ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

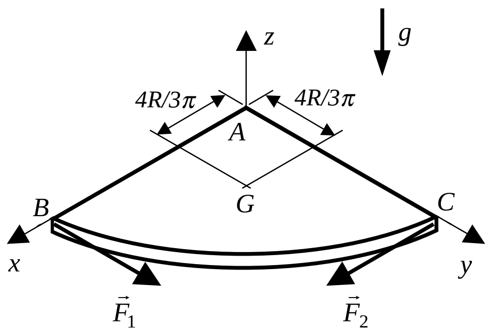
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A

Prova Substitutiva – 13 de dezembro de 2002

Gabarito

(3,0 pontos) Questão 1 – A placa homogênea, de massa m e em forma de setor circular de raio R, tem seu baricentro localizado em G, e está sujeita ao sistema de forças $\left\{ \left(\vec{F}_1, B\right), \left(\vec{F}_2, C\right) \right\}$, onde $\vec{F}_1 = F\,\vec{j}$ e $\vec{F}_2 = F\,\vec{i}$.



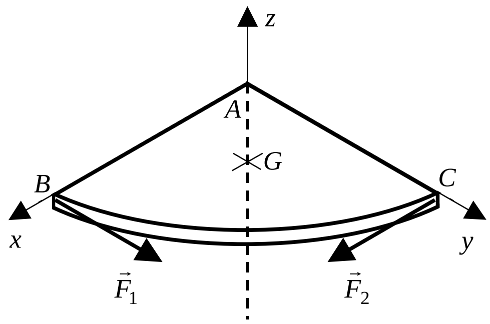
a) Desconsiderando a força peso, determine a equação do eixo de momento mínimo (eixo central) e represente-o graficamente.
b) Considerando a força peso, determine o invariante escalar.
c) Considerando a força peso, determine a posição onde deveria ser colocada uma única articulação para que a placa permaneça em equilíbrio.

Solução:

Item (a):

1,0

Observando a figura verifica-se que as componentes nas direções $\vec{i}$ e $\vec{j}$ dos momentos das forças são nulas se forem escolhidos pólos com $z = 0$. Por simetria, se as coordenadas do pólo forem tais que $x = y$, as componentes na direção $\vec{k}$ dos momentos das forças se anulam. Portanto, o eixo de momento mínimo é o eixo $x = y$, $z = 0$ (no caso o momento mínimo é nulo).



Item (b):

Resultante:

0,25 $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 - mg\,\vec{k} = F\,\vec{i} + F\,\vec{j} - mg\,\vec{k}$

Escolhendo o baricentro G como pólo, e usando a simetria do problema observada no item anterior, temos:

0,25 $\vec{M}_G = (B - G) \wedge \vec{F}_1 + (C - G) \wedge \vec{F}_2 + (G - G) \wedge \left(-mg\,\vec{k}\right) = \vec{0}$

Invariante escalar:

0,50 $I = \vec{M}_G \cdot \vec{R} = \vec{0} \cdot \left(F\,\vec{i} + F\,\vec{j} - mg\,\vec{k}\right) = 0$

Item (c):

1,0

Escolhendo o pólo G, sabemos, pelo item anterior, que $\vec{M}_G = \vec{0}$. Uma articulação pode equilibrar uma força de direção arbitrária (no caso, a resultante), mas não pode equilibrar um momento. Portanto, na situação proposta, o ponto onde se deve colocar a articulação para equilibrar o sistema de forças (que inclui a força peso) é o baricentro G, onde o momento é nulo.

Resposta alternativa do item (a):

Resultante:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$$

Momento em relação ao pólo B:

$$\vec{M}_B = (C - B) \wedge \vec{F}_2 = R\left(\vec{j} - \vec{i}\right) \wedge F\,\vec{i} = -FR\,\vec{k}$$

Invariante escalar:

$$I = \vec{M}_B \cdot \vec{R} = -FR\,\vec{k} \cdot F\left(\vec{i} + \vec{j}\right) = 0$$

Portanto o momento mínimo é nulo. Seja E o pólo tal que o momento seja mínimo:

$$\vec{M}_E = (B - E) \wedge \vec{F}_1 + (C - E) \wedge \vec{F}_2 = \vec{0}$$

$$\left[(R - x)\vec{i} - y\,\vec{j} - z\,\vec{k}\right] \wedge F\,\vec{j} + \left[-x\,\vec{i} + (R - y)\,\vec{j} - z\,\vec{k}\right] \wedge F\,\vec{i} = \vec{0}$$

