ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

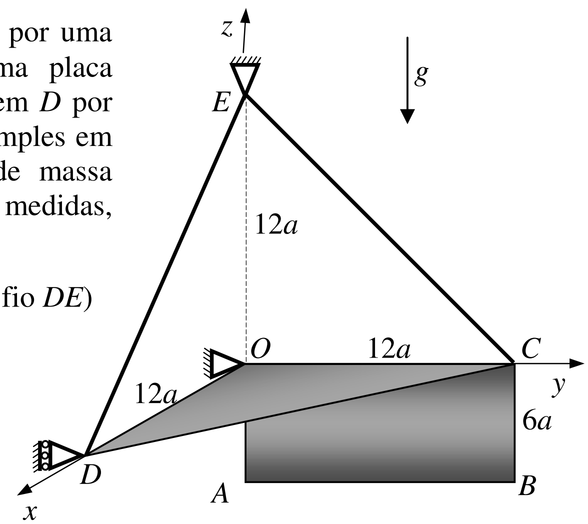
PME 2100 – MECÂNICA A – Prova Substitutiva – 7 de dezembro de 2010

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (3,5 pontos) O sólido da figura é formado por uma placa triangular *COD* (no plano *Oxy*) soldada a uma placa retangular *ABCO* (no plano *Oyz*). O sólido é vinculado em *D* por um apoio simples cujo plano é o *Oxz*, uma articulação simples em *O*, e por meio dos fios *DE* e *CE*, inextensíveis e de massa desprezível. As forças de tração nos cabos foram medidas, obtendo-se os seguintes valores:

$F_{CE} = \dfrac{5\sqrt{2}}{12}F$ (força no fio *CE*), $F_{DE} = \dfrac{2\sqrt{2}}{12}F$ (força no fio *DE*)

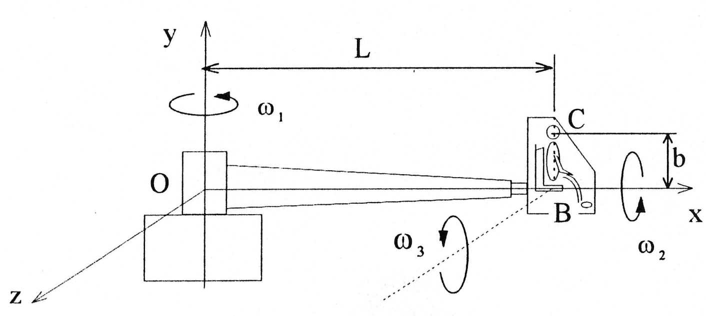
A componente vertical da reação no vínculo em *O* também foi medida, obtendo-se $F_{Oz} = \dfrac{5}{12}F$.



a) Desenhe o diagrama de corpo livre do sólido.
b) Determine o peso *P* do sólido, as coordenadas x_G e y_G de seu baricentro e as reações nos vínculos *D* e *O*. Observe que não se sabe a priori se as placas são homogêneas.
c) Determine a posição do baricentro do sólido supondo que as placas são homogêneas, de mesmo material e espessura desprezível.

2ª Questão (3,0 pontos) A figura mostra um simulador de vôo, para o treinamento de astronautas. A cabine pode girar em torno do eixo OB do braço principal horizontal. O sistema de eixos cartesianos Oxyz é tal que o Ox tem sempre a direção de OB e o Oy é vertical. O assento, no qual o astronauta se encontra, pode girar em relação à cabine, em torno de um eixo que, <u>no instante considerado</u>, é paralelo a Oz. O braço principal gira com velocidade angular ω_1, constante, em torno da vertical, a cabine gira com velocidade angular ω_2, constante, relativa ao braço principal e o assento gira com velocidade angular ω_3, constante, relativa à cabine. <u>Na posição indicada</u>, usando a base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ cujos versores correspondem, respectivamente, aos sentidos positivos de Ox, Oy e Oz e <u>considerando o braço *OB* como referencial móvel</u>, determine, para a cabeça do astronauta (ponto C):

a) a velocidade relativa;
b) a velocidade de arrastamento;
c) a velocidade absoluta;
d) a aceleração relativa;
e) a aceleração de arrastamento;
f) a aceleração absoluta.



