ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

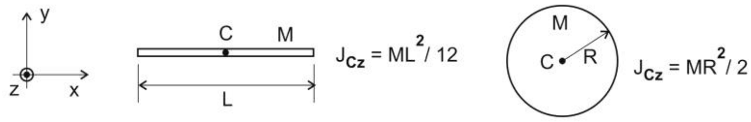
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Terceira Prova – 24 de novembro de 2015

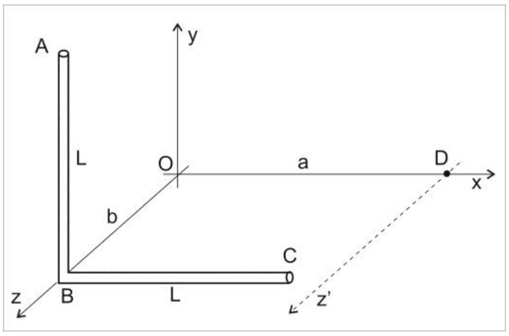
Duração da Prova: 110 minutos

- **Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos, como calculadoras, "tablets" e celulares.**
- **Após o início da distribuição do enunciado da prova, é proibido sair da sala antes das 08:30.**
- **A partir do momento em que a prova for encerrada, não é permitido ao aluno escrever mais nada na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.**

Dados, para todas as questões:



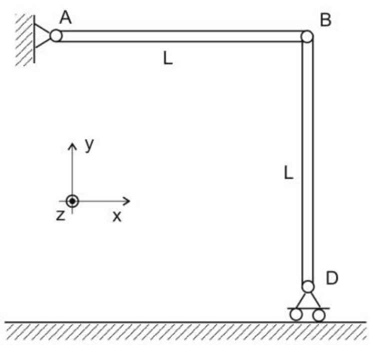
Questão 1 (2,5 pontos): Duas barras esbeltas e homogêneas *AB* e *BO*, cada uma com massa *m* e comprimento *L*, estão soldadas fazendo uma peça em forma de "L", conforme mostrado na figura. Pedem-se:



a) calcule o momento de inércia *Jz* e o produto de inércia *Jzy* dessa peça;

b) calcule o momento de inércia *Jz'* dessa peça, em relação ao eixo *z'* paralelo a *z* e que passa pelo ponto *D*.

Questão 2 (3,5 pontos): Duas barras uniformes, cada uma de massa *m* e comprimento *L*, estão articuladas em *B* como mostra a figura. Este sistema está num plano vertical, o ponto *D* da barra *BD* pode escorregar sem atrito no plano horizontal, e o ponto *A* da barra *AB* está preso por uma articulação externa. Desloca-se levemente o ponto *D* para a esquerda, soltando-o em seguida, fazendo com que o sistema entre em movimento. Para o instante em que o ponto *D* estiver exatamente abaixo de *A*, pedem-se, em função dos dados:

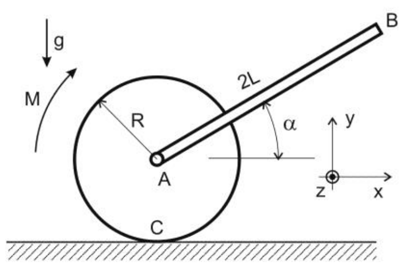


a) construa os diagramas de corpo livre das barras *AB* e *BD*;

b) obtenha a relação entre os vetores rotação $\vec{\omega}_{AB}$ e $\vec{\omega}_{BD}$;

c) obtenha a expressão da velocidade $\vec{v}_D$ do ponto *D*.

Questão 3 (4,0 pontos): O disco homogêneo de centro *A*, massa *2m* e raio *R* está ligado por uma articulação ideal (em *A*) à barra homogênea *AB*, que possui massa *m* e comprimento 2*L*. O disco rola sem escorregar sobre o plano horizontal, e deseja-se aplicar a este disco um binário $\vec{M}$, como indicado na figura, de modo que o ângulo α, entre a direção da barra e a horizontal, permaneça constante. Pedem-se, em função dos dados do problema (m, R, L, α e g):



a) construa os diagramas de corpo livre da barra e do disco;

b) considerando a barra, determine a aceleração do ponto *A* necessária para que o ângulo α permaneça constante;

c) obtenha as componentes das forças atuantes no ponto *A* da barra *AB*;

d) determine a aceleração angular do disco;

e) obtenha as forças reativas no ponto *C* do disco em contato com o solo;

f) determine o binário $\vec{M}$ a ser aplicado ao disco.

