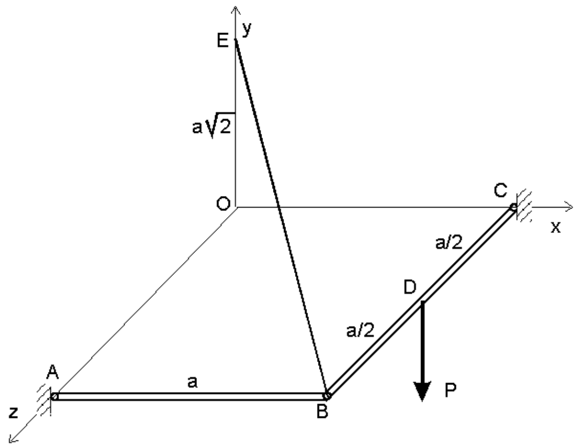
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

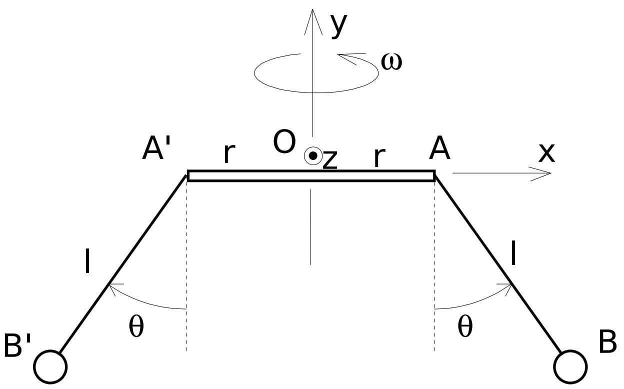
PME 2100 Mecânica A

Prova Substitutiva - Duração 100 minutos – 11 de dezembro de 2007

Questão 1 (3 pontos): A figura mostra a estrutura formada por duas barras AB e BC, sem peso e articuladas nos extremos, e o fio inextensível BE. Uma carga vertical P está aplicada no ponto médio da barra BC. Determine os esforços que atuam em cada barra e no fio.



Questão 2 (3,5 pontos): A barra AA' da figura permanece horizontal, girando com velocidade angular ω constante ao redor do eixo vertical Oy, e tem comprimento 2r. Os fios que ligam as massas B e B' aos pontos A e A' têm comprimento *l* cada um. Considere como referencial móvel a barra AA'. Supondo que os pontos A, A', B e B' permanecem num mesmo plano vertical, determine



em função de θ, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ e das constantes dadas, e usando o sistema de coordenadas indicado:

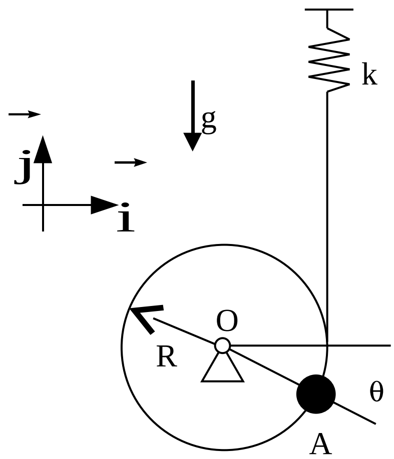
a) as velocidades de arrastamento $v_{B,a}$, relativa $v_{B,r}$ e absoluta v_B de B;

b) as acelerações de arrastamento $a_{B,a}$, complementar (Coriolis) $a_{B,c}$, relativa $a_{B,r}$ e absoluta a_B do mesmo ponto B;

c) o vetor de rotação absoluto Ω de AB;

d) a aceleração rotacional $\dot{\Omega}$ de AB.

Questão 3 (3,5 pontos): Uma massa concentrada m está presa ao ponto A do disco de raio R, conforme mostrado na figura. A massa do disco também é m. O disco está ligado a uma mola de constante elástica k através de um fio que se enrola no disco. O conjunto parte do repouso da posição $\theta = 0$, sendo nula a força da mola nessa posição. Considerando $\theta \geq 0$, determine:

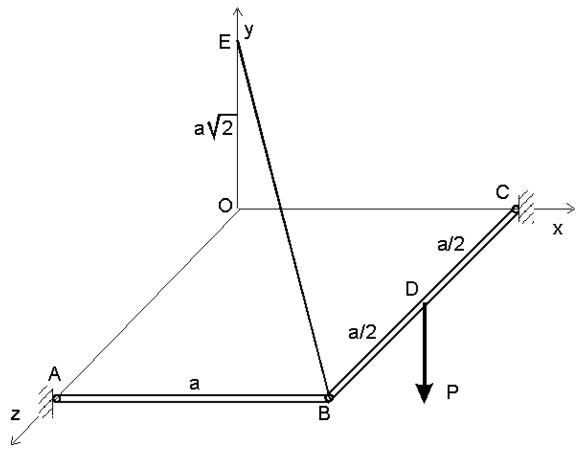


a) a velocidade angular ω e a aceleração angular $\dot{\omega}$ do conjunto em função de θ);

b) a aceleração do baricentro do conjunto G, em função de θ, ω e $\dot{\omega}$;

c) as componentes de força reativa na articulação O, nas direções $\vec{i}$ e $\vec{j}$, em função de θ, ω e $\dot{\omega}$.

Resolução da Questão 1 (3 pontos): A figura mostra a estrutura formada por duas barras AB e BC, sem peso e articuladas nos extremos, e o fio inextensível BE. Uma carga vertical P está aplicada no ponto médio da barra BC. Determine os esforços que atuam em cada barra e no fio.



1ª questão: Isolando a barra BC:

Temos: $\vec{F}_{BE} = F_{BE}\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \sqrt{\frac{2}{2}}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}\right)$

Equilíbrio:

$$\sum M_C = 0 = (B-C)\wedge F_{BE} + (B-C)\wedge F_{AB} + (D-C)\wedge P = 0$$

$$\boldsymbol{F_{BE}} = \boldsymbol{P}\sqrt{\frac{2}{}} \quad \text{e} \quad F_{AB} = -P\sqrt{\frac{2}{4}}$$

$$\sum F_x = 0 : X_c = 0 \;; \quad \sum Fy = 0 : \; Y_c = P/2 \;; \quad \sum F_z = 0 ; \quad Z_c = P\sqrt{2/4}$$

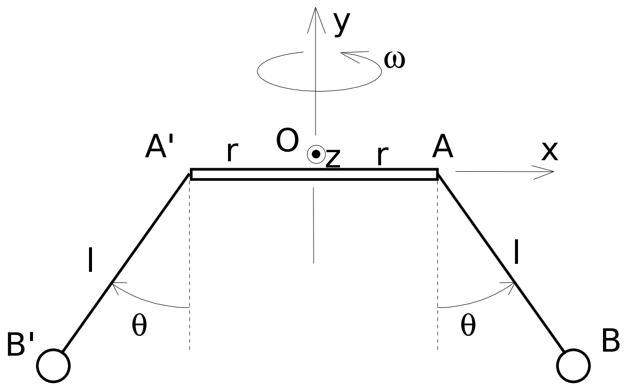
Resposta:

Barra AB: $P\sqrt{2}$ (compressão)

Fio : $P\sqrt{\frac{2}{2}}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica



Questão 2 (3,5 pontos): A barra AA' da figura permanece horizontal, girando com velocidade angular ω constante ao redor do eixo vertical Oy, e tem comprimento 2r. Os fios que ligam as massas B e B' aos pontos A e A' têm comprimento l cada um. Considere como referencial móvel a barra AA'. Supondo que os pontos A, A', B e B' permanecem num mesmo plano vertical, determine em função de θ, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ e das constantes dadas, e usando o sistema de coordenadas indicado:

a) as velocidades de arrastamento $v_{B,a}$, relativa $v_{B,r}$ e absoluta v_B de B;

b) as acelerações de arrastamento $a_{B,a}$, complementar (Coriolis) $a_{B,c}$, relativa $a_{B,r}$ e absoluta a_B do mesmo ponto B;

c) o vetor de rotação absoluto Ω de AB;

d) a aceleração rotacional $\dot{\Omega}$ de AB.

Resolução da 2ª questão

a) $v_{B,a} = v_{o,a} + \omega \wedge (B-O) = O + \omega j r[(A-O)+(B-A)] = -\omega(r + l sen\theta)\, k$

$v_{B,r} = v_{A,r} + \dot{\theta}\, \vec{}_{R,r}(B-A) = l\,\dot{\theta}\, l\, sen\theta\; j + \cos\;\theta\, i$

$v_B = v_{B,r} + v_{B,a} = l\dot{\theta}\cos\theta\, i + l\dot{\theta}\, sen\theta\; j - \omega(r + l\, sen\theta)\, R$

b) $a_{B,a} = a_{D,e} + \dot{\omega} \wedge (B-O) + \omega \wedge [\omega r (B-O)] = -\omega(r + l\,\mathrm{sen}\,\theta)\, i$