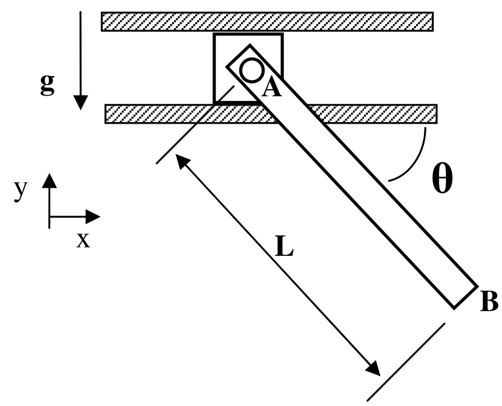
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos) A barra homogênea AB possui massa **m** e comprimento **L.** Através da articulação em A, conecta-se a um bloco de massa desprezível. O bloco, por sua vez, pode deslizar sem atrito no interior da guia horizontal mostrada. No instante inicial, o sistema está em repouso com a barra formando ângulo θ com a horizontal. Em determinado momento, a barra é solta. Pedem-se, em função dos parâmetros dados:

a) o diagrama de corpo livre da barra;
b) o vetor aceleração angular da barra para este momento;
c) o vetor aceleração do baricentro da barra para este momento;
d) qual é o movimento do baricentro? Justifique sua resposta.



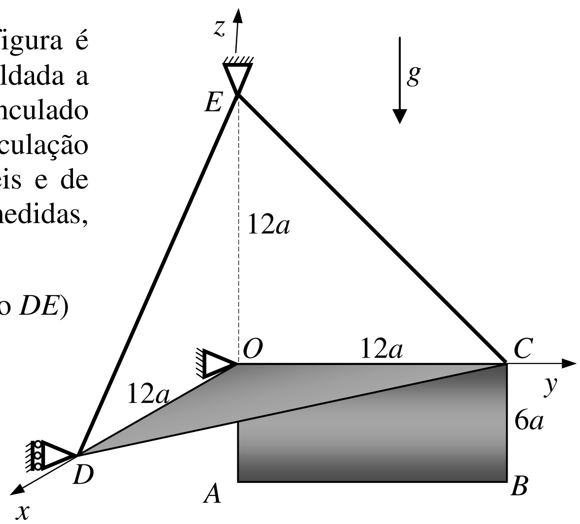
Dado: para uma barra homogênea de massa m e comprimento L, $J_{Gz} = mL^2/12$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da Prova Substitutiva– 7 de dezembro de 2010



Resolução da 1ª Questão (3,5 pontos) O sólido da figura é formado por uma placa triangular *COD* (no plano *Oxy*) soldada a uma placa retangular *ABCO* (no plano *Oyz*). O sólido é vinculado em *D* por um apoio simples cujo plano é o *Oxz*, uma articulação simples em *O*, e por meio dos fios *DE* e *CE*, inextensíveis e de massa desprezível. As forças de tração nos cabos foram medidas, obtendo-se os seguintes valores:

$F_{CE} = \dfrac{5\sqrt{2}}{12}F$ (força no fio *CE*), $F_{DE} = \dfrac{2\sqrt{2}}{12}F$ (força no fio *DE*)

A componente vertical da reação no vínculo em *O* também foi medida, obtendo-se $F_{Oz} = \dfrac{5}{12}F$.

a) Desenhe o diagrama de corpo livre do sólido.

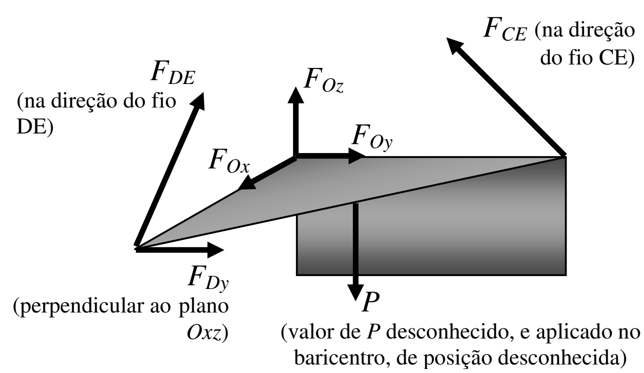
b) Determine o peso *P* do sólido, as coordenadas x_G e y_G de seu baricentro e as reações nos vínculos *D* e *O*. Observe que não se sabe a priori se as placas são homogêneas.

c) Determine a posição do baricentro do sólido supondo que as placas são homogêneas, de mesmo material e espessura desprezível. Compare com o resultado obtido no item (b) e comente.

