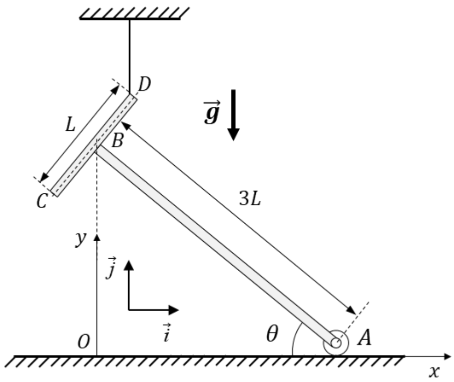
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337   Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I (Reoferecimento) – Prova Substitutiva – 19 de Julho de 2022
Duração da Prova: 110 minutos (Início: 18:00 – Término: 19:50)
Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos.

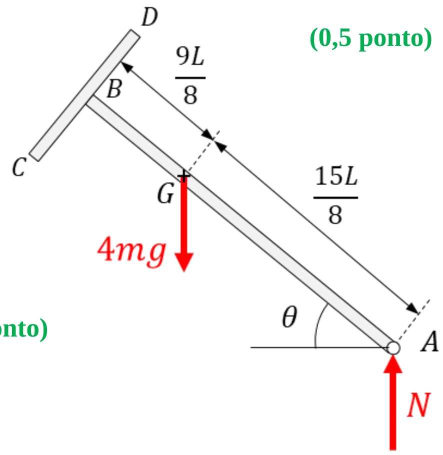
Questão 1 (3,5 pontos). A peça $ABCD$ em forma de "**T**" mostrada na figura é composta por duas barras delgadas e homogêneas AB e CD, soldadas uma à outra. A barra AB tem comprimento $3L$ e massa $3m$, e a barra CD tem comprimento L e massa m. A peça é vinculada em A a um rolete, de massa desprezível, que se desloca sem atrito sobre o plano horizontal. A peça é mantida suspensa e em repouso por meio de um fio conectado em D. Repentinamente, esse fio se rompe e a peça passa a mover-se livremente no plano Oxy. Para o instante imediatamente posterior ao rompimento do fio e utilizando o sistema de coordenadas $Oxyz$ de versores $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$, pede-se:



a) O diagrama de corpo livre da peça $ABCD$.
b) As coordenadas do centro de massa e o momento de inércia J_{Gz} da peça $ABCD$.
c) A aceleração do centro de massa da peça $ABCD$.
d) A aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ da peça $ABCD$.
e) A força de reação no rolete A.

RESOLUÇÃO

a) Veja diagrama de corpo livre ao lado.



b) Da definição de baricentro, tem-se para a peça:

$$(G-O)=\frac{\sum m_i(P_i-O)}{\sum m_i} \quad \Rightarrow \quad (G-O)=\frac{3L}{8}\left(3\cos\theta\vec{\mathbf{i}}+5\mathrm{sen}\theta\vec{\mathbf{j}}\right) \quad \text{(0,5 ponto)}$$

Já o momento de inércia J_{Gz} da peça é dado por:

$$J_{Az}=J_{Gz}+4m(d_{GA})^2 \quad \Rightarrow \quad J_{Gz}=J_{Az}-4m(d_{GA})^2 \qquad \text{(b1)}$$

$$J_{Az}=J_{Az}^{AB}+J_{Az}^{CD}=\left[3m\frac{(3L)^2}{12}+3m\left(\frac{3L}{2}\right)^2\right]+\left[\frac{mL^2}{12}+m(3L)^2\right]=\frac{217mL^2}{12} \qquad \text{(b2)}$$

Substituindo (b2) em (b1), obtém-se:

$$J_{Gz}=\frac{217mL^2}{12}-4m\left(\frac{15L}{8}\right)^2=\frac{217mL^2}{12}-4m\frac{225L^2}{64}=\frac{193mL^2}{48} \qquad \text{(b3)} \qquad \text{(0,5 ponto)}$$

c) Utilizando a expressão geral do campo de acelerações para corpo rígido, tem-se:

$$\vec{a}_G=\vec{a}_A+\dot{\vec{\omega}}\wedge(G-A)+\underbrace{\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(G-A)]}_{=\vec{\mathbf{0}},\ \text{liberado do repouso}}$$

