Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Terceira prova de Mec-A.

1. (3,0 pts) A figura 1 mostra um trator de massa $2m$ que puxa uma carga de massa m apoiada sobre um plano inclinado. O coeficiente de atrito no contato entre a carga e o plano inclinado é μ. As 4 rodas do trator têm momentos de inércia desprezíveis e rolam sem escorregar. A cada roda é aplicado pelo motor do trator um momento $\vec{M} = -M\vec{k}$, $M > 0$, constante. Sabendo que o sistema parte do repouso pede-se calcular, após a carga ter percorrido uma distância ℓ sobre o plano inclinado:

   a) o trabalho realizado pela força de atrito atuante na carga;

   b) o trabalho realizado pelo peso da carga;

   c) o trabalho realizado pelas forças de atrito atuantes nas rodas do trator;

   d) o trabalho realizado pelos momentos aplicados nas 4 rodas do trator (considere que as 4 rodas têm o mesmo raio R);

   e) a velocidade do trator. Obs.: considere que a corda usada para puxar a carga é inextensível e está inicialmente esticada.

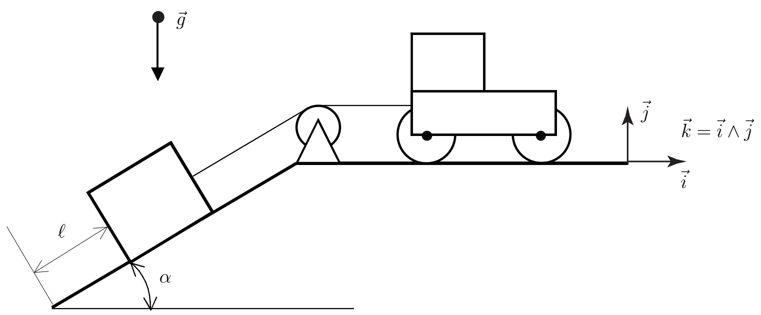


Figura 1: Trator puxando carga.

Solução

Os diagramas de corpo livre de uma roda e da carga estão mostrados na figura 2.

a) (0,5 ponto) $\tau_{fat} = -\mu m g \ell \cos\alpha$.

b) (0,5 ponto) $\tau_{mg} = -mg\ell \text{sen}\alpha$.

c) (0,5 ponto) $\tau_{fat_{Roda}} = 0$.

d) (0,5 ponto) $\tau = 4M\theta = 4M\frac{\ell}{R}$.

e) (1,0 ponto) Pelo Teorema da Energia Cinética, temos imediatamente:

$$\frac{1}{2}(2m+m)v^2 = 4M\frac{\ell}{R} - mg\ell\text{sen}\alpha - \mu mg\ell\cos\alpha,$$

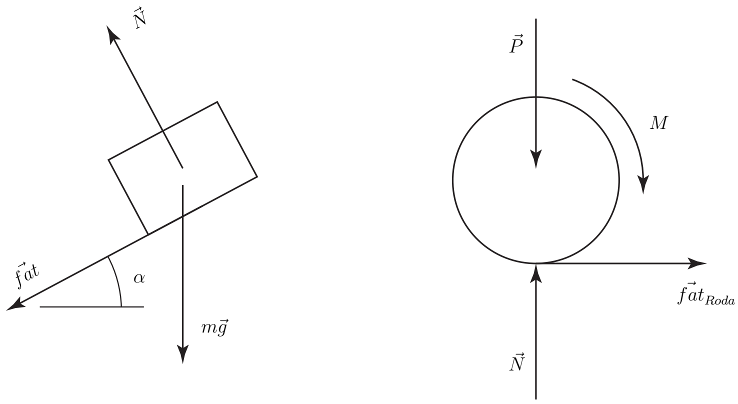


Figura 2: Diagramas de corpo livre de uma roda e da carga.

de onde tiramos a resposta pedida:

$$\boxed{v^2 = \frac{8\ell M}{3Rm} - \frac{2g\ell}{3}(\text{sen}\alpha + \mu\cos\alpha).}$$

2. (3,5 pts) Um bloco homogêneo de massa M está apoiado sobre uma plataforma A, plana, conforme a figura 3. O bloco tem altura h e largura b. A plataforma se move com aceleração $\vec{a}$ constante. Na aresta superior do bloco há um fio ideal que passa pela polia B de massa desprezível e está ligado ao bloco C, de peso $m\vec{g}$. O coeficiente de atrito entre o bloco e a plataforma é μ.