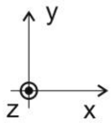
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

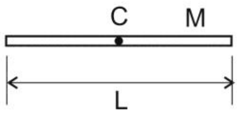
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Terceira Prova – 24 de novembro de 2015

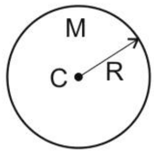
GABARITO

Dados, para todas as questões:



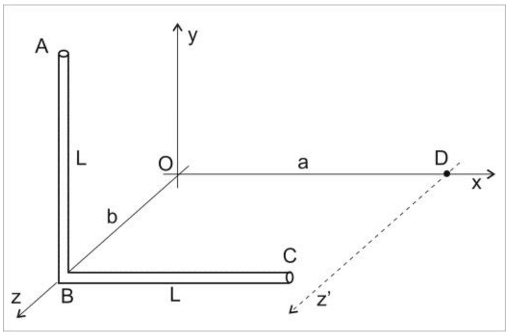


$J_{Cz} = ML^2/12$



$J_{Cz} = MR^2/2$

Questão 1 (2,5 pontos): Duas barras esbeltas e homogêneas *AB* e *BO*, cada uma com massa *m* e comprimento *L*, estão soldadas fazendo uma peça em forma de "L", conforme mostrado na figura. Pedem-se:



a) calcule o momento de inércia *Jz* e o produto de inércia *Jzy* dessa peça;

b) calcule o momento de inércia *Jz'* dessa peça, em relação ao eixo *z'* paralelo a *z* e que passa pelo ponto *D*.

Solução:

a)

Momento de inércia:

Barra AB: distância do centro de massa até z: $\frac{L}{2}$

$$J_{ABz} = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3}$$

Barra BC: distância do centro de massa até *z* : $\frac{L}{2}$

$$J_{BCz} = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3}$$

Assim: $\boxed{J_z = J_{ABz} + J_{BCz} = \frac{2mL^2}{3}}$ **(0,5 ponto)**

Produto de inércia:

Barra AB: coordenadas do centro de massa : (0; L/2; b)

$$J_{ABzy} = 0 + mb\frac{L}{2} = \frac{mbL}{2}$$

Barra BC: coordenadas do centro de massa : (L/2; 0; b)

$$J_{BCzy} = 0 + m \cdot b \cdot 0 = 0$$

Assim: $\boxed{J_{zy} = J_{ABzy} + J_{BCzy} = \frac{mbL}{2}}$ **(1,0 ponto)**

b)

Barra AB: distância do centro de massa até *z*': $\sqrt{a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}$

$$J_{ABz'} = \frac{mL^2}{12} + m\left[a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right] = m\left(\frac{L^2}{3} + a^2\right)$$

Barra BO: distância do centro de massa até *z*': (*a* – *L*/2)

$$J_{BCz'} = \frac{mL^2}{12} + m\left(a - \frac{L}{2}\right)^2 = m\left(\frac{L^2}{3} + a^2 - aL\right)$$

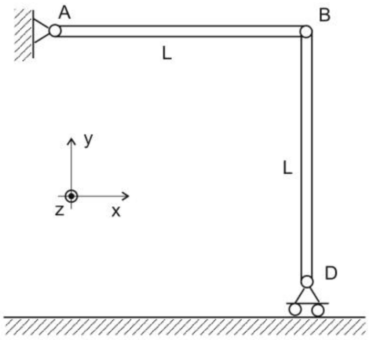
Assim: $\boxed{J_{z'} = J_{ABz'} + J_{BCz'} = m\left(\frac{2L^2}{3} + 2a^2 - aL\right)}$ **(1,0 ponto)**

Questão 2 (3,5 pontos): Duas barras uniformes, cada uma de massa *m* e comprimento *L*, estão articuladas em *B* como mostra a figura. Este sistema está num plano vertical, o ponto *D* da barra *BD* pode escorregar sem atrito no plano horizontal, e o ponto *A* da barra *AB* está preso por uma articulação externa. Desloca-se levemente o ponto *D* para a esquerda, soltando-o em seguida, fazendo com que o sistema entre em movimento. Para o instante em que o ponto *D* estiver exatamente abaixo de *A*, pedem-se, em função dos dados:

d) construa os diagramas de corpo livre das barras *AB* e *BD*;

e) obtenha a relação entre os vetores rotação $\vec{\omega}_{AB}$ e $\vec{\omega}_{BD}$;

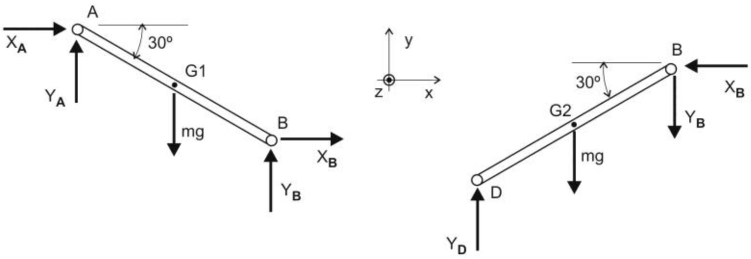
f) obtenha a expressão da velocidade $\vec{v}_D$ do ponto *D*.



