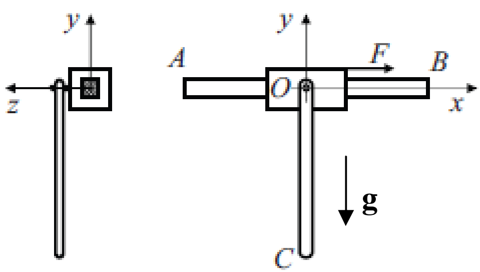
PME2100
Gabarito da P3; 30/11/2010 (Nota máxima: 10; pontuação: 11)

Questão 1 (4,0 pontos)
A figura mostra um anel (trecho de uma barra de seção quadrada vazada), **de massa desprezível**, que desliza sem atrito sobre a guia horizontal *AB*. A barra homogênea *OC* de comprimento *L* e massa m é articulada sem atrito ao anel por meio de um pino horizontal em *O*. É aplicada ao anel uma força *F* na direção horizontal. Sabendo que o sistema parte do repouso com a barra pendente na direção vertical, pede-se, **considerando apenas o instante inicial**:

a) Os diagramas de corpo livre do anel e da barra;
b); A velocidade angular ω da barra
c), A aceleração angular $\dot{\omega}$ da barra;
d) As reações no ponto *O* da barra



Solução

(a) (1 pt.) O diagrama de corpo livre do anel e da barra estão mostrados na figura 1. Aproveitamos a oportunidade para informar o sentido po-sitivo para as acelerações $\vec{a}$ e $\dot{\vec{\omega}}$.

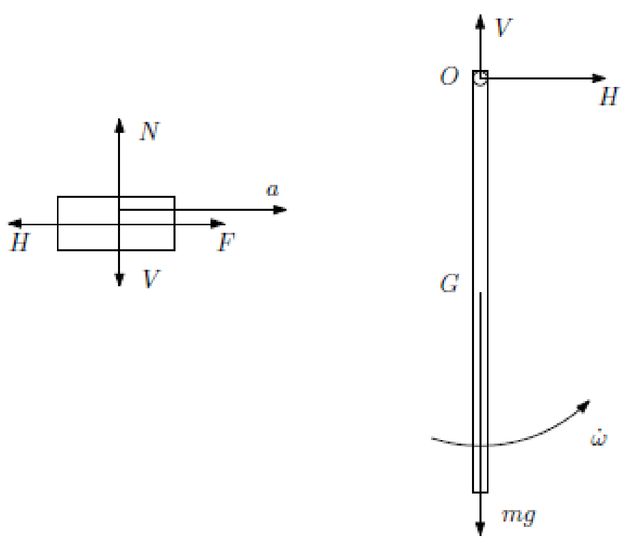


Figura 1: Diagramas de corpo livre e orientação das acelerações

Critério de correção: 0,5 ponto para cada diagrama correto. Se não desenhou a reação da barra N, o diagrama é considerado errado.

(b) (0,5 pt.) Como o sistema parte do repouso, no instante inicial temos

$$\vec{\omega} = 0.$$

Critério de correção: 0,5 ponto para a resposta absolutamente certa.

(c) (1,5 pt.) Como a massa do anel é zero, temos imediatamente que $F = H$.

Como no instante inicial $\omega = 0$, temos que $\vec{a}_G = (a + \frac{\dot{\omega}L}{2})\vec{i}$. Aplicando o TMB na barra, vemos que

$$F = m\left(a + \frac{\dot{\omega}L}{2}\right).$$

Aplicando o TMA, ou o Princípio de d'Alembert, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{M}_O = \left(\frac{mL^2\dot{\omega}}{3} + \frac{mLa}{2}\right)\vec{k} \quad \text{(TMA)} \\ 0 &= \vec{M}_O = \left(\frac{mL}{2}\left(a + \frac{\dot{\omega}L}{2}\right) + \frac{mL^2\dot{\omega}}{12}\right)\vec{k} \quad \text{(P. d'Alembert)} \end{aligned}$$

A conclusão é

$$\dot{\vec{\omega}} = -\frac{6F}{mL}\vec{k}.$$

Outra forma de resolução: Aplicar o TMA, ou o Princípio de d'Alembert, usando G como polo. A aceleração $\dot{\omega}$ sai diretamente.

Critério de correção: 1,5 para a resposta de $\dot{\vec{\omega}}$ certa. 0,5 ponto para a relação cinemática da aceleração do baricentro correta. 1 ponto para a aplicação correta do TMA e TMB.

(d) (1 pt.) As reações no ponto O da barra são obtidas de imediato:

$$V = mg, \quad H = F.$$

Justificativa: TMB no anel e na barra.

Critério de correção: 0,5 ponto para cada componente correta.

Questão 2 (3,0 pontos)
A figura mostra um disco homogêneo de massa m e raio *R* que parte do repouso e rola sem escorregar sob a ação de um binário de momento *M* constante. O disco está conectado ao plano vertical por uma mola de constante elástica k. Considerando que no instante inicial $\theta(0) = 0$ e a mola não está deformada, pede-se:

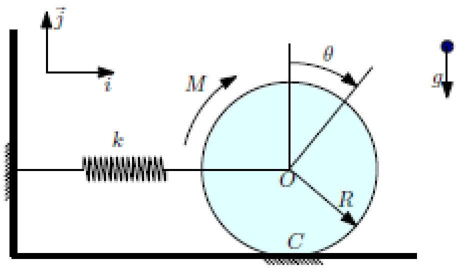
a) O diagrama de corpo livre do disco;

b) A energia cinética do disco em função da sua velocidade angular $\dot{\theta}$;

c) O trabalho realizado pelos esforços aplicados ao disco em função da posição angular θ;

d) A aceleração angular $\ddot{\theta}$ do disco, em função de θ.