$$(R - x)F\,\vec{k} - zF\,\vec{i} - (R - y)F\,\vec{k} - zF\,\vec{j} = \vec{0}$$

$$-zF\,\vec{i} - zF\,\vec{j} + [(R - x) - (R - y)]F\,\vec{k} = \vec{0}$$

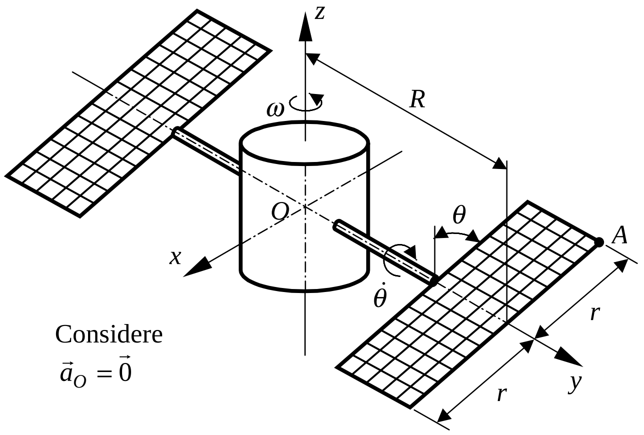
$$-zF\,\vec{i} - zF\,\vec{j} + (-x + y)F\,\vec{k} = \vec{0}$$

Logo:

$$z = 0$$

$$-x + y = 0 \Rightarrow x = y$$

(3,0 pontos) Questão 2 – O satélite está em órbita geoestacionária, e tem movimento de rotação em torno do eixo z com velocidade angular constante ($\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$). Os painéis solares giram em torno do eixo y com velocidade angular constante em relação ao satélite ($\vec{\dot{\theta}} = -\dot{\theta}\,\vec{j}$).



Considere
$\vec{a}_O = \vec{0}$

a) Determine o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ do painel solar.

b) Calcule o vetor aceleração de rotação $\dot{\vec{\Omega}}$ do painel solar.

c) No instante em que $\theta = 0^o$, determine a aceleração $\vec{a}_A$ do ponto A.

d) Considerando o satélite como o referencial móvel, decomponha a aceleração do ponto A em aceleração relativa $\vec{a}_{A,rel}$, aceleração de arrastamento $\vec{a}_{A,arr}$ e aceleração de Coriolis $\vec{a}_{A,Cor}$.

Obs.: o ângulo θ é medido em um plano paralelo ao plano *Oxz*.

Solução:

Item (a):

0,50 $\vec{\Omega} = \omega\vec{k} - \dot{\theta}\,\vec{j}$

Item (b):

0,50 $\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\omega}\vec{k} + \omega\dot{\vec{k}} - \ddot{\theta}\,\vec{j} - \dot{\theta}\,\dot{\vec{j}} = 0\,\vec{k} + \omega\vec{0} - 0\,\vec{j} - \dot{\theta}\left(\omega\vec{k}\wedge\vec{j}\right) \;\Rightarrow\; \dot{\vec{\Omega}} = \dot{\theta}\,\omega\,\vec{i}$

Item (c):

1,0

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}}\wedge(A-O) + \vec{\Omega}\wedge\left[\vec{\Omega}\wedge(A-O)\right]$$

$$\vec{a}_A = \vec{0} + \dot{\theta}\,\omega\,\vec{i}\wedge\left(R\,\vec{j} + r\,\vec{k}\right) + \left(\omega\vec{k} - \dot{\theta}\,\vec{j}\right)\wedge\left[\left(\omega\vec{k} - \dot{\theta}\,\vec{j}\right)\wedge\left(R\,\vec{j} + r\,\vec{k}\right)\right]$$

$$\vec{a}_A = \dot{\theta}\,\omega\,R\,\vec{k} - \dot{\theta}\,\omega\,r\,\vec{j} + \left(\omega\vec{k} - \dot{\theta}\,\vec{j}\right)\wedge\left(-\omega\,R\,\vec{i} - \dot{\theta}\,r\,\vec{i}\right)$$

$$\vec{a}_A = \dot{\theta}\,\omega\,R\,\vec{k} - \dot{\theta}\,\omega\,r\,\vec{j} - \omega^2 R\,\vec{j} - \omega\dot{\theta}\,r\,\vec{j} - \dot{\theta}\,\omega\,R\,\vec{k} - \dot{\theta}^2 r\,\vec{k}$$

$$\vec{a}_A = -2\dot{\theta}\,\omega\,r\,\vec{j} - \omega^2 R\,\vec{j} - \dot{\theta}^2 r\,\vec{k}$$

Item (d):

