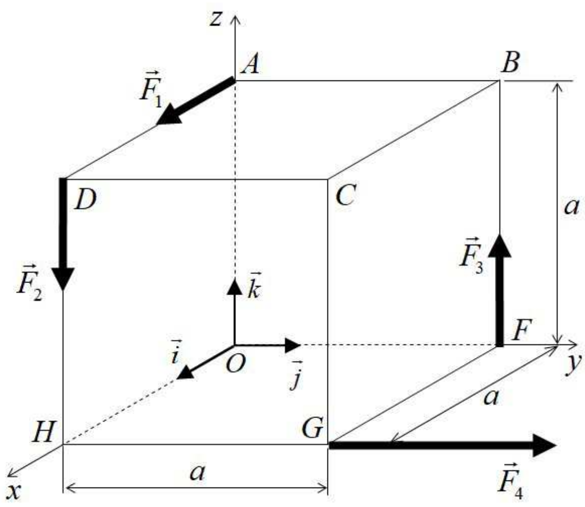
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Mecânica I   PME 3100   Prova nº Rec.   Data 20 / 02 / 2018

Duração da Prova: 120 minutos

- **Não é permitido o porte de calculadoras, "tablets", celulares e dispositivos similares.**
- **Após o início da distribuição do enunciado da prova, é proibido sair da sala antes das 08:30.**
- **A partir do momento em que a prova for encerrada, não é permitido ao aluno continuar escrevendo na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.**

Questão 1 (3,0 pontos): Considere o sistema constituído pelas seguintes forças:



$\vec{F}_1 = P\vec{i}$ aplicada em A

$\vec{F}_2 = -P\vec{k}$ aplicada em D

$\vec{F}_3 = P\vec{k}$ aplicada em F

$\vec{F}_4 = 2P\vec{j}$ aplicada em G

Determinar:

a) a resultante $\vec{R}$ e o momento $\vec{M}_O$ em relação ao polo O do sistema de forças;

b) o momento em relação ao eixo $O\vec{k}$;

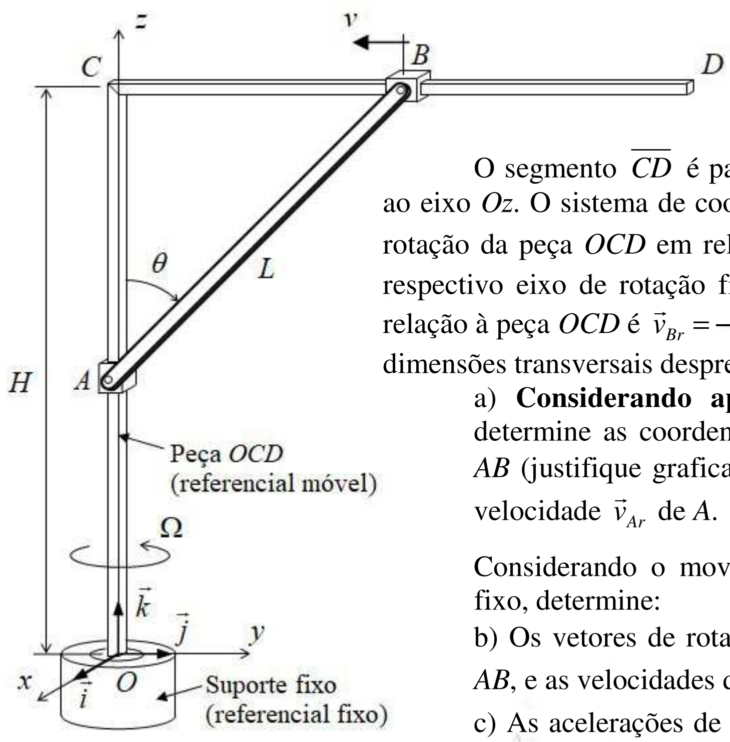
Verificar, justificando devidamente, se:

c) o sistema é redutível a um binário ou a uma única força;

d) o sistema possui um eixo central.

Determinar:

e) o lugar geométrico dos pontos de momento mínimo.