Sendo $\vec{a}_A=a_A\vec{\mathbf{i}}$, $\dot{\vec{\omega}}=\dot{\omega}\vec{\mathbf{k}}$ e $(G-A)=\frac{15L}{8}\left(-\cos\theta\vec{\mathbf{i}}+\mathrm{sen}\theta\vec{\mathbf{j}}\right)$, tem-se:

$$\vec{a}_G=\left(a_A-\frac{15L\mathrm{sen}\theta}{8}\dot{\omega}\right)\vec{\mathbf{i}}-\left(\frac{15L\cos\theta}{8}\dot{\omega}\right)\vec{\mathbf{j}} \qquad \text{(c1)} \qquad \text{(0,5 ponto)}$$

d-e) Aplicando o TQMA à peça com respeito ao seu baricentro G (movimento plano), tem-se:

$$\vec{\boldsymbol{M}}_G^{ext} = \underbrace{4m(G-G)\wedge\vec{\boldsymbol{a}}_G}_{=\vec{\mathbf{0}}} + (J_{Gz}\dot{\omega})\vec{\mathbf{k}} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{15L\cos\theta}{8}N\right)\vec{\mathbf{k}} = (J_{Gz}\dot{\omega})\vec{\mathbf{k}} \quad\Rightarrow\quad \dot{\omega} = \frac{15NL\cos\theta}{8J_{Gz}} \qquad \text{(d1)}$$

(0,5 ponto)

Aplicando o TR à peça, tem-se:

$$\vec{\boldsymbol{R}}_{ext} = 4m\vec{\boldsymbol{a}}_G = (N-4mg)\vec{\mathbf{j}}$$

$$4m\left(a_A - \frac{15L\mathrm{sen}\theta}{8}\dot{\omega}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad a_A = \frac{15L\mathrm{sen}\theta\dot{\omega}}{8} \qquad \text{(d2)}$$

(0,5 ponto)

$$4m\left(-\frac{15L\cos\theta}{8}\dot{\omega}\right) = N - 4mg \quad\Rightarrow\quad N = 4mg - \frac{15mL\cos\theta\dot{\omega}}{2} \qquad \text{(d3)}$$

Resolvendo o sistema de equações definido pelas equações (d1)-(d3) e substituindo o valor de J_{Gz} (eq. b3), tem-se:

$$\dot{\omega} = \left(\frac{360\cos\theta}{193+675\cos^2\theta}\right)\left(\frac{g}{L}\right), \quad N = \frac{772mg}{193+675\cos^2\theta}, \quad a_A = \frac{675g\cos\theta\sin\theta}{193+675\cos^2\theta}$$

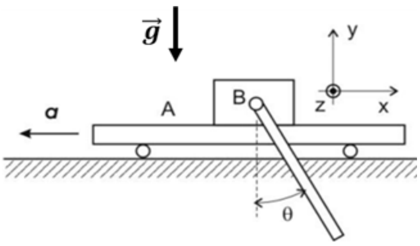
(0,5 ponto)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 2 (3,5 pontos). A plataforma A, de massa desprezível, mostrada na figura, se desloca para a esquerda com uma aceleração a constante. Sobre a plataforma, apoia-se um bloco B de massa m. Ao bloco, por sua vez, está articulada uma barra de comprimento L e massa m. Sabendo que o coeficiente de atrito entre o bloco e a plataforma é μ, pede-se:

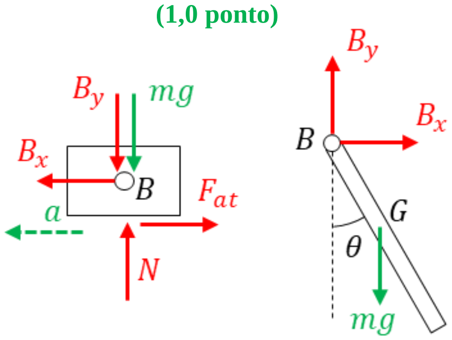


a) Os diagramas de corpo livre do bloco e da barra.
b) A aceleração a necessária para manter a barra em um dado ângulo θ constante.
c) As forças na extremidade B da barra.
d) O valor máximo de a para o qual o bloco não escorrega.

RESOLUÇÃO

(1,0 ponto)

a) Veja diagrama de corpo livre ao lado.



b) Aplicando o TQMA à barra com respeito a B (movimento plano), tem-se:

$$\vec{M}_B^{ext} = m(G - B) \wedge \vec{a}_B + (J_{Bz}\dot{\omega})\vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{a}_B = -a\vec{\mathbf{i}}, \ J_{Bz} = \frac{mL^2}{3} \quad (1)$$

Portanto:

$$\left(-\frac{mgL\sin\theta}{2}\right)\vec{\mathbf{k}} = \frac{mL}{2}(\sin\theta\vec{\mathbf{i}} - \cos\theta\vec{\mathbf{j}}) \wedge (-a\vec{\mathbf{i}}) + \left(\frac{mL^2\dot{\omega}}{3}\right)\vec{\mathbf{k}}$$

$$-\frac{mgL\sin\theta}{2} = -\frac{maL\cos\theta}{2} + \frac{mL^2\dot{\omega}}{3} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{3}{2L}(a\cos\theta - g\sin\theta)$$ **(1,0 ponto)**

