ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Prova de Recuperação - reoferecimento – 4/7/2016

Duração da Prova: 110 minutos

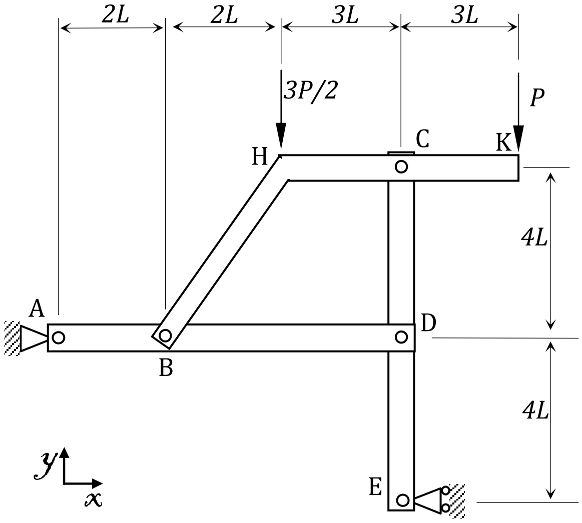
- **Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos, como calculadoras, "tablets" e celulares.**
- **Após a distribuição do enunciado da prova, é proibido sair da sala antes de decorridos 40 minutos.**
- **A partir do momento em que a prova for encerrada, não é permitido ao aluno escrever mais nada na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.**

QUESTÃO 1 (3,5 pontos). A estrutura ao lado é composta pelas barras rígidas ***ABD***, ***BHCK*** e ***CDE***, todas de massa desprezível, unidas por articulações sem atrito (ideais) em B, C e D. A estrutura está em equilíbrio estático sob a ação das forças ativas ***(3P/2,H)*** e ***(P,K)*** e das forças reativas dos vínculos ideais em A e em E. Em função dessas informações e dos parâmetros geométricos pedem-se:

(a) os diagramas de corpo livre das barras ABD, BHCK e CDE

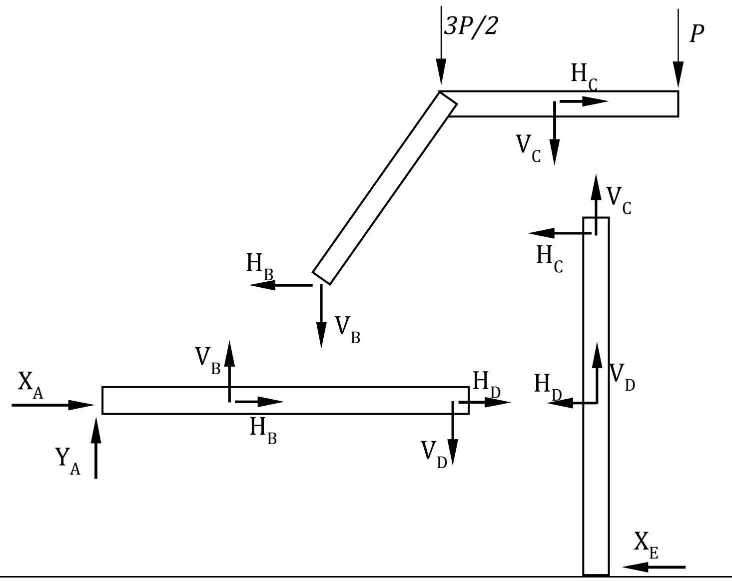
(b) as reações vinculares em A e em E;

(c) as forças nas articulações B, C e D.



Solução

(a)



(b) Para a estrutura completa:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow X_A - X_E = 0 \quad \mathbf{(1)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow Y_A - \frac{3P}{2} - P = 0 \rightarrow \boldsymbol{Y_A = \frac{5P}{2}}$$

$$\Sigma M_{A_z} = 0 \rightarrow -X_E.4L - \frac{3P}{2.4L} - P.10L = 0$$

$\Rightarrow \boldsymbol{X_E = -4P}$ em (1):

$$\boldsymbol{X_A = -4P}$$

(c)

Barra ABD:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow X_A + H_B + H_D = 0 \ (2)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \frac{5P}{2} + V_B - V_D = 0 \ (3)$$

$$\Sigma M_{Bz} = 0 \rightarrow -\frac{5P}{2.2L} - V_D.5L = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_D = -P}$$