Questão 2 (3,5 pontos): A barra AB tem comprimento L, e suas extremidades estão articuladas em cursores que percorrem a peça OCD.

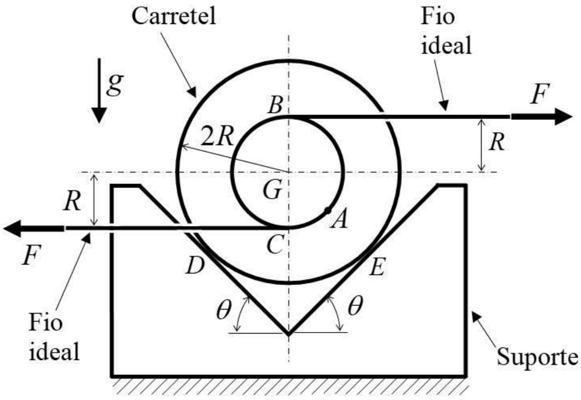
O segmento $\overline{CD}$ é paralelo ao eixo Oy, e o segmento $\overline{CO}$ é paralelo ao eixo Oz. O sistema de coordenadas $Oxyz$ é fixo na peça OCD. O vetor de rotação da peça OCD em relação ao suporte fixo é $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$, constante, e o respectivo eixo de rotação fixo é o eixo Oz. A velocidade do ponto B em relação à peça OCD é $\vec{v}_{Br} = -v\vec{j}$, com v constante. Para simplificar, considere dimensões transversais desprezíveis, de tal forma que AB esteja no plano Oyz.

a) **Considerando apenas o movimento relativo da barra** AB, determine as coordenadas do centro de rotação instantâneo da barra AB (justifique graficamente), o vetor de rotação $\vec{\omega}_r$ da barra AB e a velocidade $\vec{v}_{Ar}$ de A.

Considerando o movimento da barra AB em relação ao referencial fixo, determine:

b) Os vetores de rotação de arrastamento $\vec{\omega}_a$ e absoluto $\vec{\omega}$ da barra AB, e as velocidades de arrastamento $\vec{v}_{Ba}$ e absoluta $\vec{v}_B$ de B.

c) As acelerações de arrastamento $\vec{a}_{Ba}$, complementar $\vec{a}_{Bc}$ e absoluta $\vec{a}_B$ de B.

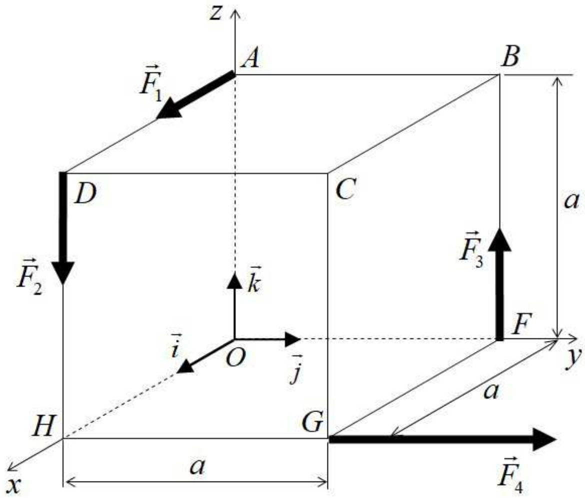


Questão 3 (3,5 pontos): O carretel de massa m e centro de massa G possui distribuição de massa tal que seu momento de inércia em relação ao seu polo A é dado por $J_{Az} = \dfrac{5mR^2}{4}$. Sobre o carretel enrola-se um fio ideal sujeito às forças de módulo constante porém desconhecido F. O carretel apoia-se constantemente sobre um suporte em "V". O coeficiente de atrito dinâmico entre as superfícies nos pontos de contato D e E é μ, e o ângulo θ vale $\pi/4$ radianos. Nessas condições pedem-se:

a) O diagrama de corpo livre do carretel.
b) O valor F do módulo das forças constantes aplicadas ao fio capazes de proporcionar ao carretel uma aceleração angular de módulo α.