   Solicita-se:

   a) Fazer os diagramas de corpo livre dos blocos.
   b) Escrever as equações do Teorema do Movimento do Baricentro para cada um dos blocos.
   c) Determinar o valor máximo da aceleração da plataforma para:
      i) não haver escorregamento do bloco em relação à plataforma;
      ii) não haver o tombamento do bloco.

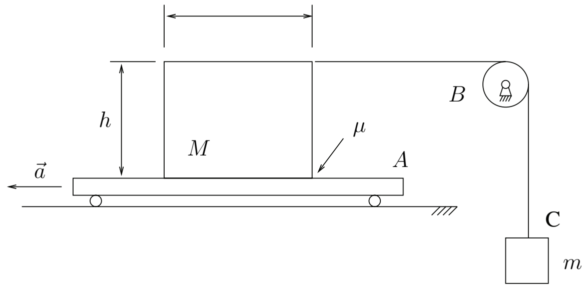


Figura 3: Bloco sobre plataforma.

Solução da questão do tombamento na última página.

3. (3,5 pts) Uma roda de bicicleta modelada por um anel de massa m e raio R está sob a ação de uma força $\vec{F}$ e de um binário de momento $\vec{T}$, conforme ilustrado na figura 4, e rola sem escorregar sobre a plataforma de massa M. O sistema de coordenadas $(B, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é solidário à plataforma. Não há atrito entre a plataforma e o piso. É dado o momento de inércia da roda de bicicleta (anel) em relação ao seu eixo: $J_G = mR^2$.

   Solicita-se:

   a) Fazer os diagramas de corpo livre do anel e da plataforma.
   b) Determinar a relação cinemática entre as acelerações $\vec{a}_G$ do ponto G, $\vec{a}_B$ do ponto B e a aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ do anel.
   c) Determinar aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ do anel em função dos dados do problema.
   d) Determinar as forças no ponto de contato C em função dos dados do problema.
   e) Determinar a relação entre F e T para que a força horizontal de contato no ponto C seja nula.

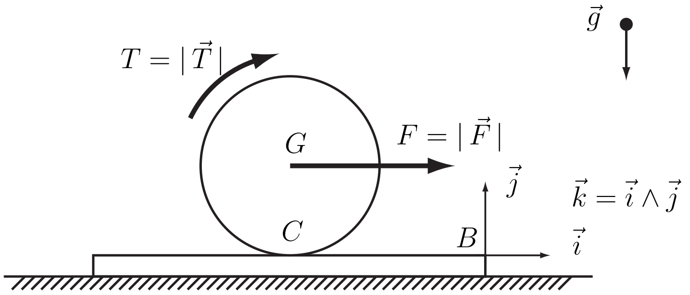


Figura 4: Roda de bicicleta na plataforma.

<u>Solução</u>

a) (0,5 ponto) Na figura 5 são mostrados os diagramas de corpo livre do anel e da plataforma. Apesar de não fazerem parte dos diagramas propriamente ditos, são mostradas também, por conveniência, os sentidos positivos para as acelerações a_B, a_G e $\dot{\omega}$.

b) (0,5 ponto) Fazendo uma composição cinemática, obtemos a relação entre acelerações

$$\boxed{a_G = a_B + \dot{\omega} R}. \tag{1}$$

c) Do Teorema do Baricentro aplicado tanto à plataforma como ao aro, obtemos as equações

$$\begin{aligned} F - H &= m a_G, \\ H &= M a_B, \end{aligned}$$

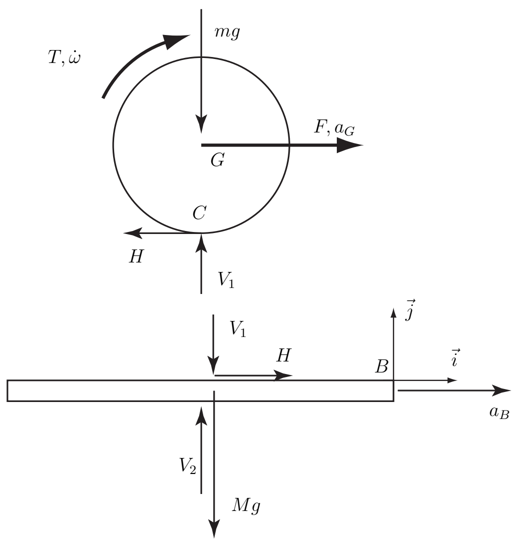


Figura 5: Diagramas de corpo livre.

que fornecem

$$F = Ma_B + ma_G. \tag{2}$$

(0,5 ponto) pelas fórmulas acima.