Resolução:

a) Diagrama de corpo livre do sólido:

(1,0)



b) Impondo as condições de equilíbrio:

$$\sum M_{Ox} = 0 \Rightarrow P \cdot y_G - F_{CE}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 12a = 0 \quad \Rightarrow \quad P \cdot y_G = F_{CE}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 12a = \frac{5\sqrt{2}}{12}F\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 12a \quad \Rightarrow \quad y_G = 5a$$

$$\sum M_{Oy} = 0 \Rightarrow P \cdot x_G - F_{DE}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 12a = 0 \quad \Rightarrow \quad P \cdot x_G = F_{DE}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 12a = \frac{2\sqrt{2}}{12}F\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 12a \quad \Rightarrow \quad x_G = 2a \quad (1,5)$$

$$\sum M_{Oz} = 0 \Rightarrow F_{Dy}\cdot 12a = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Dy} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Ox} - F_{DE}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ox} = F_{DE}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{12}F\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad F_{Ox} = \frac{F}{6}$$

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{Dy} + F_{Oy} - F_{CE}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Oy} = F_{CE}\frac{\sqrt{2}}{2} - F_{Dy} = \frac{5\sqrt{2}}{12}F\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Oy} = \frac{5}{12}F$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{Oz} + F_{DE}\frac{\sqrt{2}}{2} + F_{CE}\frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P = F_{Oz} + F_{DE}\frac{\sqrt{2}}{2} + F_{CE}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{12}F + \frac{2\sqrt{2}}{12}F\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{12}F\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad P = F$$

c) A área do triângulo *COD* é $72a^2$, a área do retângulo *ABCO* é também $72a^2$, e, supondo que as placas são homogêneas, de mesmo material e mesma espessura:

$$x_G = \frac{4a \cdot 72a^2 + 0a \cdot 72a^2}{72a^2 + 72a^2} \quad \Rightarrow \quad x_G = 2a$$

$$y_G = \frac{4a \cdot 72a^2 + 6a \cdot 72a^2}{72a^2 + 72a^2} \quad \Rightarrow \quad y_G = 5a \qquad\qquad (1{,}0)$$

$$z_G = \frac{0 \cdot 72a^2 - 3a \cdot 72a^2}{72a^2 + 72a^2} \quad \Rightarrow \quad z_G = -1{,}5a$$

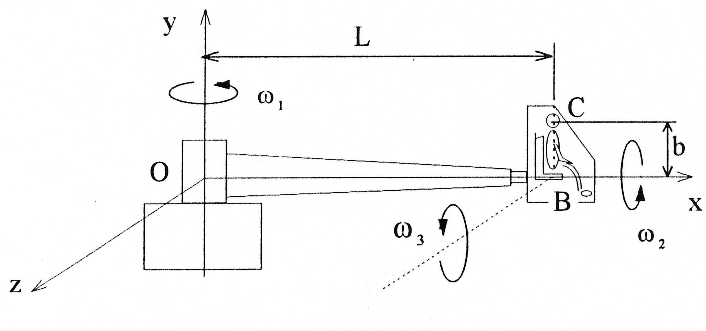
As coordenadas x_G e y_G coincidiram com as coordenadas obtidas no item (b). Não é possível determinar a coordenada z_G usando as condições de equilíbrio.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 2ª Questão (3,0 pontos) A figura mostra um simulador de vôo, para o treinamento de astronautas. A cabine pode girar em torno do eixo OB do braço principal horizontal. O sistema de eixos cartesianos Oxyz é tal que o Ox tem sempre a direção de OB e o Oy é vertical. O assento, no qual o astronauta se encontra, pode girar em relação à cabine, em torno de um eixo que, *no instante considerado*, é paralelo a Oz. O braço principal gira com velocidade angular ω_1, constante, em torno da vertical, a cabine gira com velocidade angular ω_2, constante, relativa ao braço principal e o assento gira com velocidade angular ω_3, constante, relativa à cabine. *Na posição indicada*, usando a base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ cujos versores correspondem, respectivamente, aos sentidos positivos de Ox, Oy e Oz e *considerando o braço OB como referencial móvel*, determine, para a cabeça do astronauta (ponto C):



a) a velocidade relativa;
b) a velocidade de arrastamento;
c) a velocidade absoluta;
d) a aceleração relativa;
e) a aceleração de arrastamento;
f) a aceleração absoluta.

