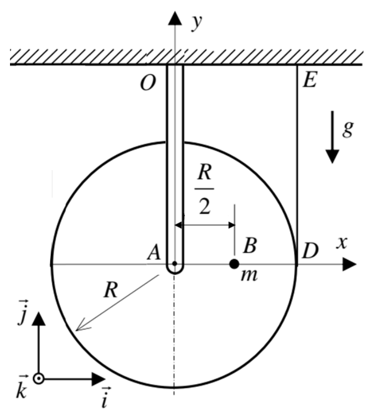
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

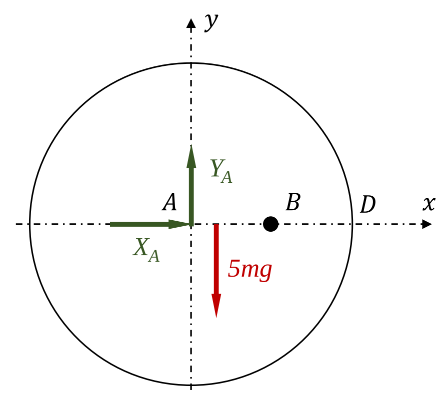
PME 3100 – MECÂNICA I (Reoferecimento) – Prova 3 – 13 de Junho de 2019
Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

Questão 1 (3,0 pontos). No *sistema* mostrado na figura, o disco rígido e homogêneo de centro A possui massa $4m$, raio R e uma massa concentrada m fixa no ponto B. A distância entre os pontos A e B é $R/2$. O sistema encontra-se inicialmente em repouso, suspenso pelo fio DE e pela barra AO articulada ao disco em A. Num dado instante, o fio DE se rompe. Para o instante *imediatamente* após o rompimento do fio, e considerando o sistema de coordenadas $Axyz$, pede-se para o *sistema* composto pelo disco e pela massa concentrada:
a) as coordenadas do centro de massa;
b) o momento de inércia em relação ao eixo Az;
c) o diagrama de corpo livre;
d) a aceleração angular $\vec{\alpha}$ do disco;
e) as reações vinculares na articulação A.



a) Considerando a definição de centro de massa, tem-se:

$$(G-A) = x_G\vec{\imath} + y_G\vec{\jmath} + z_G\vec{k} \implies \begin{cases} x_G &= \frac{4m.0+mR/2}{4m+m} = \frac{R}{10} \\ y_G &= 0 \text{ (simetria)} \\ z_G &= 0 \text{ (simetria)} \end{cases} \quad (0,5)$$



b) Para o *sistema* composto pelo disco e pela massa concentrada:

$$J_{Az} = J_{Az}^{disco} + J_{Az}^{massa} = \frac{4mR^2}{2} + \frac{mR^2}{4} = \frac{9mR^2}{4} \quad (0,5)$$

c) Vide DCL ao lado. (0,5)

d) Aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA) ao *sistema*, com respeito ao pólo A, para o instante *imediatamente* após o rompimento do fio ($\vec{\omega} = \vec{0}$), tem-se:

$$\vec{M}_A^{ext} = 5m(G-A) \wedge \vec{a}_A + (J_{Az}\alpha)\vec{k} \quad \text{(movimento no plano } xy\text{)}$$

Considerando que $\vec{a}_A = \vec{0}$ (articulação), e utilizando a posição do centro de massa e o momento de inércia calculados nos itens anteriores, obtêm-se:

$$\left(-5mg\frac{R}{10}\right)\vec{k} = \left(\frac{9mR^2}{4}\alpha\right)\vec{k} \implies \vec{\alpha} = -\left(\frac{2g}{9R}\right)\vec{k} \quad (1,0)$$

e) Aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento (TQM) ao *sistema* para o instante *imediatamente* após o rompimento do fio ($\vec{\omega} = \vec{0}$), tem-se:

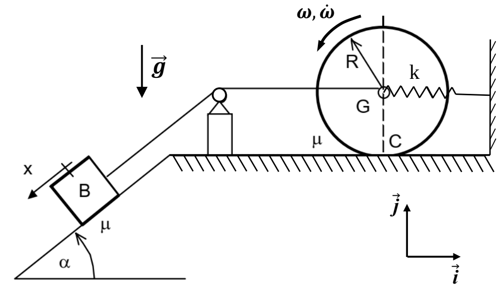
$$\vec{R}^{ext} = 5m\vec{a}_G \qquad \vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge (G-A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-A)] = -\left(\frac{g}{45}\right)\vec{\jmath}$$

$$(X_A)\,\vec{\imath} + (Y_A - 5mg)\,\vec{\jmath} = -\left(\frac{5mg}{45}\right)\vec{\jmath} \implies \begin{cases} X_A &= 0 \\ Y_A &= \frac{44mg}{9} \end{cases} \quad (0,5)$$

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-970 – São Paulo, SP – Brasil
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570

Questão 2 (3,5 pontos).

