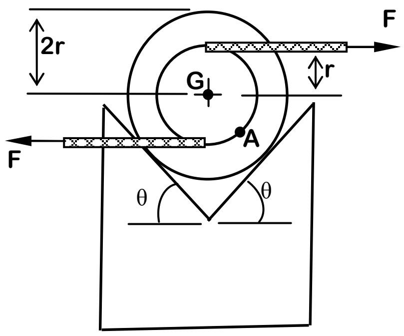
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – (reof.) – Recuperação 24 de julho de 2009

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)



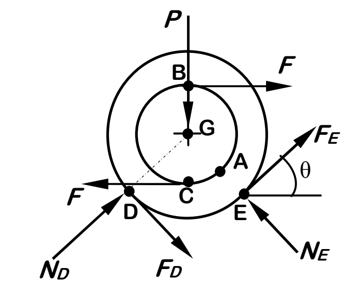
QUESTÃO 1 (**3,5 pontos).** O carretel de massa m e centro de massa G possui distribuição de massa tal que o momento de inércia em relação ao seu pólo A dado por $J_{Az}=5mr^2/4$. Sobre o carretel, enrola-se um cabo ideal sujeito à ação das forças de módulo constante porém desconhecido F. O carretel apóia-se constantemente sobre um suporte em "V". O coeficiente de atrito dinâmico entre as superfícies é μ e o ângulo θ vale $\pi/4$ radianos. Nessas condições, pedem-se:

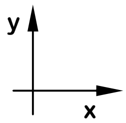
a) o diagrama de corpo livre do carretel;

b) o valor das forças constantes F aplicadas ao cabo e capazes de proporcionar ao carretel uma aceleração angular de módulo α.

SOLUÇÃO:

a) o diagrama de corpo livre é dado abaixo onde:
B e C são os pontos de contato do cabo com o carretel;
D e E são os pontos de contato entre o carretel e o apoio em "V";
N_D, N_E, F_D e F_E são respectivamente as forças normais e de atrito no contato entre o carretel e o apoio.





b) o carretel, na situação proposta, apenas gira em torno de seu centro de massa G. A aplicação do TMB, já levando em conta o valor do ângulo θ conduz a:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F + F + N_D\frac{\sqrt{2}}{2} + F_D\frac{\sqrt{2}}{2} - N_E\frac{\sqrt{2}}{2} + F_E\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_D\frac{\sqrt{2}}{2} - F_D\frac{\sqrt{2}}{2} + N_E\frac{\sqrt{2}}{2} + F_E\frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0 \qquad (1)$$

Como há escorregamento puro entre as superfícies em contato, podemos escrever, a partir das equações (1),

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_D(1+\mu) - N_E(1-\mu) = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_D(1-\mu) + N_E(1+\mu) = \sqrt{2}P \qquad (2)$$

Resolvendo as equações (2) obtém-se

$$N_D = \frac{P\sqrt{2}(1-\mu)}{2(1+\mu^2)}$$

$$N_E = \frac{P\sqrt{2}(1+\mu)}{2(1+\mu^2)}$$

Com N_E e N_D temos F_E e F_D:

$$F_D = \mu\frac{P\sqrt{2}(1-\mu)}{2(1+\mu^2)}$$

$$F_E = \mu\frac{P\sqrt{2}(1+\mu)}{2(1+\mu^2)}$$

Aplicando o TMA em relação ao baricentro temos:

$$J_{Gz}\vec{\alpha} = \vec{M}_G^{ext} \Rightarrow$$
$$-J_{Gz}\alpha\vec{k} = (B-G)\wedge\vec{F} + (C-G)\wedge\vec{F} + (D-G)\wedge\vec{F}_D + (E-G)\wedge\vec{F}_E \Rightarrow$$
$$-J_{Gz}\alpha\vec{k} = (-rF - rF + 2rF_D + 2rF_E)\vec{k} \Rightarrow \qquad (3)$$

Efetuando a mudança de pólo para o momento de inércia, temos:

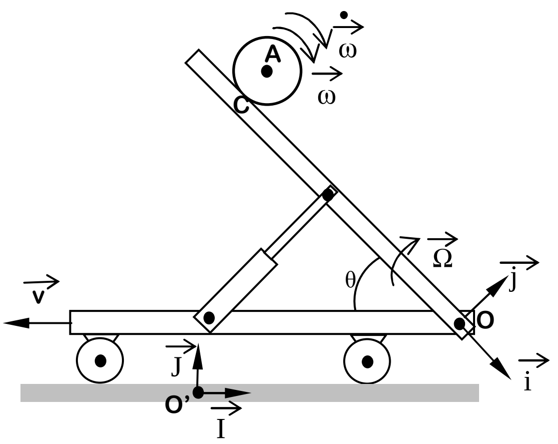
$$J_{Az} = J_{Gz} + md_{A,G}^2 \Rightarrow J_{Gz} = J_{Az} - mr^2 \Rightarrow J_{Gz} = \frac{mr^2}{4}$$

Utilizando também os valores das forças de atrito calculadas anteriormente, a equação (3) leva a:

$$-\frac{mr^2}{4}\alpha = 2r\left(-F + \frac{\mu P\sqrt{2}}{2}\frac{(1-\mu+1+\mu)}{(1+\mu^2)}\right) \qquad (4)$$

Resolvendo (4) para *F* obtemos

$$\boxed{F = \frac{\mu P\sqrt{2}}{(1+\mu^2)} + \frac{mr\alpha}{8}}$$



QUESTÃO 2 (3,5 pontos). A plataforma de transporte ao lado desloca-se com velocidade constante $\vec{v}$ em relação ao referencial fixo $O'\vec{I}\vec{J}\vec{K}$. Um atuador hidráulico faz com que a rampa inclinada seja erguida com velocidade angular $\vec{\Omega}$ de módulo constante. Um cilindro de centro *A* e raio *R* rola sem escorregar sobre a rampa inclinada, tendo *C* como ponto de contato. O cilindro possui, no instante mostrado, velocidade angular $\vec{\omega}$ e aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$. No mesmo instante, o ângulo entre a rampa inclinada e a horizontal é θ=45º e a distância entre os pontos *C* e *O* é *d*. Pede-se, em relação ao sistema de referência $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, solidário à rampa inclinada:

(a) as velocidades absoluta, relativa e de arrastamento do ponto *A*;
(b) as componentes da aceleração do ponto *A*;
(c) os vetores rotação e aceleração angular do cilindro de centro *A*.

SOLUÇÃO:

Analisando-se o movimento relativo do cilindro segundo o referencial $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ fixo à rampa inclinada, calcularemos a velocidade e a aceleração relativas do ponto *A*.
Notemos que, para um observador situado na rampa inclinada, o ponto *C* de contacto entre o cilindro e a rampa é o centro instantâneo de rotação, já que o movimento do cilindro é de rolamento puro. Dessa forma, podemos escrever que:

$$\vec{v}_{rA} = \vec{v}_{rC} + \left(-\omega k\right) \wedge R\vec{j} = \omega R\vec{i}$$

Como o baricentro *A* do cilindro realiza movimento retilíneo, a sua aceleração é dada por:

$$\vec{a}_{rA} = \dot{\vec{v}}_{rA} = \dot{\omega} R\vec{i}$$

Para estudarmos o movimento de arrastamento do cilindro consideraremos este como um corpo solidário à rampa inclinada. Nessas condições, a velocidade de arrastamento do ponto A será:

$$\vec{v}_{aA} = \vec{v}_O + \left(-\Omega\vec{k}\right) \wedge (A-O) = -v\vec{I} - \Omega\vec{k} \wedge \left(-d\vec{i} + R\vec{j}\right) = -v\vec{I} + \Omega R\vec{i} + \Omega d\vec{j}$$

E a aceleração de arrastamento de *A*, será:

$$\vec{a}_{aA} = \vec{a}_{aO} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (A-O) + \vec{\Omega} \wedge \left[\vec{\Omega}(A-O)\right] = \vec{0} + \vec{0} \wedge (A-O) - \Omega\vec{k} \wedge \left[-\Omega\vec{k} \wedge \left(-d\vec{i} + Rj\right)\right] = \Omega^2\left(d\vec{i} - R\vec{j}\right)$$

A aceleração complementar do ponto *A* do cilindro será:

$$\vec{a}_{cA} = 2\vec{\omega}_a \wedge \vec{v}_{rA} = 2\left(-\Omega\vec{k}\right) \wedge \left(\omega R\vec{i}\right) = -2\Omega\omega R\vec{j}$$