Em (3):

$$\boldsymbol{V_B = -\frac{7P}{2}}$$

Barra BHCK:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -H_B + H_C = 0 \ (4)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow -V_B - V_C - \frac{3P}{2} - P = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_C = P}$$

$$\Sigma M_{C_z} = 0 \rightarrow$$

$$-H_B.4L + V_B.5L + \frac{3P}{2.3L} - P.3L = 0$$

$$-4H_B - \frac{35P}{2} + \frac{9P}{2} - 3P = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{H_B = -4P}$$

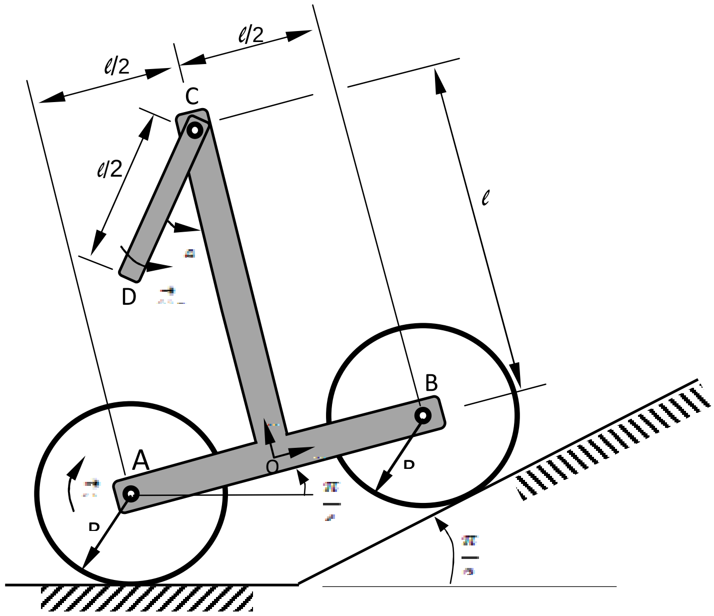
$$\therefore \boldsymbol{H_C = -4P}$$

Barra CDE:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -H_C - H_D - X_E = 0$$

$$\boldsymbol{H_D = -X_E - H_C = 8P}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica



QUESTÃO 2 (3,5 pontos). A barra rígida ABC é conduzida por meio dos discos de raio R cujos centros estão nas articulações A e B. Os discos rolam sem escorregar com velocidade angular constante de módulo ω_1 sobre as superfícies planas horizontal (disco A) e inclinada (disco B). No instante mostrado, a barra rígida CD possui velocidade angular constante de módulo $\dot{\theta} = \omega_2$ em relação ao corpo ABC, e o ângulo formado entre o segmento AB e a horizontal é π /6 radianos. Em função das dimensões e parâmetros fornecidos e utilizando o sistema de coordenadas Oxyz pedem-se:

(a) o centro instantâneo de rotação, graficamente, e suas coordenadas no sistema considerado;

(b) as velocidades dos pontos A e B;

(c) o vetor rotação $\vec{\Omega}$ da barra ABC;

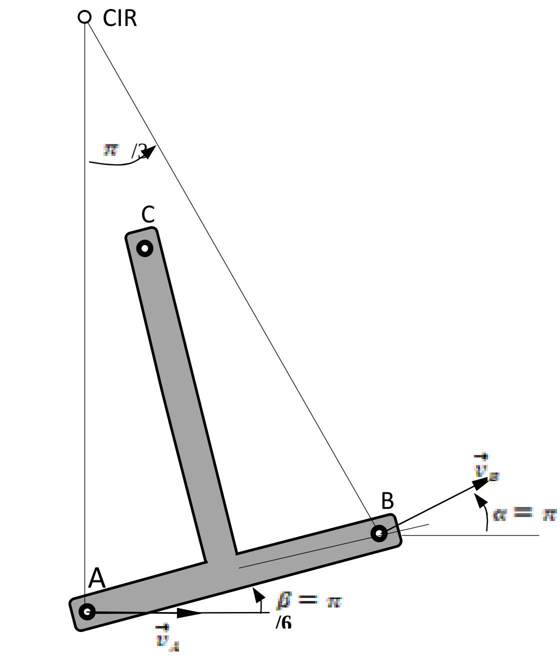
(d) a velocidade absoluta do ponto D da barra CD.