O disco rígido e homogêneo de centro G, raio R e massa M, rola sem escorregar num plano horizontal. O disco está conectado ao plano vertical por uma mola ideal linear de constante elástica k. Um fio ideal une o centro do disco a um bloco B de massa m, através de uma polia de inércia desprezível. O bloco B escorrega *com atrito* sobre um plano com inclinação α, *partindo do repouso* em $x = 0$. Assumindo que no instante inicial a mola não está deformada, e que o coeficiente de atrito entre o disco e o plano horizontal e entre o bloco e o plano inclinado é μ, pede-se:



a) a energia cinética do *sistema* em função da velocidade angular ω do disco;
b) o trabalho das forças externas do *sistema* em função de x;
c) a velocidade angular ω do disco em função de x;
d) a aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco em função de x.

a) Para o *sistema* composto pelo disco e pelo bloco, tem-se:

$$E = E_{bloco} + E_{disco} = \frac{m\vec{v}_B \cdot \vec{v}_B}{2} + \left(\frac{M\vec{v}_G \cdot \vec{v}_G}{2} + \frac{J_{Gz}\omega^2}{2}\right)$$

Sendo $\vec{v}_G = (-\omega R)\vec{\imath}$, $\vec{v}_B = \vec{v}_G = (-\omega R)\vec{\imath}$ e $J_{Gz} = MR^2/2$, então:

$$E = \frac{m\omega^2 R^2}{2} + \left(\frac{M\omega^2 R^2}{2} + \frac{M\omega^2 R^2}{4}\right) \implies E(\omega) = \frac{\omega^2 R^2\,(2m + 3M)}{4} \qquad (1,0)$$

b) O trabalho das forças externas do *sistema* pode ser escrito como:

$$W^{ext} = W_C^{ext} + W_{NC}^{ext} = -\Delta U + W_{NC}^{ext}$$

Considerando que o disco rola sem escorregar ($\vec{v}_C = \vec{0}$), a variação da energia potencial (ΔU) e o trabalho das forças não conservativas (W_{NC}^{ext}) do *sistema* são expressas, como segue:

$$\Delta U = \Delta U^{disco} + \Delta U^{bloco} + \Delta U^{elastica} = -(mgsin\alpha)x + \frac{kx^2}{2}$$

$$W_{NC}^{ext} = -(\mu mgcos\alpha)x \qquad (0,5)$$

$$W^{ext}(x) = mg(sin\alpha - \mu cos\alpha)x - \frac{kx^2}{2} \qquad (0,5)$$

c) Aplicando o Teorema da Energia Cinética (TEC) para o *sistema* partindo do repouso, tem-se:

$$E_2 - E_1 = W^{ext} \implies \omega(x) = \sqrt{\frac{4[mg(sin\alpha - \mu cos\alpha)x - \frac{kx^2}{2}]}{(2m + 3M)\,R^2}} \qquad (1,0)$$

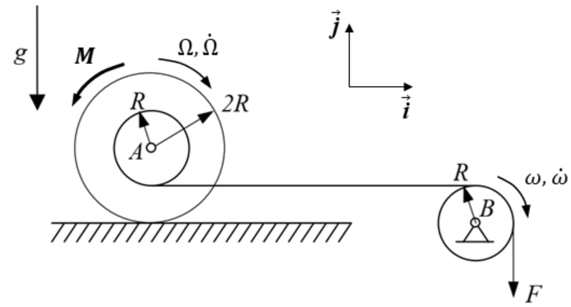
d) Derivando no tempo a expressão da velocidade angular obtida no item anterior, tem-se:

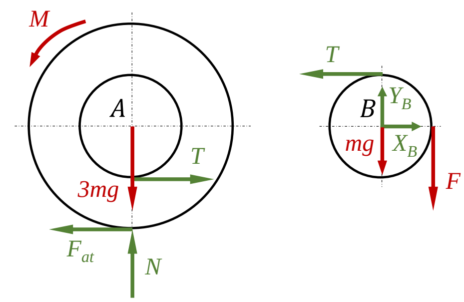
$$\dot{\omega}(x) = \frac{2[mg(sin\alpha - \mu cos\alpha) - kx]}{(2m + 3M)\,R} \qquad (0,5)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 3 (3,5 pontos). O sistema ilustrado na figura é composto por dois corpos rígidos e homogêneos conectados por um fio ideal. O primeiro corpo corresponde a um carretel de centro A, massa $3m$ e momento de inércia $J_{Az} = 3mR^2$ que rola sem escorregar sobre o plano horizontal. O segundo corpo é uma polia de centro B, massa m e momento de inércia $J_{Bz} = mR^2/2$. Admitindo que não há escorregamento entre o fio e os corpos, e sabendo que uma força F (constante) é aplicada à extremidade do fio na polia e um momento M (constante) é aplicado ao carretel, pede-se:
a) os diagramas de corpo livre dos dois corpos;
b) a relação entre as acelerações angulares $\dot{\omega}$ e $\dot{\Omega}$ dos dois corpos;
c) a aceleração do ponto A em função da aceleração angular $\dot{\Omega}$ do carretel;
d) as acelerações angulares $\dot{\omega}$ e $\dot{\Omega}$ dos dois corpos;
e) a força de atrito entre o carretel e o solo, bem como o valor mínimo do coeficiente de atrito para que a condição de rolamento sem escorregamento seja mantida.





a) Vide DCL acima. (1,0)

b) Sendo o fio ideal e não havendo escorregamento entre o fio e os corpos, tem-se:

$$\vec{v}_{fio} = (\Omega R)\vec{\imath} = (\omega R)\vec{\imath} \implies \begin{cases} \Omega &= \omega \\ \dot{\Omega} &= \dot{\omega} \end{cases} \qquad (0,5)$$

c) Como o carretel rola sem escorregar, tem-se

$$\vec{a}_A = (2\dot{\Omega}R)\vec{\imath} \qquad (0,5)$$

d) Aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA) ao carretel com respeito ao pólo A, tem-se:

$$\vec{M}_A^{ext} = 3m(G-A)\wedge\vec{a}_A + (-J_{Az}\dot{\Omega})\vec{k} \quad \text{(movimento no plano } xy\text{)}$$

$$(M + TR - 2F_{at}R)\,\vec{k} = \left(-3mR^2\dot{\Omega}\right)\vec{k} \implies \dot{\Omega} = \frac{2F_{at}R - M - TR}{3mR^2} \quad (a) \qquad (0,25)$$

Aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento (TQM) ao carretel, obtêm-se:

$$\vec{R}^{ext} = 3m\vec{a}_G \qquad \vec{a}_G = \vec{a}_A = (2\dot{\Omega}R)\vec{\imath}$$

$$(T - F_{at})\,\vec{\imath} + (N - 3mg)\,\vec{\jmath} = \left(6mR\dot{\Omega}\right)\vec{\imath} \implies \begin{cases} T - F_{at} &= 6mR\dot{\Omega} \\ N &= 3mg \end{cases} \quad (b) \qquad (0,25)$$

Aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA) a polia com respeito ao pólo B, tem-se:

$$\vec{M}_B^{ext} = m(G-B)\wedge\vec{a}_B + (-J_{Bz}\dot{\omega})\vec{k} \quad \text{(movimento no plano } xy\text{)}$$

$$(TR - FR)\,\vec{k} = \left(-\frac{mR^2}{2}\dot{\omega}\right)\vec{k} \implies T = F - \frac{mR}{2}\dot{\omega} = F - \frac{mR}{2}\dot{\Omega} \quad (c) \qquad (0,25)$$

Finalmente, resolvendo o sistema de equações $(a) - (c)$, obtêm-se:

$$\dot{\Omega} = \dot{\omega} = \frac{2(FR - M)}{31mR^2} \qquad T = \frac{30FR + M}{31R}$$

$$F_{at} = \frac{18FR + 13M}{31R} \qquad N = 3mg \qquad (0,25)$$

e) Para que a condição de rolamento sem escorregamento seja mantida é necessário que:

$$|F_{at}| \leqslant \mu N \implies \mu \geqslant \frac{18FR + 13M}{93mgR} \qquad (0,5)$$