0,50

O movimento relativo do ponto A é um movimento circular uniforme, com raio r e velocidade angular $\dot{\theta}$, em torno do eixo y:

$$\vec{a}_{A,rel} = -\dot{\theta}^2 r\,\vec{k}$$

O movimento de arrastamento do ponto A é um movimento circular uniforme, com raio R e velocidade angular ω, em torno do eixo z:

$$\vec{a}_{A,arr} = -\omega^2 R\,\vec{j}$$

0,50

Aceleração de Coriolis:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A,rel} + \vec{a}_{A,arr} + \vec{a}_{A,Cor}$$

Portanto, observando a resposta do item (c) e as acelerações relativa e de arrastamento calculadas anteriormente, temos:

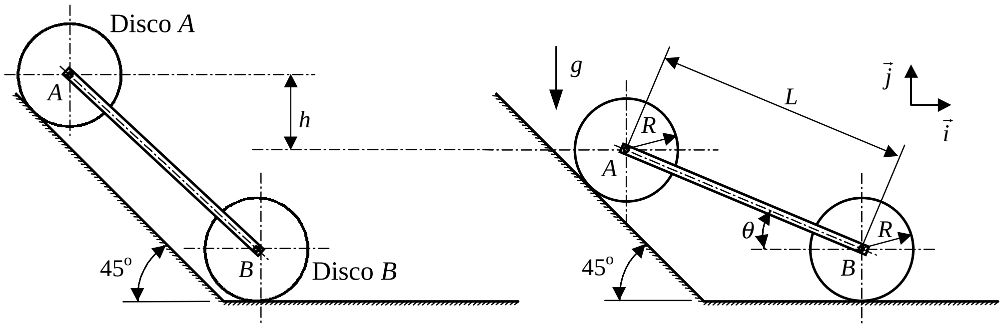
$$\vec{a}_{A,Cor} = -2\dot{\theta}\,\omega\,r\,\vec{j}$$

ou:

$$\vec{a}_{A,Cor} = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{A,rel} = 2\omega\,\vec{k}\wedge\left(-\dot{\theta}\,\vec{j}\wedge r\,\vec{k}\right) = 2\omega\,\vec{k}\wedge\left(-\dot{\theta}\,r\,\vec{i}\right)$$

$$\vec{a}_{A,Cor} = -2\dot{\theta}\,\omega\,r\,\vec{j}$$

(4,0 pontos) Questão 3 – O sistema é composto pela barra AB, de comprimento L e massa desprezível, articulada (sem atrito) em suas extremidades aos centros geométricos dos discos homogêneos de raio R que rolam sem escorregar. A massa de cada disco é m. Na posição I o sistema está em repouso. Em um instante posterior, na posição II, a coordenada vertical do ponto A mudou de um valor h, como mostra a figura.



Posição I   Posição II

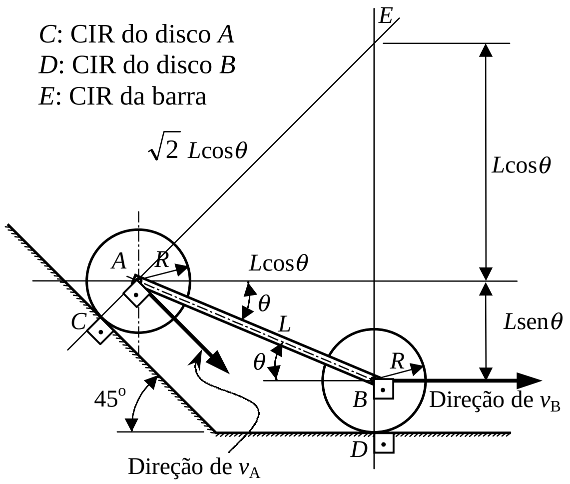
Disco:
$J_{Gz}=mR^2/2$

$0^o < \theta < 45^o$

a) Calcule a energia cinética do sistema em função da velocidade angular ω_B do disco B e de θ.
b) Na posição II, calcule ω_B em função das variáveis h e θ.
c) Na posição II, desenhe o diagrama de corpo livre de cada disco e o diagrama de corpo livre da barra.
d) Na posição II, determine a reação normal N_B do solo sobre o disco B em função da aceleração angular $\dot{\omega}_A$ do disco A, da aceleração angular $\dot{\omega}_B$ do disco B, e do ângulo θ.