Solução:

a) DCL:

(1,0 ponto)



b) Barra *AB*:

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (B - A) = \omega_{AB}\vec{k} \wedge L(\cos 30°\,\vec{\imath} - \sin 30°\,\vec{\jmath}) = \omega_{AB} L(\cos 30°\,\vec{\jmath} + \sin 30°\,\vec{\imath})$

Barra *BD*:

$\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{BD} \wedge (B - D) = v_D\vec{\imath} + \omega_{BD}\vec{k} \wedge L(\cos 30°\,\vec{\imath} + \sin 30°\,\vec{\jmath}) = v_D\vec{\imath} + \omega_{BD} L(\cos 30°\,\vec{\jmath} - \sin 30°\,\vec{\imath})$

Portanto:

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_{AB}L}{2} = v_D - \dfrac{\omega_{BD}L}{2} & (1) \\ \omega_{AB} L\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \omega_{BD} L\dfrac{\sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$$

De (2): $\boxed{\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_{BD} = \vec{\omega} = \omega\vec{k}}$ **(1,0 ponto)**

c) Energia cinética:

$T = \frac{1}{2}mv_{G1}^2 + \frac{1}{2}J_{G1}\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}mv_{G2}^2 + \frac{1}{2}J_{G2}\omega_{BD}^2$

De (1): $v_D = \omega L \Rightarrow \omega = \frac{v_D}{L}$; vem:

$\vec{v}_{G1} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (G1 - A) = \frac{v_D}{L}\vec{k} \wedge \frac{L}{2}(\cos 30°\,\vec{\imath} - \sin 30°\,\vec{\jmath}) \Rightarrow v_{G1}^2 = \frac{v_D^2}{4}$

$\vec{v}_{G2} = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{BD} \wedge (G2 - D) = v_D\vec{\imath} + \frac{v_D}{L}\vec{k} \wedge \frac{L}{2}(\cos 30°\,\vec{\imath} + \sin 30°\,\vec{\jmath}) \Rightarrow v_{G2}^2 = \frac{3v_D^2}{4}$

Assim:

$$T = \frac{1}{2}m\frac{v_D^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\frac{v_D^2}{L^2} + \frac{1}{2}m\frac{3v_D^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\frac{v_D^2}{L^2} = \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{mv_D^2}{12} = \frac{7mv_D^2}{12}$$ **(0,5 ponto)**

As forças internas do sistema (em B) não realizam trabalho (ação e reação, sem atrito), e o trabalho das reações externas em *A* e *D* é nulo (sem atrito, não há deslocamento na direção da respectiva força).

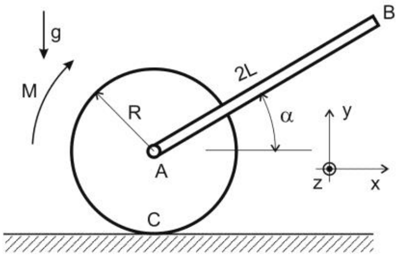
Trabalho da força peso:

$$\tau = mg\Delta y_{G1} + mg\Delta y_{G2} = mg\left(\frac{L}{2}\sin 30°\right) + mg\frac{L}{2}(1 - \sin 30°) = \frac{mgL}{2}$$ **(0,5 ponto)**

Portanto, pelo TEC, partindo do repouso: $\Delta T = \tau \Rightarrow \frac{7mv_D^2}{12} = \frac{mgL}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_D = -\sqrt{\frac{6gL}{7}}\,\vec{\imath}}$ **(0,5 ponto)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 3 (4,0 pontos): O disco homogêneo de centro A, massa $2m$ e raio R está ligado por uma articulação ideal (em A) à barra homogênea AB, que possui massa m e comprimento $2L$. O disco rola sem escorregar sobre o plano horizontal, e deseja-se aplicar a este disco um binário $\vec{M}$, como indicado na figura, de modo que o ângulo α, entre a direção da barra e a horizontal, permaneça constante. Pedem-se, em função dos dados do problema (m, R, L, α e g):



a) construa os diagramas de corpo livre da barra e do disco;

b) considerando a barra, determine a aceleração do ponto A necessária para que o ângulo α permaneça constante;