Resolução:

a) velocidade relativa

$$\vec{v}_{C,rel} = \vec{v}_{B,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (C-B)$$

$$\vec{v}_{B,rel} = \vec{0} \quad , \quad \vec{\omega}_{rel} = \omega_2\vec{i} + \omega_3\vec{k} \quad \Rightarrow \vec{v}_{C,rel} = (\omega_2\vec{i} + \omega_3\vec{k}) \wedge b\vec{j} \qquad \boxed{\vec{v}_{C,rel} = -\omega_3 b\vec{i} + \omega_2 b\vec{k}} \quad (0{,}5)$$

b) velocidade de arrastamento

$$\vec{v}_{C,arr} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{arr} \wedge (C-O)$$

$$\vec{v}_O = \vec{0} \quad , \quad \vec{\omega}_{arr} = \omega_1\vec{j} \quad \Rightarrow \vec{v}_{C,arr} = \omega_1\vec{j} \wedge (b\vec{j} + L\vec{i}) \qquad \boxed{\vec{v}_{C,arr} = -\omega_1 L\vec{k}} \quad (0{,}5)$$

c) velocidade absoluta

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C,arr} + \vec{v}_{C,rel} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_C = -\omega_3 b\vec{i} + (\omega_2 b - \omega_1 L)\vec{k}} \quad (0{,}5)$$

d) aceleração relativa

$$\vec{a}_{C,rel} = \vec{a}_{B,rel} + \dot{\vec{\omega}}_{rel} \wedge (C-B) + \vec{\omega}_{rel} \wedge [\vec{\omega}_{rel} \wedge (C-B)] \qquad \vec{a}_{B,rel} = \vec{0} \quad , \quad \dot{\vec{\omega}}_{rel} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{C,rel} = (\omega_2\vec{i} + \omega_3\vec{k}) \wedge [(\omega_2\vec{i} + \omega_3\vec{k}) \wedge b\vec{j}] = (\omega_2\vec{i} + \omega_3\vec{k}) \wedge (\omega_2 b\vec{k} - \omega_3 b\vec{i}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{C,rel} = -b(\omega_2^2 + \omega_3^2)\vec{j}} \quad (0{,}5)$$

e) aceleração de arrastamento

$$\vec{a}_{C,arr} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}}_{arr} \wedge (C-O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (C-|O)] \qquad \vec{a}_O = \vec{0} \quad , \quad \dot{\vec{\omega}}_{arr} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{C,arr} = \omega_1\vec{j} \wedge [\omega_1\vec{j} \wedge (b\vec{j} + L\vec{i})] = \omega_1\vec{j} \wedge (-\omega_1 L\vec{k}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{C,arr} = -\omega_1^2 L\vec{i}} \quad (0{,}5)$$

aceleração complementar (ou aceleração de Coriolis)

$$\vec{a}_{C,cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{C,rel} = 2\omega_1\vec{j} \wedge (-\omega_3 b\vec{i} + \omega_2 b\vec{k}) = 2b\omega_1\omega_3\vec{k} + 2b\omega_1\omega_2\vec{i}$$

f) aceleração absoluta $\quad \vec{a}_C = \vec{a}_{C,arr} + \vec{a}_{C,rel} + \vec{a}_{C,cor}$

$$\boxed{\vec{a}_C = (2b\omega_1\omega_2 - \omega_1^2 L)\vec{i} - b(\omega_2^2 + \omega_3^2)\vec{j} + 2b\omega_1\omega_3\vec{k}} \quad (0{,}5)$$