Dado: Disco: Jo = $mR^2/2$



Solução

(a) (0,5 pt.) O diagrama de corpo livre do disco está mostrado na figura 2.

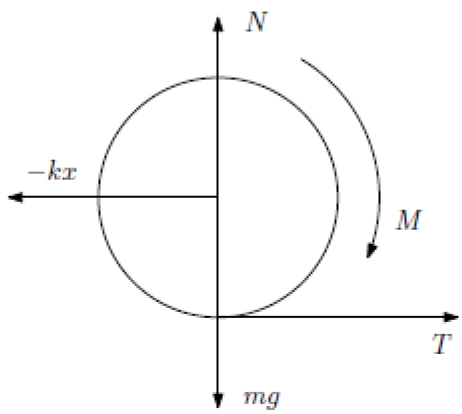


Figura 2: Diagrama de corpo livre do disco

Critério de correção: 0,5 ponto para o diagrama absolutamente correto.

(b) (0,5 pt.) Como o módulo da velocidade do baricentro do disco é $\dot{\theta}R$, temos que a energia cinética do disco é

$$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}R)^2 + \frac{mR^2}{4}\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2.$$

Critério de correção: 0,5 ponto para o trabalho da força da mola e 0,5 ponto para o do binário.

(c) (1 pt.) O trabalho dos esforços aplicados no disco é dado por

$$\tau = \underbrace{-\frac{1}{2}k(\theta R)^2}_{\text{mola}} + \underbrace{M\theta}_{\text{binário}} .$$

Critério de correção: 0,5 ponto para cada componente correta.

(d) (1 pt.) Aplicando o TEC, após igualarmos a energia cinética obtida no item b com o trabalho do item c, e derivarmos a expressão com relação ao tempo, obtemos

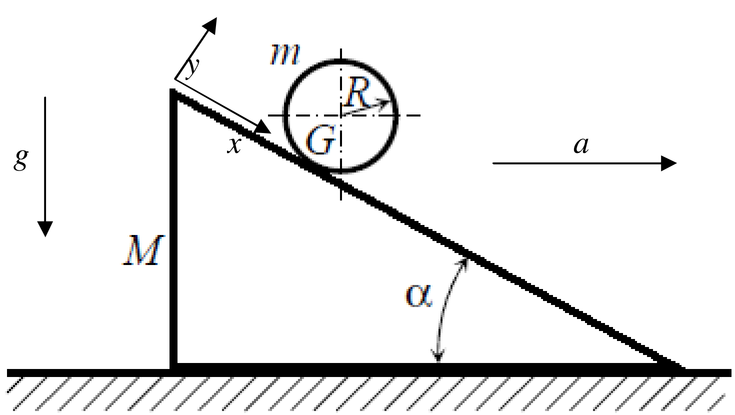
$$\ddot{\theta} = \frac{2}{3}\left(\frac{M - kR^2\theta}{mR^2}\right).$$

Critério de correção: 0,5 ponto para a aplicação correta do TEC. 0,5 ponto para a obtenção correta da aceleração.

Questão 3 (4,0 pontos)

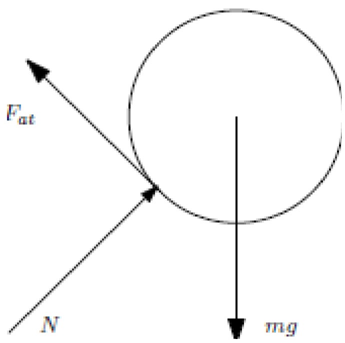
Um disco homogêneo, de massa *m* e raio *R*, rola sem escorregar sobre o prisma, como mostrado na figura. O prisma move-se horizontalmente para a direita com aceleração *a*. Adotando o prisma como referencial móvel, e o sistema de coordenadas de eixos *(x,y,z)* solidário a ele, pede-se:

a) O diagrama de corpo livre do disco;
b) A velocidade angular relativa ω_r, de arrastamento ω_a e absoluta ω do disco, em função de v_G e v_C;
c) A velocidade relativa e a aceleração relativa de G, em função de ω e $\dot{\omega}$;
d) A expressão da aceleração absoluta do centro de massa $\vec{a}_G$ do disco em função de *a*, ω e $\dot{\omega}$;
e) Determine $\dot{\omega}$ em função de *a*.



Solução

a) Diagrama de corpo livre do disco (1,0)



b) $\vec{v}_G = \vec{v}_{G,r} + \vec{v}_{G,a}$; $\vec{v}_{G,a} = \vec{v}_{C\ prisma}$;

$$\omega_r = \frac{v_{G,r}}{R};\ \omega_a = 0;\ \omega = \omega_r \ \ (0,5)$$

c) $\vec{v}_{G,r} = \omega R\,\vec{i}$; $\vec{a}_{G,r} = \dot{\omega} R\,\vec{i}$ (0,5)

d) $\vec{a}_G = \vec{a}_{G,r} + \vec{a}_{G,a} + \vec{a}_{G,Cor} = \dot{\omega} R\vec{i} + a\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\right) \rightarrow$

$$\vec{a}_G = \left(\dot{\omega} R + a\cos\alpha\right)\vec{i} + a\sin\alpha\,\vec{j} \ \ (1,0)$$

e) TMA, polo C:

$$-mRa\cos\alpha - \dot{\omega} J_{z,C} = -m\,g\sin\alpha\,R \ \ (0,5)$$

$$\therefore \dot{\omega} = \frac{m\,g\sin\alpha\,R - mRa\cos\alpha}{J_{z,C}};$$

Como $J_{z,C} = \dfrac{3mR^2}{2} \rightarrow \dot{\omega} = \dfrac{2\left(g\sin\alpha - a\cos\alpha\right)}{3R}$ (0,5)