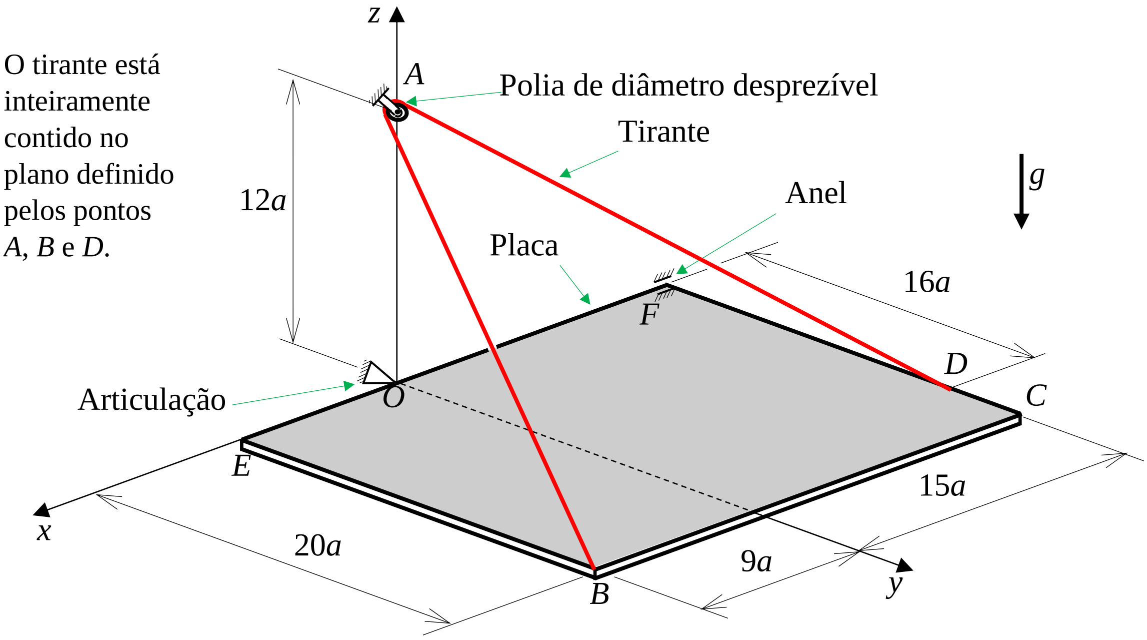
RESOLUÇÃO DA PROVA DE RECUPERAÇÃO – 2021

1ª QUESTÃO (3,0 pontos). A placa homogênea retangular EBCFE, de densidade superficial μ, repousa no plano horizontal Oxy, apoiada no ponto O por uma articulação fixa e no ponto F por um pequeno anel de eixo coincidente com Ox. Um tirante se prende nos pontos B e D da placa, passando por uma polia em A de diâmetro desprezível.



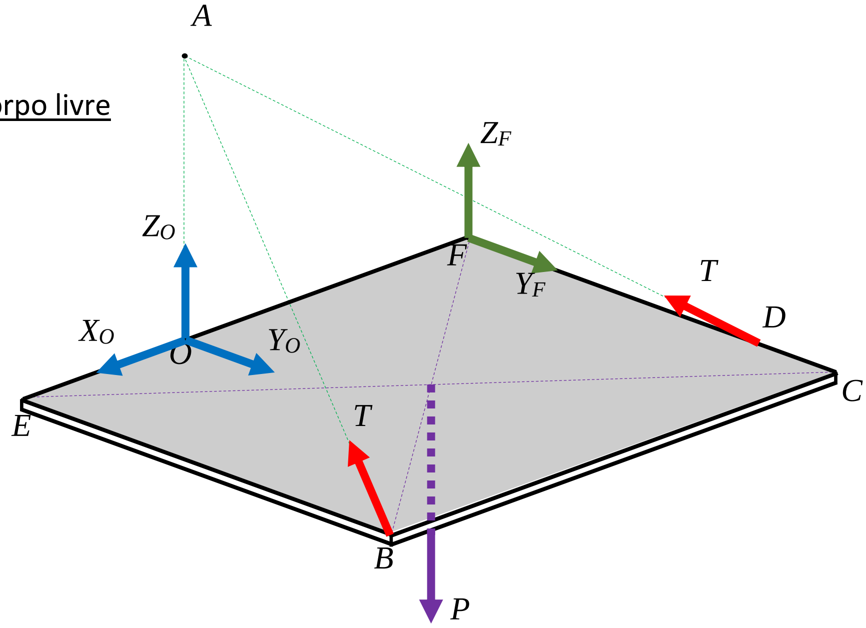
Pede-se:

(a) O diagrama de corpo livre da placa;

(b) As forças agentes nos tirantes.