Solução

(a) coordenadas: por simetria, $x_{CIR} = 0$

$$tg\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}\right) = \frac{\ell}{y_{CIR}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\ell}{y_{CIR}}$$

$$\Rightarrow y_{CIR} = \ell\sqrt{3}$$



(b) os pontos de contato de A e de B com as respectivas superfícies planas são seus centros instantâneos de rotação.

Assim, fazendo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e $\beta = \frac{\pi}{6}$ tem-se:

$$\vec{v}_A = -\omega_1\vec{k} \wedge (A - CIR_A) =$$

$$-\omega_1\vec{k} \wedge R\left(sen\beta\vec{i} + \cos(\beta\vec{j})\right) \Rightarrow \vec{v}_A = \frac{\omega_1 R}{2\left(\sqrt{3}\vec{i} - 1\vec{j}\right)}$$

$$\vec{v}_B = -\omega_1\vec{k} \wedge (B - CIR_B) =$$

$$-\omega_1\vec{k} \wedge R\left(-sen(\alpha - \beta)\vec{i} + \cos((\alpha - \beta)\vec{j})\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \frac{\omega_1 R}{2\left(\sqrt{3}\vec{i} + 1\vec{j}\right)}$$

(c) pode-se obter $\vec{\Omega}$ utilizando o CIR ou a EFCS:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{CIR} + \Omega\vec{k} \wedge (B - CIR) \rightarrow$$

$$\frac{\omega_1 R}{2}\left(\sqrt{3}\vec{i} + 1\vec{j}\right) = \Omega\vec{k} \wedge \left(\ell\vec{i} - \ell\sqrt{3}\vec{j}\right) \rightarrow$$

$$\vec{\Omega} = \frac{\omega_1 R}{2\ell}\vec{k}$$

(d) por composição de movimentos:

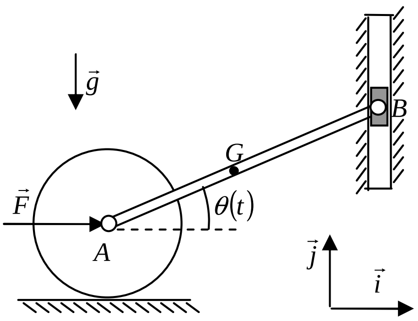
$$\vec{v}_D = \vec{v}_{D,r} + \vec{v}_{D,a} \rightarrow \vec{v}_{D,r} = \vec{v}_{C,r} + \omega_2\vec{k} \wedge (D - C)$$

$$\vec{v}_{D,r} = \vec{0} + \omega_2\vec{k} \wedge \frac{\ell}{2}\left(-\cos\theta\vec{i} - sen\,\theta\vec{j}\right)$$

$$\vec{v}_{D,r} = \frac{\omega_2\ell}{2\left(sen\,\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j}\right)ec}$$ a row vimentos:

$$\vec{v}_{D,a} = \vec{v}_C = \vec{v}_{CIR} + \vec{\Omega} \wedge (C - CIR)$$

	$\vec{v}_{D,a} = \frac{\omega_1 R}{2\ell}\vec{k} \wedge (\ell - \ell\sqrt{3})\vec{j} = \frac{\omega_1 R}{2}(\sqrt{3} - 1)\vec{i}$ $\therefore \vec{v}_D = \frac{1}{2}\left[\left(\omega_2 \ell \ sen \ \theta + \omega_1 R\left(\sqrt{3} - 1\right)\right)\vec{i} - \omega_2 \ell \ cos \ \theta \vec{j}\right]$