Solução:

1,0 **Item (a):**



Localizando graficamente os centros instantâneos de rotação das rodas e da barra, e observando a figura:
ω_A : velocidade angular do disco A.
ω_B : velocidade angular do disco B.
Ω : velocidade angular da barra.

$$|v_A| = |\omega_A|R = |\Omega|\sqrt{2}L\cos\theta$$

$$|v_B| = |\omega_B|R = |\Omega|L(\text{sen}\theta + \cos\theta)$$

Portanto:

$$\frac{|\omega_A|}{|\omega_B|} = \frac{\sqrt{2}\cos\theta}{(\text{sen}\theta+\cos\theta)} \quad \Rightarrow \quad |\omega_A| = \frac{\sqrt{2}\cos\theta}{(\text{sen}\theta+\cos\theta)}|\omega_B|$$

Energia Cinética:

$$J_{Cz} = J_{Dz} = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$$

$$E = J_{Cz}\frac{\omega_A^2}{2} + J_{Dz}\frac{\omega_B^2}{2} = \frac{J_{Cz}}{2}\left(\omega_A^2+\omega_B^2\right)$$

$$E = \frac{3mR^2}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\text{sen}\theta+\cos\theta}\right)^2+1\right]\omega_B^2$$

1,0 **Item (b):**

Apenas a força peso realiza trabalho, e observando que apenas a coordenada vertical do disco A é que varia, temos:

$W = mgh$

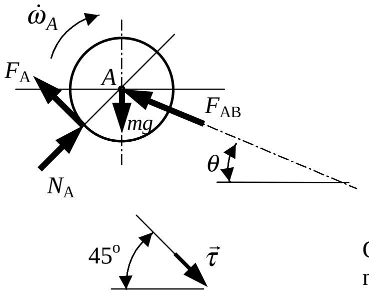
Teorema da Energia Cinética (como o sistema parte do repouso, $E_0 = 0$):

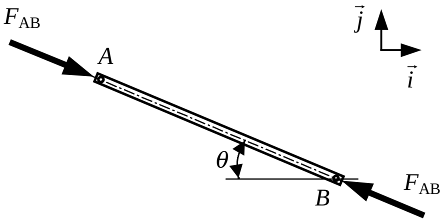
$$E - E_0 = W \quad \Rightarrow \quad \frac{3mR^2}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\text{sen}\theta+\cos\theta}\right)^2+1\right]\omega_B^2 - 0 = mgh \quad \Rightarrow \quad \omega_B = \sqrt{\frac{gh}{\frac{3R^2}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\text{sen}\theta+\cos\theta}\right)^2+1\right]}}$$

1,0

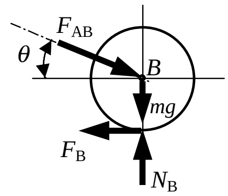
Item (c):

Diagramas de corpo livre dos discos e da barra:





Como a barra AB é uma barra de treliça, as forças nas extremidades (F_{AB}) têm o mesmo módulo, a mesma linha de ação e sentidos opostos.



1,0

Item (d):

Teorema do Movimento do Baricentro, Disco *B*:

Na direção de $\vec{j}$:

$$ma_{By} = N_B - F_{AB}\,\mathrm{sen}\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B = mg + F_{AB}\,\mathrm{sen}\theta \qquad (1)$$

Teorema do Movimento do Baricentro, Disco *A*:

Na direção de $\vec{\tau}$:

$$ma_{A\tau} = -F_{AB}\cos(45^o - \theta) + mg \cdot \mathrm{sen}45^o - F_A$$

$$ma_{A\tau} = -F_{AB}\cos(45^o - \theta) + mg\,\frac{\sqrt{2}}{2} - F_A$$

Pela cinemática do sistema:

$$a_{A\tau} = \dot{\omega}_A R$$

$$m\dot{\omega}_A R = -F_{AB}\cos(45^o - \theta) + mg\,\frac{\sqrt{2}}{2} - F_A \qquad (2)$$

Teorema do Momento Angular, Disco *A*:

$$J_{Az}\dot{\omega}_A = F_A R$$

$$F_A = J_{Az}\frac{\dot{\omega}_A}{R} \quad \Rightarrow \quad F_A = \frac{mR^2}{2}\frac{\dot{\omega}_A}{R}$$

$$F_A = \frac{mR}{2}\dot{\omega}_A$$

Substituindo em (2):

$$m\dot{\omega}_A R = -F_{AB}\cos(45^o - \theta) + mg\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{mR}{2}\dot{\omega}_A$$

$$\frac{3mR}{2}\dot{\omega}_A = -F_{AB}\cos(45^o - \theta) + mg\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_{AB}\cos(45^o - \theta) = mg\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3mR}{2}\dot{\omega}_A \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = \frac{mg\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3mR}{2}\dot{\omega}_A}{\cos(45^o - \theta)}$$

$$F_{AB} = \frac{mg\sqrt{2} - 3mR\dot{\omega}_A}{2\cos(45^o - \theta)}$$

Substituindo em (1):

$$N_B = mg + \left[\frac{mg\sqrt{2} - 3mR\dot{\omega}_A}{2\cos(45^o - \theta)}\right]\mathrm{sen}\theta$$