RESOLUÇÃO

(a) <u>Diagrama de corpo livre</u>



(1,0)

(b) <u>Forças que o tirante aplica na placa</u>

O peso da placa se escreve como:

$$\vec{P} = -\,480\ a^2\mu g\,\vec{k}$$

Sejam $\vec{T}_B$ e $\vec{T}_D$ as forças aplicadas pelo tirante na placa:

$$\vec{T}_B = T\,\frac{-9a\,\vec{i} - 20a\,\vec{j} + 12a\,\vec{k}}{25a} = T\left(-0{,}36\,\vec{i} - 0{,}8\,\vec{j} + 0{,}48\,\vec{k}\right)$$

$$\vec{T}_D = T\,\frac{15a\,\vec{i} - 16a\,\vec{j} + 12a\,\vec{k}}{25a} = T\left(0{,}6\,\vec{i} - 0{,}64\,\vec{j} + 0{,}48\,\vec{k}\right)$$

Equilíbrio: $\boxed{M_x = 0}$

$$-\,480\ a^2\mu g\,(10a) + 0{,}48\,T\,(20a + 16a) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{T = \frac{2\,500}{9}\ a^2\mu g}$$

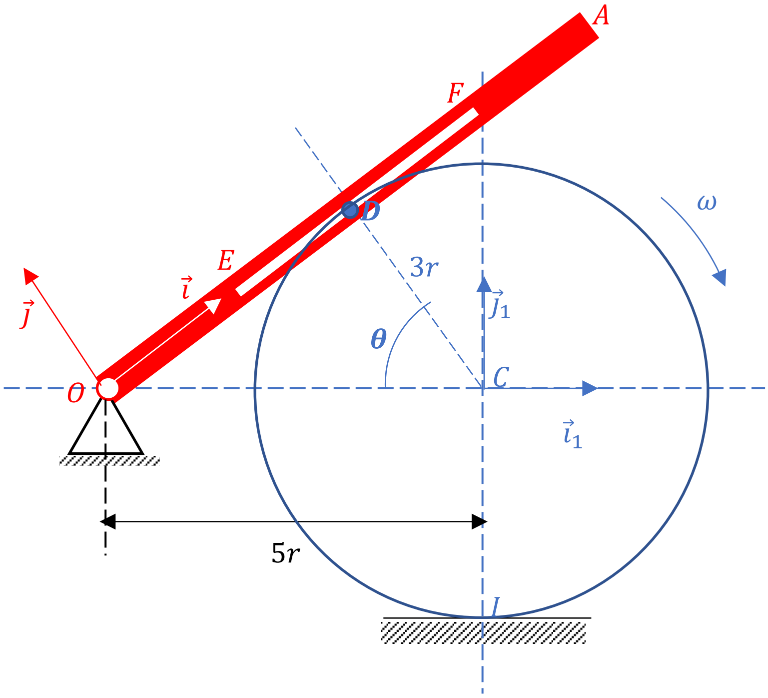
Portanto, em termos vetoriais temos:

$$\boxed{\vec{T}_B = \frac{100\ a^2\mu g}{9}\left(-\,9\,\vec{i} - 20\,\vec{j} + 12\,\vec{k}\right)}$$

$$\boxed{\vec{T}_D = \frac{100\ a^2\mu g}{9}\left(15\,\vec{i} - 16\,\vec{j} + 12\,\vec{k}\right)}$$

(2,0)

2ª QUESTÃO (3,5 pontos). O disco de centro C rola sem escorregar com velocidade angular ω constante sobre a superfície horizontal. O pino D, fixado à periferia do disco, desliza livremente no interior do rasgo EF da barra OA. $O\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$ e $C\vec{\imath}_1\vec{\jmath}_1\vec{k}_1$ são sistemas de referência ligados à barra e ao disco, respectivamente.



Pede-se, **PARA O INSTANTE ILUSTRADO NA FIGURA**, em que $\cos^{-1}\theta = \frac{3}{5}$

a) a velocidade absoluta do ponto D, descrita no sistema de eixos ligados à barra;
b) a velocidade de D relativa à barra;
c) a velocidade de arrastamento de D;
d) a velocidade angular Ω da barra.