Do Teorema do Momento Angular, ou de seu corolário, temos:

$$T + FR = mRa_G + mR^2\dot{\omega}, (0,5 ponto) \tag{3}$$

em que já foi feita a substituição do momento de inércia I do aro em relação ao baricentro G; isto é $I = mR^2$.

Observação 0.1. Uma fórmula equivalente para (3), obtida pelo “TMA"é

$$-I\dot{\omega} = T + HR.$$

Substituindo (1) no par de equações (2) e (3), obtemos o sistema linear de equações

$$\begin{cases} (M+m)a_B + \ mR\dot{\omega} \ = \quad F \\ \quad mRa_B \quad + 2mR^2\dot{\omega} = T + FR \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, e obedecendo a convenção de sinais que usamos no diagrama de corpo livre, chegamos à sua solução e do item pedido:

$$\vec{a_B} = \frac{FR - T}{R(2M+m)}\vec{i}, \tag{4}$$

$$\boxed{\dot{\vec{\omega}} = -\frac{FMR + (M+m)T}{mR^2(2M+m)}\vec{k}}.(0,5 ponto) \tag{5}$$

Outra forma de escrever o mesmo resultado acima é

$$\boxed{\dot{\vec{\omega}} = -\frac{FMR + T(2M+m) - TM}{mR^2(2M+m)}\vec{k}}.(0,5 ponto) \tag{6}$$

d) (0,5 ponto) As forças no ponto de contato pedidas são:

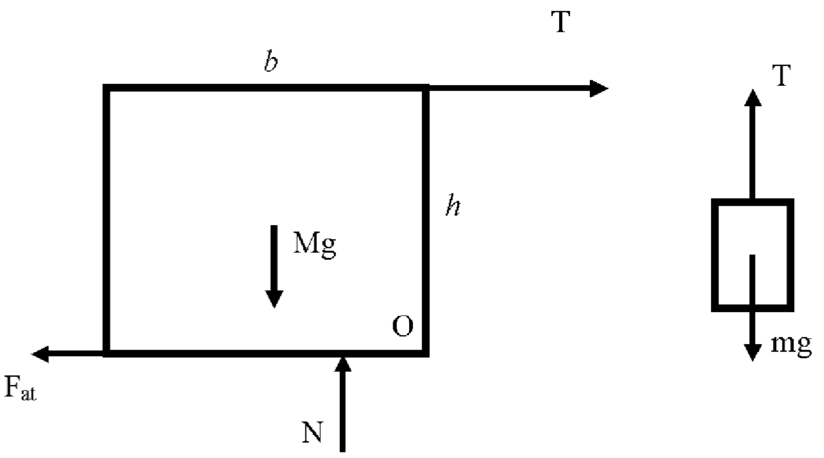
$$\boxed{\vec{H} = M\frac{FR - T}{R(2M + m)}\vec{i}, \quad \vec{V}_1 = mg\vec{j}}. \tag{7}$$

e) (0,5 ponto) Para que H seja nula, basta que

$$\boxed{F = \frac{T}{R}}.$$

Questão 2 (3.5 pontos)

a) Diagramas de corpo livre (0.5)



b) TMB

Bloco de massa M: $\begin{cases} Ma = F_{at} - T & (0.5) \\ N = Mg & (0.5) \end{cases}$ (1.0)

Bloco C: $ma = T - mg$ (0.5)

c) Aceleração máxima para não ocorrer escorregamento: (0.5)

$$Ma_{\max} = F_{at\max} - T$$

$$T = m(a+g);\ F_{at\max} = \mu Mg\,; M\,a_{\max} = \mu Mg - m(a_{\max} + g) \Rightarrow a_{\max} = \frac{g(\mu M - m)}{M + m}$$

Aceleração máxima para não ocorrer tombamento; aplicando o *TMA* com pólo em O e $\dot{\omega} = 0$ resulta

$$\underbrace{(G - O) \wedge M\vec{a}_{\max}}_{\frac{Mha_{\max}}{2}\vec{k}} = (Mg\frac{b}{2} - Th)\vec{k} \Rightarrow a_{\max} = \frac{g(Mb - 2mh)}{(Mh + 2mh)} \qquad (1.0)$$