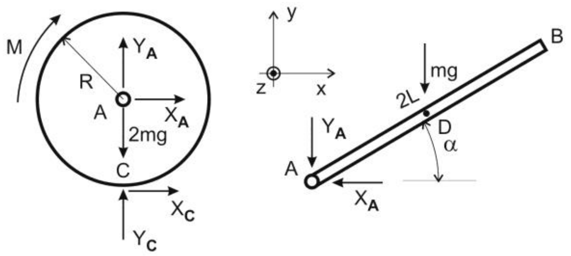
c) obtenha as componentes das forças atuantes no ponto A da barra AB;

d) determine a aceleração angular do disco;

e) obtenha as forças reativas no ponto C do disco em contato com o solo;

f) determine o binário $\vec{M}$ a ser aplicado ao disco.

Solução:



a) **(1 ponto no total sendo 0,5 pontos cada diagrama completamente correto)**

b) **(1 ponto (resposta correta)/0,5 pontos (somente equação do TQMA)**

Barra AB, TQMA para o polo A (em movimento de translação):

$$m(D-A)\wedge\vec{a}_A + J_{A_z}\dot{\omega}\vec{k} = \vec{M}_A^{ext}$$

$$mL(\cos\alpha\,\vec{\imath}+\sin\alpha\,\vec{\jmath})\wedge a_A\vec{\imath} + \vec{0} = -mg\vec{\jmath}\wedge(D-A)$$

$$mL(\cos\alpha\,\vec{\imath}+\sin\alpha\,\vec{\jmath})\wedge a_A\vec{\imath} = -mg\vec{\jmath}\wedge L(\cos\alpha\,\vec{\imath}+\sin\alpha\,\vec{\jmath})$$

$$-mLa_A\sin\alpha\,\vec{k} = -mg\vec{\jmath}L\cos\alpha\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \frac{g}{\tan\alpha}\vec{\imath} = g\,cotg\,\alpha\,\vec{\imath}$$

c) **(0,5 pontos 2 respostas /0,3 pontos 1 resposta)** TR para a barra AB:

$$m\vec{a}_G = m\vec{a}_A = mg\,\mathrm{cotg}\,\alpha\,\vec{\imath} = -X_A\vec{\imath} + (-Y_A - mg)\vec{\jmath} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_A = -mg\,cotg\,\alpha \\ Y_A = -mg \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{X_A} = mg\,cotg\,\alpha\,\vec{\imath} \quad e \quad \overrightarrow{Y_A} = -mg\vec{\jmath}$$

d) **(0,5 pontos)** Temos, para o disco rolando sem escorregar:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega}\wedge(A-C) = \vec{0} + \omega\vec{k}\wedge(R\vec{\jmath}) = -\omega R\vec{\imath}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = -\dot{\omega}R\vec{\imath} \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{g}{R\tan\alpha} = -\frac{g}{R}cotg\,\alpha \qquad \text{e} \qquad \vec{\omega} = -\frac{g}{R}cotg\,\alpha\,\vec{k}$$

e) **(0,5 pontos 2 respostas /0,3 pontos 1 resposta)** TR para o disco:

$$2m\vec{a}_G = 2m\vec{a}_A = 2mg\,cotg\,\alpha\vec{\imath} = (X_A + X_C)\vec{\imath} + (Y_C + Y_A - 2mg)\vec{\jmath} \Rightarrow$$

$$2mg\,cotg\,\alpha\vec{\imath} = (-mg\,cotg\,\alpha + X_C)\vec{\imath} + (Y_C - mg - 2mg)\vec{\jmath} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{array}{c} \vec{X}_C = 3mg\,cotg\,\alpha\vec{\imath} \\ \vec{Y}_C = 3mg\vec{\jmath} \end{array}} \end{cases}$$

f) **(0,5 pontos)** TQMA para o disco, polo A:

$$J_A\dot{\omega} = M - X_C R \Rightarrow M = J_A\dot{\omega} + X_C R = \frac{2mR^2}{2}\frac{g}{R}cotg\,\alpha + 3mg\,cotg\,\alpha\,R = 4mgR\,cotg\,\alpha$$

$$\therefore\ \vec{M} = -4mgR\,cotg\,\alpha\ \vec{k}$$