RESOLUÇÃO

No instante ilustrado na figura, a velocidade absoluta de D é:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_I - \omega\vec{k} \wedge (D - I) = \vec{0} - \omega\vec{k} \wedge [(D - C) + (C - I)] = -\omega\vec{k} \wedge 3(r\vec{\jmath} + r\vec{\jmath}_1)$$

Notando que

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \quad \sin\theta = \frac{4}{5}$$

e que

$$\vec{\jmath}_1 = (\vec{\jmath}_1 \cdot \vec{\imath})\vec{\imath} + (\vec{\jmath}_1 \cdot \vec{\jmath})\vec{\jmath} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \cos(90° - \theta)\,\vec{\jmath} = \frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath}$$

tem-se:

$$\vec{v}_D = 3\omega r\vec{\imath} - 3\omega r\vec{k} \wedge \left(\frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath}\right) = 3\omega r\vec{\imath} - \frac{9\omega r}{5}\vec{\jmath} + \frac{12\omega r}{5}\vec{\imath} = \frac{27\omega r}{5}\vec{\imath} - \frac{9\omega r}{5}\vec{\jmath} \qquad (1{,}0)$$

Nesse instante, a velocidade de D relativa à barra é

$$\vec{v}_D^{rel} = (\vec{v}_D \cdot \vec{\imath})\vec{\imath} = \frac{27\omega r}{5}\vec{\imath} \qquad (0{,}5)$$

e a velocidade de arrastamento de D é

$$\vec{v}_D^{arr} = (\vec{v}_D \cdot \vec{\jmath})\vec{\jmath} = -\frac{9\omega r}{5}\vec{\jmath} \qquad (0{,}5)$$

Sendo $D' \in barra, D' \equiv D$, a velocidade absoluta de D' é

$$\vec{v}_{D'} = \vec{v}_D^{arr}$$

Chamando de Ω à velocidade angular da barra, tem-se:

$$-\frac{9\omega r}{5}\vec{j} = \vec{v}_O + \Omega\vec{k} \wedge (D - O) = \vec{0} + \Omega\vec{k} \wedge 4r\vec{i} = 4\Omega r\vec{j}$$

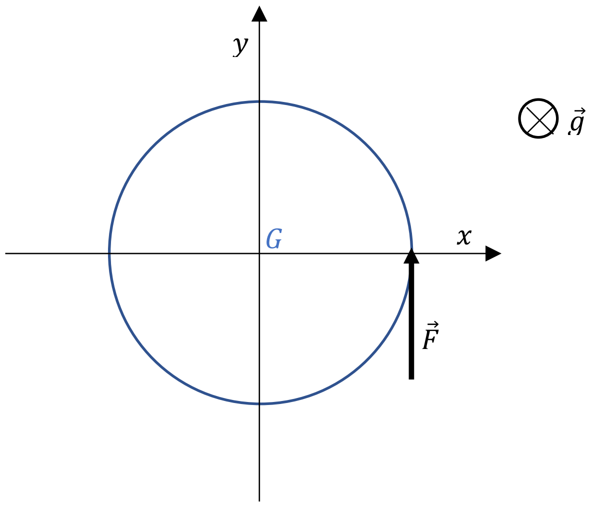
ou seja, no instante considerado,:

$$\Omega = -\frac{9}{20}\omega \qquad (1{,}5)$$

3ª QUESTÃO (3,5 pontos). Um disco de massa m e raio R, está apoiado e em repouso sobre o plano horizontal xy. Em um determinado instante, uma força $\vec{F}$ é aplicada no ponto C do disco, conforme ilustrado na figura. Desprezando o atrito entre o plano xy e o disco, pede-se, para esse instante:

(a) determinar o vetor aceleração angular do disco;
(b) determinar o vetor aceleração do centro de massa G do disco;
(c) determinar o ponto P do disco onde a aceleração é nula.

Dado: $J_{Gz} = \frac{mR^2}{2}$



RESOLUÇÃO

Do Teorema da Quantidade de Movimento Angular, tem-se:

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = \vec{M}_G^{ext} = J_{Gz}\dot{\omega}\vec{k} = \frac{mR^2}{2}\dot{\omega}\vec{k} = F \cdot R\vec{k} \qquad (0{,}5)$$

Assim, resulta:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{2F}{mR}\vec{k} \qquad (0{,}5)$$

Do Teorema da Resultante, tem-se:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext} = F\vec{j}, \qquad (0{,}5)$$

ou seja:

$$\vec{a}_G = \frac{F}{m}\vec{j} \qquad (0{,}5)$$

Da equação do campo de acelerações, tem-se:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_G + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge (P - G) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - G)] = \frac{F}{m}\vec{j} + \frac{2F}{mR}\vec{k} \wedge (P - G) \qquad (0{,}5)$$

Impondo-se

$$\vec{a}_P = \vec{0}$$

E denotando-se

$$(P - G) = x\vec{i} + y\vec{j},$$

Tem-se:

$$\frac{F}{m}\vec{j} + \frac{2F}{mR}\vec{k} \wedge (x\vec{i} + y\vec{j}) = \vec{0} \qquad (0{,}5)$$

ou seja:

$$\frac{F}{m}\vec{j} + \frac{2F}{mR}(x\vec{j} - yi) = \vec{0}$$

Portanto, resulta:

$$x = -\frac{R}{2} \qquad (0{,}5)$$
$$y = 0$$