárias para o equilíbrio
7. Classificação das estruturas

Classificação das estruturas

Estrutura hipostática

Estrutura em que os vínculos presentes não são capazes de restringir algum movimento de translação ou rotação.

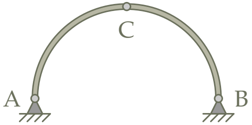
Na figura ao lado, temos o modelo de uma porta, em que há 3 elementos de vínculo do tipo articulação sobre o mesmo eixo vertical Oz.
As três forças de reação, portanto, não produzem momento com respeito ao eixo Oz, sendo assim incapazes de se contrapor à rotação induzida em torno deste eixo por qualquer força cuja linha de ação seja reversa a Oz, aplicada quando abrimos ou fechamos a porta. Por outro lado, sob ação exclusiva do peso próprio da porta (linha de ação paralela a Oz), o equilíbrio é possível.



Classificação das estruturas

Estrutura isostática

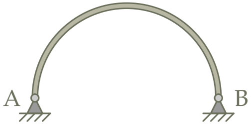
Estrutura em que os vínculos presentes são capazes de **restringir todos os movimentos** de translação e rotação e a **solução** do sistema de equações de equilíbrio é **única**: é necessário que o número de componentes de reação (incógnitas) seja igual ao número de equações de equilíbrio.



2 corpos no plano ⇒ 6 equações
3 articulações ⇒ 6 incógnitas

Estrutura hiperestática

Estrutura em que os vínculos presentes são capazes de **restringir todos os movimentos** de translação e rotação e há **infinitas soluções** para o sistema de equações de equilíbrio.



1 corpo no plano ⇒ 3 equações
2 articulações ⇒ 4 incógnitas

Procedimento para classificação de uma estrutura

1. Analisar a **natureza dos vínculos** de uma estrutura para verificar se a mesma é **hipostática**.
   - Esta análise **não depende do número** de componentes de reação presentes no problema, mas da capacidade destas reações de se contrapor a quaisquer possíveis esforços ativos.
   - Caso as resultantes de forças e momentos do subsistema formado apenas pelos esforços de reação não sejam capazes de produzir componentes em todas as direções possíveis, a estrutura é hipostática.
2. Caso a estrutura não seja hipostática, verifique o número de soluções do sistema formado pelas equações de equilíbrio. Se a **solução** for **única** (note que isto requer que o **número de equações** seja **igual ao número de componentes de reação incógnitas**), o sistema é **isostático**. Se houver **infinitas soluções**[1], o sistema é **hiperestático**.

[1] Note que, por se tratar de um sistema linear, o sistema constituído pelas equações de equlíbrio pode ter nenhuma, somente uma ou infinitas soluções. Não há outra possibilidade com número finito (superior a 1) de soluções admissíveis.

Perguntas?

reorsino@usp.br