Estudando-se, finalmente, o movimento absoluto do cilindro, tem-se que:

- O vetor rotação absoluto é:

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_a = -(\omega + \Omega)\vec{k}$$

- O vetor aceleração angular absoluto é:

$$\dot{\vec{\omega}}_{abs} = \dot{\vec{\omega}}_r + \dot{\vec{\omega}}_a = -\dot{\omega}\vec{k}$$

- A velocidade absoluta do ponto *A*, é:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{rA} + \vec{v}_{aA} = -v\vec{I} + (\omega + \Omega)R\vec{i} + \omega d\vec{j}$$

Para expressar o resultado em relação ao sistema móvel temos, da geometria do sistema:

$$\vec{I} = \cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j}$$

- Assim, a velocidade absoluta do ponto *A*, é:

$$\vec{v}_A = -v\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) + (\omega + \Omega)R\vec{i} + \omega d\vec{j} \Rightarrow$$
$$\vec{v}_A = \left(-v\frac{\sqrt{2}}{2} + (\omega + \Omega)R\right)\vec{i} + \left(-v\frac{\sqrt{2}}{2} + \omega d\right)\vec{j}$$

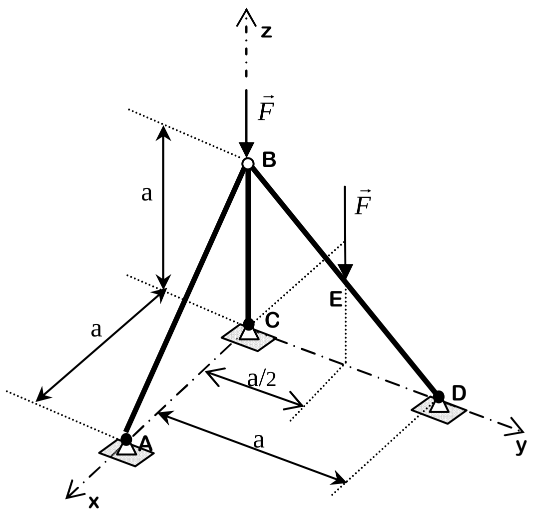
- A aceleração absoluta do ponto *A*, é:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{rA} + \vec{a}_{aA} + \vec{a}_{cA} = \left(\omega^2 R - \Omega^2 d\right)\vec{i} + \left(\omega^2 R - 2\omega\Omega R\right)\vec{j}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

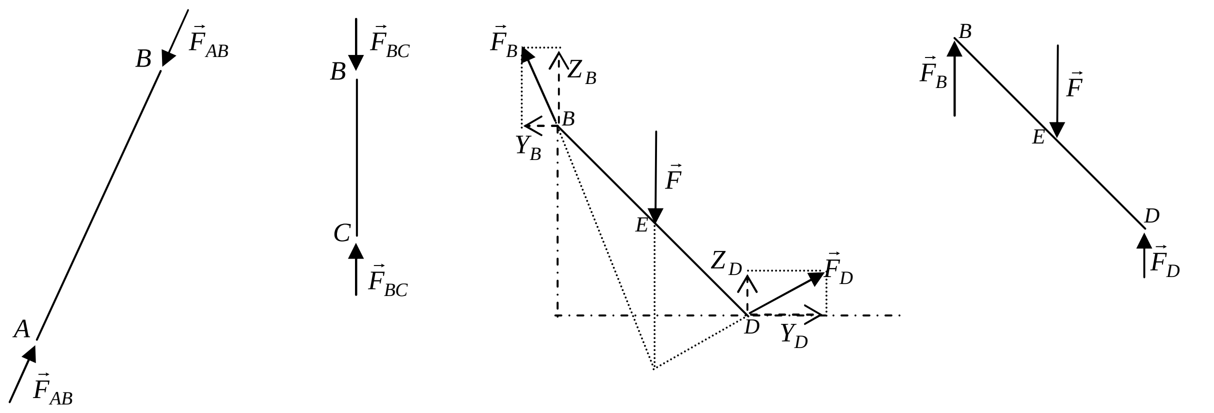


QUESTÃO 3 (3,0 pontos). A estrutura ao lado é formada por barras de massa desprezível. Todas as conexões entre elementos e ao solo são efetuadas através de articulações (juntas) esféricas. O sistema está em equilíbrio. Em *B* e *E* há forças verticais de intensidade **F**. Pedem-se:

(a) os diagramas de corpo livre de todas as barras;
(b) as reações na articulação *A*;
(c) as reações na articulação *D*.
(d) as forças atuantes na barra *BC*, indicando se são de tração ou compressão.