GABARITO – PME3100 Mecânica I, Recuperação, 20 de fevereiro de 2018

Questão 1 (3,0 pontos): Considere o sistema constituído pelas seguintes forças:



$\vec{F}_1 = P\vec{i}$ aplicada em A

$\vec{F}_2 = -P\vec{k}$ aplicada em D

$\vec{F}_3 = P\vec{k}$ aplicada em F

$\vec{F}_4 = 2P\vec{j}$ aplicada em G

Determinar:

a) a resultante $\vec{R}$ e o momento $\vec{M}_O$ em relação ao polo O do sistema de forças;

b) o momento em relação ao eixo $O\vec{k}$;

Verificar, justificando devidamente, se:

c) o sistema é redutível a um binário ou a uma única força;

d) o sistema possui um eixo central.

Determinar:

e) o lugar geométrico dos pontos de momento mínimo.

Solução

a) Resultante do sistema de forças: $\vec{R} = P\vec{i} + 2P\vec{j} - P\vec{k} + P\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{R} = P\vec{i} + 2P\vec{j}}$ **0,5**

Momento resultante do sistema de forças em relação ao pólo O:

$$\vec{M}_O = (A-O)\wedge P\vec{i} + (G-O)\wedge 2P\vec{j} + (D-O)\wedge(-P\vec{k}) + (F-O)\wedge P\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_O = a\vec{k}\wedge P\vec{i} + (a\vec{i} + a\vec{j})\wedge 2P\vec{j} + (a\vec{i} + a\vec{k})\wedge(-P\vec{k}) + a\vec{j}\wedge P\vec{k} \Rightarrow \vec{M}_O = aP\vec{j} + 2aP\vec{k} + aP\vec{j} + aP\vec{i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_O = aP\vec{i} + 2aP\vec{j} + 2aP\vec{k}}$$ **0,5**

b) Momento do sistema de forças em relação ao eixo $O\vec{k}$:

$$M_{Oz} = \vec{M}_O \cdot \vec{k} = (aP\vec{i} + 2aP\vec{j} + 2aP\vec{k})\cdot\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{Oz} = 2aP}$$ **0,5**

c) O sistema de forças não é redutível a um binário, pois sua resultante $\vec{R} = P\vec{i} + 2P\vec{j}$ é diferente de zero.

Invariante escalar: $I = \vec{R}\cdot\vec{M}_O = (P\vec{i} + 2P\vec{j})\cdot(aP\vec{i} + 2aP\vec{j} + 2aP\vec{k}) \Rightarrow I = aP^2 + 4aP^2 = 5aP^2 \neq 0$ **0,5**

O invariante escalar é diferente de zero, logo, o sistema de forças não é redutível a uma única força.

d) Como esse sistema não é redutível a um binário e também não é um sistema nulo, ele possui um eixo central.

0,5

(e) O lugar geométrico dos pontos de momento mínimo é o eixo central do sistema de forças, descrito pela equação:

$$E = O + \frac{\vec{R}\wedge\vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \lambda\cdot\vec{R}$$

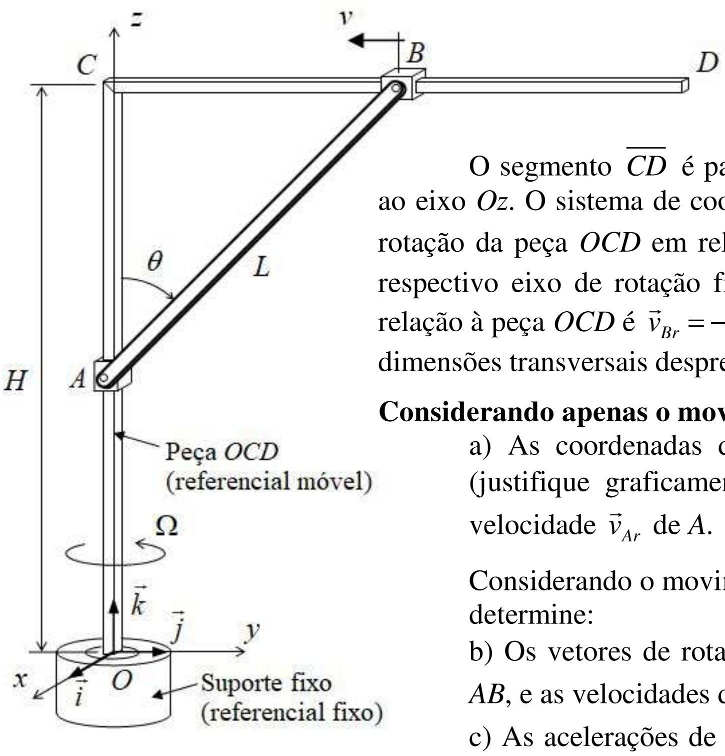
onde E representa um ponto do eixo central, O é o pólo onde se calcula o momento do sistema de forças ($\vec{M}_O$), $\vec{R}$ é a resultante do sistema de forças e λ é um número real com dimensão $[Comprimento].[Força]^{-1}$.