Para manter a barra em um dado ângulo θ constante, então $\omega = \dot{\omega} = 0$. Logo: $a = g\tan\theta$ (2)

c) Aplicando o TR à barra, tem-se:

$$\vec{R}_{ext} = m\vec{a}_G, \qquad \vec{R}_{ext} = (X_B)\vec{\mathbf{i}} + (Y_B - mg)\vec{\mathbf{j}}, \qquad \vec{a}_G = \vec{a}_B = -a\vec{\mathbf{i}} \ \ (\text{pois}, \omega = \dot{\omega} = 0)$$

$$X_B = -ma \quad \Rightarrow \quad X_B = -mg\tan\theta$$

$$Y_B - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B = mg$$

(0,5 ponto)

Aplicando o TR ao bloco, tem-se:

$$\vec{R}_{ext} = m\vec{a}_B, \qquad \vec{R}_{ext} = (-X_B + F_{at})\vec{\mathbf{i}} + (N - Y_B - mg)\vec{\mathbf{j}}, \qquad \vec{a}_B = -a\vec{\mathbf{i}}$$

$$F_{at} = X_B - ma \quad \Rightarrow \quad F_{at} = -2mg\tan\theta$$

$$(N - Y_B - mg) = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 2mg$$

(0,5 ponto)

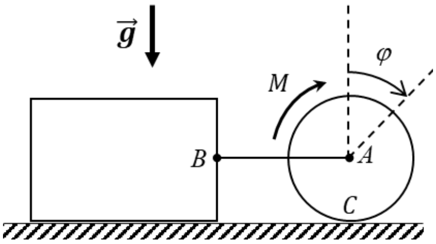
d) Para que o bloco não escorregue:

$$|F_{at}| \leq \mu|N| \quad \Rightarrow \quad 2mg\tan\theta \leq \mu 2mg \quad \Rightarrow \quad a \leq \mu g$$ **(0,5 ponto)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



Questão 3 (3,0 pontos). Um disco de centro A, massa m e raio R, é ligado a um bloco B de massa $4m$ através de uma barra AB, de massa desprezível. O sistema parte do repouso ($\varphi(0) = 0$ e $\dot{\varphi}(0) = 0$) sob a ação de um binário M constante. Sabendo que o coeficiente de atrito nos contatos é μ e que o disco rola sem escorregar, pede-se:

- **a)** A expressão da energia cinética do sistema em função da velocidade angular $\dot{\varphi}$ do disco.
- **b)** A trabalho realizado pelos esforços atuantes no sistema, em função de φ.
- **c)** A velocidade e a aceleração angulares do disco.
- **d)** A força na barra e as componentes da força de contato em C.

RESOLUÇÃO

a) As velocidades de A e B são:

$$v_A = v_B = \dot{\varphi}R$$

A expressão da energia cinética do sistema fica:

$$T = T_{\text{disco}} + T_{\text{bloco}} = \left(\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}J_{Az}\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}4mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{11m}{4}(\dot{\varphi}R)^2$$ **(1,0 ponto)**

b) Apenas a força de atrito e o momento realizam trabalho no sistema, logo:

$$\tau = M\phi - F_{atB}R\varphi = (M - 4\mu mgR)\varphi$$ **(1,0 ponto)**

c) Aplicando o Teorema da Energia Cinética:

$$\Delta T = \tau \quad \Rightarrow \quad T_0 = 0$$

A partir dos itens a) e b), tem-se:

$$\frac{11m}{4}(\dot{\varphi}R)^2 = (M - 4\mu mgR)\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{(M-4\mu mgR)\phi}{11m}}$$ **(0,25 ponto)**

Derivando com relação ao tempo:

$$\ddot{\varphi} = \frac{2(M-4\mu mgR)}{11mR^2}$$ **(0,25 ponto)**

d) Aplicando o TQMA ao disco em relação ao polo A (movimento plano):

$$(J_A\ddot{\varphi}) = (M - F_{atC}R) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\ddot{\varphi} = (M - F_{atC}R) \quad \Rightarrow \quad F_{atC} = \frac{M}{R} - \frac{m}{2}R\ddot{\varphi}$$ **(0,25 ponto)**

Aplicando o TMB ao disco na direção horizontal, tem-se:

$$(ma_A) = (F_{atC} - F_{AB}) \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = F_{atC} - ma_A = \frac{M}{R} - \frac{m}{2}R\ddot{\varphi} - mR\ddot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = \frac{M}{R} - \frac{3m}{2}R\ddot{\varphi}$$

(0,25 ponto)