SOLUÇÃO

As barras *AB* e *BC* estão em equilíbrio sujeitas a apenas duas forças atuantes em suas extremidades; logo, essas são iguais, diretamente opostas e atuam ao longo das direções *AB* e *BC*, respectivamente.
A barra *BD*, por sua vez, está em equilíbrio sob a ação de três forças; portanto, estas são, necessariamente, forças coplanares (paralelas ou concorrentes). Como a força atuante em *E* tem a direção *z* e as outras duas atuam nos pontos *B* e *D*, o plano de ação dessas três forças é o plano (*B*, *D*, *z*) que, no caso, coincide com o plano *yz*.
A partir dessas considerações, constroem-se os diagramas de corpo livre das barras *AB*, *BC* e *BD* (ilustrados na figura abaixo). Observe-se que existem duas hipóteses possíveis para o diagrama de corpo livre da barra *BD* – *forças concorrentes* ou *forças paralelas*.



(a) (b) (c) (d)

Figura 1. (a) *DCL* da barra *AB*; (b) *DCL* da barra *BC*;
(c) 1ª hipótese para o *DCL* da barra *BD*; (d) 2ª hipótese para o *DCL* da barra *BD*.

Para determinarmos as 6 incógnitas do problema — intensidades e sentidos das forças $\vec{F}_{AB}$ e $\vec{F}_{BC}$ e componentes Y_B, Z_B, Y_D e Z_D das forças $\vec{F}_B$ e $\vec{F}_D$ — precisaremos resolver um sistema com 6 equações de equilíbrio. Para tanto, consideraremos o equilíbrio do nó *B* e o da barra *BD*.

Conforme ilustrado na Figura 2, as condições de equilíbrio para o nó *B* fornecem a seguinte equação vetorial:

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

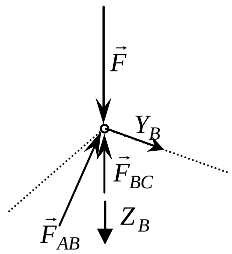


Figura 2. Forças atuantes no nó *B*.

$$-F\vec{k} + F_{BC}\vec{k} - F_{AB}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + F_{AB}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} + Y_B\vec{j} - Z_B\vec{k} = \vec{0}$$

Esta equação corresponde ao seguinte ao sistema de equações escalares abaixo:

$$-F_{AB}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 0 \qquad \text{(Eq.1)}$$

$$Y_B = 0 \qquad \text{(Eq.2)}$$

$$-F + F_{BC} + F_{AB}\frac{\sqrt{2}}{2} - Z_B = 0 \Rightarrow F_{BC} - Z_B = F \qquad \text{(Eq.3)}$$

Como Y_B é nula concluímos que a barra *BD* está em equilíbrio sob a ação de um sistema de forças paralelas, Em outras palavras, Y_D=0.

Aplicando-se as equações de equilíbrio para a barra *BD* segundo o plano *yz*, obtém:

$$Z_B + Z_D - F = 0 \qquad \text{(Eq.4)}$$

$$Z_D\frac{a}{2} - Z_B\frac{a}{2} = 0 \Rightarrow Z_D = Z_B \qquad \text{(Eq.5)}$$

Resolvendo-se o sistema de equações (3), (4) e (5) anteriores, chega-se, finalmente, a:

$$Z_B = \frac{F}{2}$$

$$Z_D = \frac{F}{2}$$

$$F_{BC} = \frac{3F}{2}$$

Portanto, concluímos que:

- Sob o carregamento dado, a barra *AB* está sujeita a uma força nula. Logo, a reação na articulação em *A* é nula.
- A barra *BC* está sujeita a uma força de compressão de módulo 3F/2.
- A barra *BD* está sujeita a um sistema de forças paralelas constituído pela força $F\vec{k}$ dada e pelo par de forças $\vec{F}_B = \frac{F}{2}\vec{k}$ e $\vec{F}_D = \frac{F}{2}\vec{k}$ atuantes em suas extremidades. Logo, a reação na articulação *D* é $\vec{F}_D = \frac{F}{2}\vec{k}$.