Substituindo-se os respectivos vetores na expressão acima, obtém-se:

$$E = O + \frac{(P\vec{i} + 2P\vec{j})\wedge(aP\vec{i} + 2aP\vec{j} + 2aP\vec{k})}{|(P\vec{i} + 2P\vec{j})\cdot(P\vec{i} + 2P\vec{j})|} + \lambda\cdot(P\vec{i} + 2P\vec{j})$$

$$\Rightarrow E = \frac{2aP^2\vec{k} - 2aP^2\vec{j} - 2aP^2\vec{k} + 4aP^2\vec{i}}{P^2 + 4P^2} + \lambda\cdot(P\vec{i} + 2P\vec{j})$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{4aP^2\vec{i} - 2aP^2\vec{j}}{5P^2} + \lambda\cdot(P\vec{i} + 2P\vec{j})}$$ **0,5**



Questão 2 (3,5 pontos): A barra *AB* tem comprimento *L*, e suas extremidades estão articuladas em cursores que percorrem a peça *OCD*.

O segmento $\overline{CD}$ é paralelo ao eixo *Oy*, e o segmento $\overline{CO}$ é paralelo ao eixo *Oz*. O sistema de coordenadas *Oxyz* é fixo na peça *OCD*. O vetor de rotação da peça *OCD* em relação ao suporte fixo é $\vec{\Omega}=\Omega\vec{k}$, constante, e o respectivo eixo de rotação fixo é o eixo *Oz*. A velocidade do ponto *B* em relação à peça *OCD* é $\vec{v}_{Br}=-v\vec{j}$, com *v* constante. Para simplificar, considere dimensões transversais desprezíveis, de tal forma que *AB* esteja no plano *Oyz*.

Considerando apenas o movimento relativo da barra *AB*, determine:

a) As coordenadas do centro de rotação instantâneo da barra *AB* (justifique graficamente), o vetor de rotação $\vec{\omega}_r$ da barra *AB* e a velocidade $\vec{v}_{Ar}$ de *A*.

Considerando o movimento da barra *AB* em relação ao referencial fixo determine:

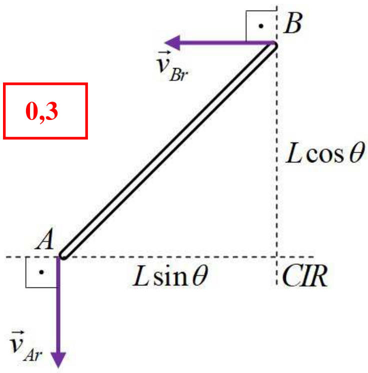
b) Os vetores de rotação de arrastamento $\vec{\omega}_a$ e absoluto $\vec{\omega}$ da barra *AB*, e as velocidades de arrastamento $\vec{v}_{Ba}$ e absoluta $\vec{v}_B$ de *B*.

c) As acelerações de arrastamento $\vec{a}_{Ba}$, complementar $\vec{a}_{Bc}$ e absoluta $\vec{a}_B$ de *B*.