$a_{B,r} = a_{A,r} + \ddot{\theta}\, s \wedge (B-A) + \theta^2\; s\, r[s \wedge (B-A)] = l\left(\ddot{\theta}\cos\;\theta - \dot{\theta}^2\; sen\theta\right)\, i + l\left(\ddot{\theta}\, sen\theta + \dot{\theta}^2\; \cos\theta\right)\, j$

$a_{B,c} = 2\,\omega \wedge v_{B,r} = -2\omega l\,\dot{\theta}\cos\theta\, k$

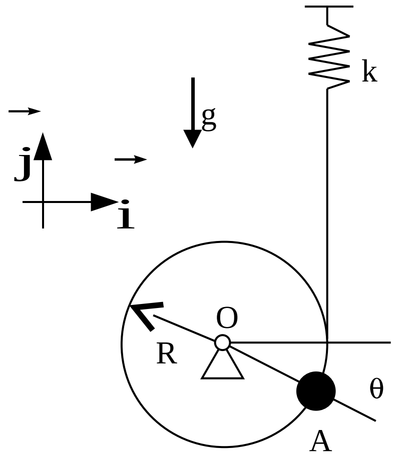
$a_B = a_{Br} + a_{Ba} + a_{Bc}$

c) $\Omega = \Omega_{rel} + \Omega_{arr} = \dot{\theta}\, k + \omega\, j$

d) $\dot{\vec{\Omega}} = \frac{d}{dt}\vec{\Omega} = \ddot{\theta}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\dot{\vec{k}} + \dot{\omega}\,\vec{j} + \omega\,\dot{\vec{j}} = \ddot{\theta}\,\vec{k} + \dot{\theta}\omega\vec{i}$

ou $\dot{\Omega} = \vec{\alpha}_r + \vec{\alpha}_a + \vec{\alpha}_c = \ddot{\theta}\, k + \dot{\omega}\, j + \vec{\omega} \wedge \dot{\theta}\, k = \ddot{\theta}\, k + \dot{\theta}\omega k$

Resolução **da Questão 3 (3,5 pontos):** Uma massa concentrada m está presa ao ponto A do disco de raio R, conforme mostrado na figura. A massa do disco também é m. O disco está ligado a uma mola de constante elástica k através de um fio que se enrola no disco. O conjunto parte do repouso da posição θ = 0, sendo nula a força da mola nessa posição. Considerando θ ≥ 0, determine:



d) a velocidade angular ω e a aceleração angular $\dot{\omega}$ do conjunto em função de θ);
e) a aceleração do baricentro do conjunto G, em função de θ, ω e $\dot{\omega}$;
f) as componentes de força reativa na articulação O, nas direções $\vec{i}$ e $\vec{j}$, em função de θ, ω e $\dot{\omega}$.

a) Sistema disco + massa:

$$E_C = (\frac{1}{2} J_o \omega^2)\, disco + \left(\frac{1}{2} m\, v_{a2}\right) massa = \frac{3mR^2\omega^2}{4}$$

Trabalho: $Z\,mola = -\frac{1}{2} r\,(n\theta)^2$; $Z\,peso = mg\,(\,psen\,\theta)$

TEC, parte do repouso: $\Delta EC = Z^{EXT} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4g\,sen\,\theta}{3R} - \frac{2\,s\,\theta^2}{3m}$

Derivando, com $\vec{\omega} = \omega\,\vec{s} = -\dot{\theta}\,\vec{s} = \dot{\omega} = -\frac{2g\cos\theta}{3R} + \frac{2\,s\theta^2}{3m}$

b) Definição de baricentro : $G - O = \frac{1}{2}(A - 0)$

Assim:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-O)] = \frac{R}{2}\left(\omega\, sen\,\theta - \omega^2 \cos\alpha\right)\vec{i} + \frac{R}{2}\left(\dot{\omega}\cos\theta + \omega^2\, sen\,\theta\right)\vec{f}$$

c) TMB: $M_{\vec{a}G} = R^{EXT} \Rightarrow 2\,M_{\vec{a}G} = \alpha_O\, i + Y_{o\,j} - 2mgj + lR\theta j \Rightarrow$

$$\Rightarrow X_o = m\,R\left(\dot{\omega}\, sen\,\theta - \omega^2 \cos\theta\right) \quad \text{e} \quad Y_o = mR\left(\dot{\omega}\cos\theta + \omega^2\, sen\,\theta\right) + 2\,mg - rR\theta$$