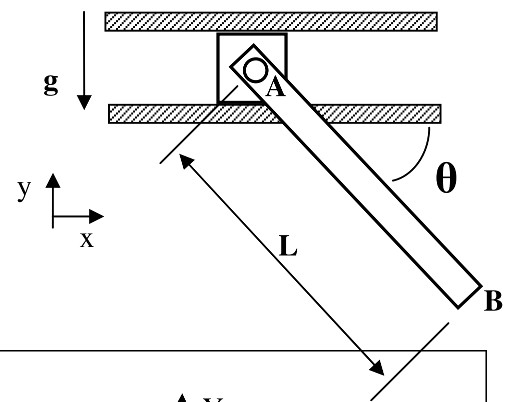
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

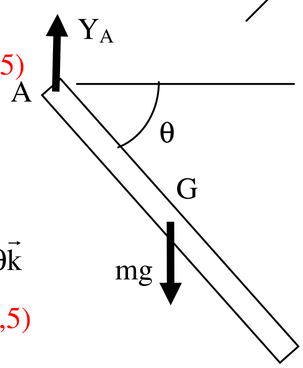
Resolução da 3ª Questão (3,5 pontos) A barra homogênea AB possui massa **m** e comprimento **L.** Através da articulação em A, conecta-se a um bloco de massa desprezível. O bloco, por sua vez, pode deslizar sem atrito no interior da guia horizontal mostrada. No instante inicial, o sistema está em repouso com a barra formando ângulo θ com a horizontal. Em determinado momento, a barra é solta. Pede-se, em função dos parâmetros dados:

a) o diagrama de corpo livre da barra;
b) o vetor aceleração angular da barra, para este momento;
c) o vetor aceleração do baricentro da barra, para este momento;
d) qual é o movimento do baricentro? Justifique sua resposta.



Dado: para uma barra homogênea de massa m e comprimento L, $J_{Gz} = mL^2/12$

Resolução:



TMB: $m\vec{a}_G = (Y_A - mg)\vec{j}$ $\quad \begin{cases} a_{Gx} = 0 & (1) \\ a_{Gy} = \dfrac{1}{m}(Y_A - mg) & (2) \end{cases}$ (0,5) (0,5)

TMA: $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G$

$\vec{H}_G = -J_{zG}\omega\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = -J_{zG}\dot{\omega}\vec{k} = -\dfrac{mL^2}{12}\dot{\omega}\vec{k}$, $\vec{M}_G = -Y_A \dfrac{L}{2}\cos\theta\vec{k}$

(0,5) (0,5)

$\Rightarrow \; Y_A = \dfrac{mL\dot{\omega}}{6\cos\theta}$ (3)

Relação cinemática (no momento em que a barra é solta, sua velocidade angular é nula), assim:

$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)]$ $\qquad \vec{a}_A = a_A\vec{i}$, $\vec{\omega} = \vec{0}$

$\vec{a}_G = a_A\vec{i} - \dot{\omega}\vec{k} \wedge \dfrac{L}{2}(\cos\theta\vec{i} - \text{sen}\theta\vec{j}) = \left(a_A - \dot{\omega}\dfrac{L}{2}\text{sen}\theta\right)\vec{i} - \dot{\omega}\dfrac{L}{2}\cos\theta\vec{j} \Rightarrow a_{Gy} = -\dot{\omega}\dfrac{L}{2}\cos\theta$ (4) (0,5)

Substituindo (3) e (4) em (2): $-\dot{\omega}\dfrac{L}{2}\cos\theta = \dfrac{L\dot{\omega}}{6\cos\theta} - g \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{\omega}} = -\dfrac{6g\cos\theta}{L(1 - 3\cos^2\theta)}\vec{k}}$

(0,5)

Substituindo em (3) e (4): $\boxed{Y_A = \dfrac{mg}{1 - 3\cos^2\theta}}$ e $\boxed{\vec{a}_G = -\dfrac{3g\cos^2\theta}{1 - 3\cos^2\theta}}$

O movimento do baricentro é oscilatório na vertical, já que inicialmente está em repouso e a resultante de força sobre o corpo em qualquer instante é sempre vertical, isto é, não há resultante de força na horizontal, assim $a_{Gy} \neq 0$ e $a_{Gx} = 0$. (0,5)