Solução

a) **Considerando apenas o movimento relativo da barra** *AB*, observa-se que se trata de movimento plano: A peça *OCD* e os cursores definem as direções das velocidades de *A* e *B*:

0,3



$\boxed{CIR-O=L\sin\theta\,\vec{j}+(H-L\cos\theta)\vec{k}}$ 0,2

Velocidade de *B*:

$|\vec{v}_{Br}|=v=\omega_r L\cos\theta \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{\omega}_r=\dfrac{v}{L\cos\theta}\vec{i}}$ 0,5

Velocidade de *A*:

$|\vec{v}_{Ar}|=\omega_r L\sin\theta=\dfrac{v}{L\cos\theta}L\sin\theta \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{v}_{Ar}=-v\tan\theta\,\vec{k}}$ 0,5

b) O vetor de rotação do movimento de arrastamento é o vetor de rotação do referencial móvel: $\boxed{\vec{\omega}_a=\Omega\vec{k}}$ 0,5

Pela composição de movimento, temos o vetor de rotação absoluto: $\vec{\omega}=\vec{\omega}_r+\vec{\omega}_a \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{\omega}=\dfrac{v}{L\cos\theta}\vec{i}+\Omega\vec{k}}$

Velocidade de arrastamento:

$\vec{v}_{Ba}=\vec{v}_{Ca}+\vec{\omega}_a\wedge(B-C)=\vec{0}+\Omega\vec{k}\wedge L\sin\theta\,\vec{j} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{v}_{Ba}=-\Omega L\sin\theta\,\vec{i}}$ 0,5

Velocidade absoluta: $\vec{v}_B=\vec{v}_{Br}+\vec{v}_{Ba}=-v\vec{j}-\Omega L\sin\theta\,\vec{i} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{v}_B=-\Omega L\sin\theta\,\vec{i}-v\vec{j}}$

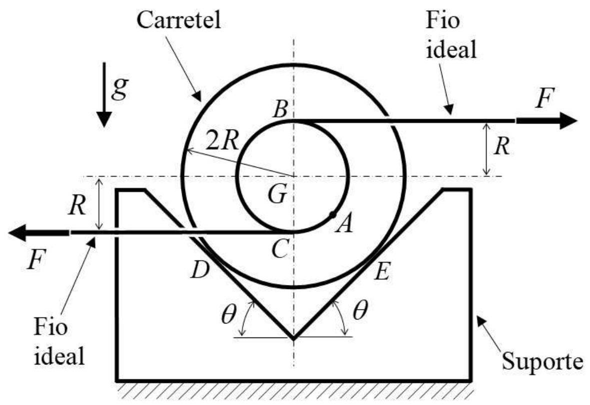
c) Aceleração de arrastamento:

$\vec{a}_{Ba}=\vec{a}_{Ca}+\vec{\alpha}_a\wedge(B-C)+\vec{\omega}_a\wedge[\vec{\omega}_a\wedge(B-C)]=\vec{0}+\vec{0}+\Omega\vec{k}\wedge(\Omega\vec{k}\wedge L\sin\theta\,\vec{j}) \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{a}_{Ba}=-\Omega^2 L\sin\theta\,\vec{j}}$ 0,3

Aceleração complementar: $\vec{a}_{Bc}=2\vec{\omega}_a\wedge\vec{v}_{Br}=2\Omega\vec{k}\wedge(-v\vec{j}) \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{a}_{Bc}=2\Omega v\vec{i}}$ 0,3

Aceleração relativa: $\vec{a}_{Br}=\vec{0}$ (uma vez que *v* é constante) 0,4

Aceleração absoluta: $\vec{a}_B=\vec{a}_{Br}+\vec{a}_{Ba}+\vec{a}_{Bc}=\vec{0}-\Omega^2 L\sin\theta\,\vec{j}+2\Omega v\vec{i} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{a}_B=2\Omega v\vec{i}-\Omega^2 L\sin\theta\,\vec{j}}$