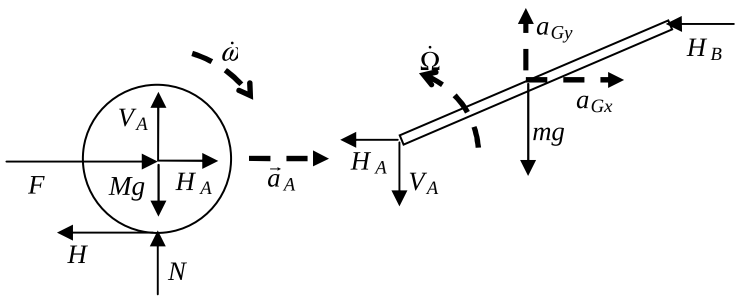
QUESTÃO 3 (3,0 pontos). Uma barra AB de massa m e comprimento ℓ tem suas extremidades articuladas a um disco de massa M e raio R e a um pistão de massa desprezível. No estado em que a barra forma um ângulo θ com a horizontal, o sistema é mantido em equilíbrio mediante a aplicação de uma força $\vec{F}_1 = mg\frac{\ell}{2}\cot\theta\vec{i}$ à articulação A. Repentinamente, aumentando-se a magnitude dessa força para um valor $\left|\vec{F}\right| > \left|\vec{F}_1\right|$, o sistema parte do repouso, de modo a que o disco role sem deslizar e o pistão realize movimento ascendente no interior do cilindro. Desprezando-se o atrito no contato entre as superfícies do cilindro e do pistão pede-se, para esse instante inicial:

(a) desenhar os diagramas de corpo livre da barra e do disco;
(b) aplicar ao disco os teoremas da Resultante e do Momento da Quantidade de Movimento;
(c) aplicar à barra os mesmos teoremas do item (b);
(d) utilizando os conceitos de Cinemática do Corpo Rígido, escrever as expressões para a aceleração dos pontos A, G e B.
(e) mostrar que as equações dos itens (b),(c),(d) dão origem a um sistema de 10 equações a 10 incógnitas.

OBS: NÃO É NECESSÁRIO RESOLVER O SISTEMA DE EQUAÇÕES !!!

SOLUÇÃO

Os diagramas de corpo livre do bloco e da barra são apresentados na figura ao lado.



Aplicando-se ao disco os teoremas da Resultante e do Momento da Quantidade de Movimento ao disco, tem-se:

$$H_A - H + F = Ma_A \quad (1)$$

$$V_A + N - Mg = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{MR^2}{2}\dot{\omega} = -HR \Rightarrow H = \frac{MR}{2}\dot{\omega} \quad (3)$$

Aplicando-se à barra os mesmos teoremas, tem-se:

$$-H_A - H_B = Ma_{Gx} \quad (4)$$

$$-V_A - mg = Ma_{Gy} \quad (5)$$

$$\frac{m\ell^2}{12}\dot{\Omega} = -H_A\frac{\ell}{2}\sin\theta + V_A\frac{\ell}{2}\cos\theta + H_B\frac{\ell}{2}\sin\theta \quad (6)$$

Como o disco rola sem escorregar, a aceleração do ponto A, é:

$$\vec{a}_A = \dot{\omega}R\vec{i} \quad (7)$$

Notando que, no instante da partida a velocidade angular Ω da barra é nula, a aceleração do seu centro de massa G fica:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\Omega}\vec{k} \wedge (G - A) = \dot{\omega}R\vec{i} + \dot{\Omega}\vec{k} \wedge \frac{\ell}{2}\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_G = \left(\dot{\omega}R - \dot{\Omega}\frac{\ell}{2}\sin\theta\right)\vec{i} + \dot{\Omega}\frac{\ell}{2}\cos\theta\vec{j}$$

Da equação vetorial acima, resultam duas equações escalares, a saber:

$$a_{Gx} = \dot{\omega}R - \dot{\Omega}\frac{\ell}{2}\sin\theta \qquad (8)$$

$$a_{Gy} = \dot{\Omega}\frac{\ell}{2}\cos\theta \qquad (9)$$

Sabe-se ainda que a aceleração do ponto B é vertical, ou seja, como

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\Omega}\vec{k} \wedge (B - A) = \dot{\omega}R\vec{i} + \dot{\Omega}\ell\cos\theta\vec{j} - \dot{\Omega}\ell\sin\theta\vec{i} = \left(\dot{\omega}R - \dot{\Omega}\ell\sin\theta\right)\vec{i} + \dot{\Omega}\ell\cos\theta\vec{j}$$

conclui-se que

$$a_{Bx} = \dot{\omega}R - \dot{\Omega}\ell\sin\theta = 0 \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{\ell\sin\theta}{R}\dot{\Omega} \qquad (10)$$

A resolução do sistema acima, de 10 equações, permite determinar as 10 incógnitas do problema, a saber: ($H_A, V_A, H, N, H_B, a_A, \dot{\omega}, a_{Gx}, a_{Gy}, \dot{\Omega}$).