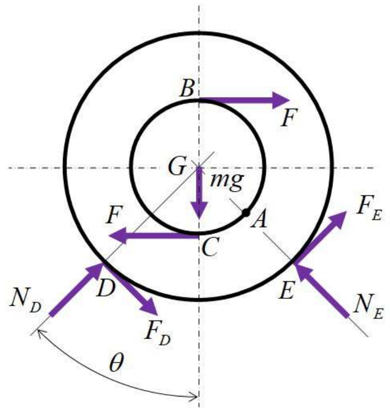


Questão 3 (3,5 pontos): O carretel de massa m e centro de massa G possui distribuição de massa tal que seu momento de inércia em relação ao seu polo A é dado por $J_{Az} = \dfrac{5mR^2}{4}$. Sobre o carretel enrola-se um fio ideal sujeito às forças de módulo constante porém desconhecido F. O carretel apoia-se constantemente sobre um suporte em "V". O coeficiente de atrito dinâmico entre as superfícies nos pontos de contato D e E é μ, e o ângulo θ vale $\pi/4$ radianos. Nessas condições pedem-se:

a) O diagrama de corpo livre do carretel.
b) O valor F do módulo das forças constantes aplicadas ao fio capazes de proporcionar ao carretel uma aceleração angular de módulo α.

Solução
a) Diagrama de corpo livre:

1,5



b) O carretel, na situação proposta, apenas gira em torno de seu centro de massa G. A aplicação do Teorema da Resultante, já levando em conta o valor do ângulo θ, conduz a:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F + F + N_D\frac{\sqrt{2}}{2} + F_D\frac{\sqrt{2}}{2} - N_E\frac{\sqrt{2}}{2} + F_E\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_D\frac{\sqrt{2}}{2} - F_D\frac{\sqrt{2}}{2} + N_E\frac{\sqrt{2}}{2} + F_E\frac{\sqrt{2}}{2} - mg = 0 \qquad (1)$$

Como há escorregamento puro entre as superfícies em contato, podemos escrever, a partir das equações (1):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_D(1+\mu) - N_E(1-\mu) = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_D(1-\mu) + N_E(1+\mu) = mg\sqrt{2} \qquad (2)$$

Resolvendo as equações (2) obtêm-se

$$N_D = \frac{mg\sqrt{2}(1-\mu)}{2(1+\mu^2)}$$
$$N_E = \frac{mg\sqrt{2}(1+\mu)}{2(1+\mu^2)}$$

Com N_E e N_D determinamos F_E e F_D, ou seja:

$$F_D = \mu\frac{mg\sqrt{2}(1-\mu)}{2(1+\mu^2)}$$
$$F_E = \mu\frac{mg\sqrt{2}(1+\mu)}{2(1+\mu^2)}$$

1,0

Aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento Angular em relação ao centro de massa G obtemos:

$$J_{Gz}\vec{\alpha} = \vec{M}_G^{ext}$$
$$\Rightarrow -J_{Gz}\alpha\vec{k} = (B-G)\wedge\vec{F} + (C-G)\wedge\vec{F} + (D-G)\wedge\vec{F}_D + (E-G)\wedge\vec{F}_E$$

0,3

$$\Rightarrow -J_{Gz}\alpha\vec{k} = (-RF - RF + 2RF_D + 2RF_E)\vec{k} \qquad (3)$$

Efetuando a mudança de pólo para o momento de inércia,

$$J_{Az} = J_{Gz} + md_{A,G}^2 \Rightarrow J_{Gz} = J_{Az} - mR^2 \Rightarrow J_{Gz} = \frac{mR^2}{4}$$

0,5

e utilizando também os valores das forças de atrito calculadas anteriormente, a equação (3) leva a:

$$-\frac{mR^2}{4}\alpha = 2R\left(-F + \frac{\mu mg\sqrt{2}}{2}\frac{(1-\mu+1+\mu)}{(1+\mu^2)}\right) \qquad (4)$$

Resolvendo (4) para F obtemos, finalmente: $\boxed{F = \dfrac{\mu mg\sqrt{2}}{(1+\mu^2)} + \dfrac{mR\alpha}{8}}$ **0,2**