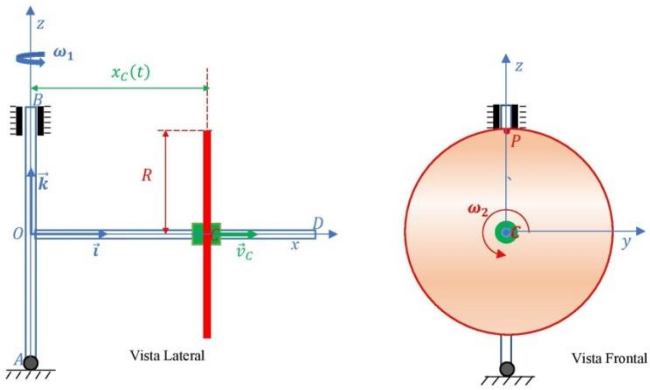
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Prova 2 – 08 de dezembro de 2020
Duração da Prova: 120 minutos (Início: 10:00 – Término: 12:30)
GABARITO

Questão 1 (3,0 pontos): O mecanismo ilustrado na figura abaixo é constituído por 3 componentes: 1) um suporte *ABOD* (desenhado em azul) vinculado à articulação *A* e ao mancal radial *B*, que gira com velocidade angular constante ω_1 em torno do eixo vertical; 2) uma luva *C* (desenhada em verde), que desliza ao longo da haste *OD* do suporte *ABOD* com velocidade constante v_C, relativa à haste; 3) um disco de raio *R*, solidário à luva *C*, que gira em torno da haste *OD* com velocidade angular constante ω_2. O sistema de referência móvel *Oxyz* é ligado ao suporte *ABOD* e, no instante mostrado na figura, o ponto *P* da periferia do disco encontra-se na posição $(x_C, 0, R)$.



Pede-se, então:

(a) a velocidade $\vec{v}_{Cabs}$ absoluta do ponto C;

(b) a aceleração $\vec{a}_{Cabs}$ absoluta do ponto C;

(c) o vetor rotação absoluta $\vec{\omega}$ do disco;

(d) o vetor aceleração rotacional $\vec{\alpha}$ do disco;

(e) a velocidade absoluta $\vec{v}_{Pabs}$ do ponto P;

(f) a aceleração absoluta $\vec{a}_{Pabs}$ do ponto P;

Resolução:

a) **[0,5 ponto]** Lei de composição de velocidades:

$$\vec{v}_{Cabs} = \vec{v}_{Crel} + \vec{v}_{Carr} = v_C\vec{\imath} + \omega_1\,\vec{k}\wedge(x_C\vec{\imath}) = v_C\vec{\imath} + \omega_1\,x_C\vec{\jmath}$$

b) **[0,5 ponto]** Lei de composição de acelerações:

$$\vec{a}_{Cabs} = \vec{a}_{Crel} + \vec{a}_{Carr} + \vec{a}_{Ccomp} = \vec{0} + \omega_1\,\vec{k}\wedge\left[\omega_1\,\vec{k}\wedge(x_C\vec{\imath})\right] + 2\omega_1\,\vec{k}\wedge v_C\vec{\imath} =$$
$$= -\omega_1^2\,x_C\vec{\imath} + 2\omega_1\,v_C\vec{\jmath}$$

c) **[0,5 ponto]** Lei de composição de vetores de rotação: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} = \omega_2\,\vec{\imath} + \omega_1\,\vec{k}$

d) **[0,5 ponto]** Lei de composição de acelerações rotacionais:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\alpha}_{comp} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1\,\vec{k}\wedge\omega_2\,\vec{\imath} = \omega_1\omega_2\,\vec{\jmath}$$

e) **[0,5 ponto]** disco: $\vec{v}_P = \vec{v}_{Cabs} + \omega_2\,\vec{\imath}\wedge(P-C) = v_C\vec{\imath} + (\omega_1\,x_C - \omega_2 R)\,\vec{\jmath}$

f) **[0,5 ponto]** disco: $\vec{a}_P = \vec{a}_{Cabs} + \vec{\alpha}\wedge(P-C)\vec{k} + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(P-C)] =$

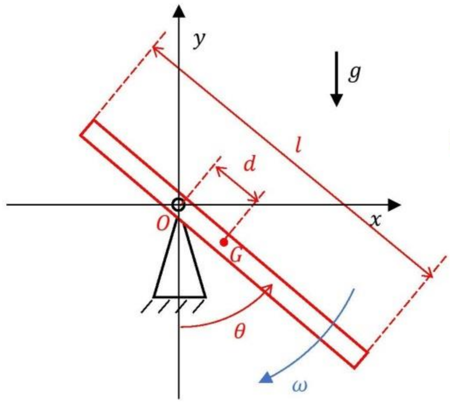
$$= -\omega_1^2\,x_C\vec{\imath} + 2\omega_1\,v_C\vec{\jmath} + \omega_1\omega_2\,\vec{\jmath}\wedge R\vec{k} + \left(\omega_2\,\vec{\imath} + \omega_1\,\vec{k}\right)\wedge\left[\left(\omega_2\,\vec{\imath} + \omega_1\,\vec{k}\right)\wedge R\vec{k}\right] =$$
$$= (2\omega_1\omega_2 R - \omega_1^2\,x_C)\,\vec{\imath} + 2\omega_1\,v_C\vec{\jmath} - \omega_2^2\,R\vec{k}$$

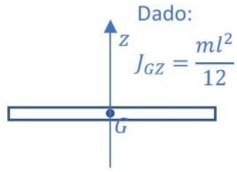
<u>Questão 2 (3,0 pontos)</u>: Uma barra delgada e homogênea, de comprimento ℓ e massa m, é articulada em O a uma distância d do seu centro de massa, estando restrita a mover-se no plano Oxy, conforme ilustrado na figura.

(a) Determine o momento de inércia J_{Oz} da barra.

(b) Sabendo que a barra parte da posição angular $\theta_0 = \pi/2$ com velocidade angular inicial ω_0 no sentido horário, determine o menor valor de ω_0, em módulo, para que a barra não mude o sentido de rotação.

Nota: Adote g = 10m/s^2





Resolução:

a) **[1,0 ponto]** Translação de eixos:

$$J_{Oz} = J_{Gz} + md^2 = \frac{ml^2}{12} + md^2 = m\left(\frac{l^2+12d^2}{12}\right)$$

b) **[2,0 pontos]** Trabalho – força peso: $\tau = mgd(\cos\theta - \cos\theta_0)$

Energia cinética: $E_C = \frac{1}{2}J_{Gz}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}J_{Oz}\omega^2$

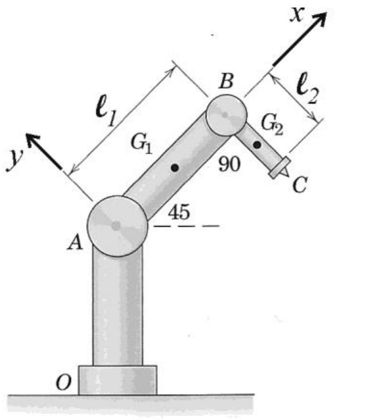
Teorema da Energia Cinética: $\Delta E_C = \tau \Rightarrow \frac{1}{2}J_{Oz}(\omega^2 - \omega_0^2) = mgd(\cos\theta - \cos\theta_0) \Rightarrow$

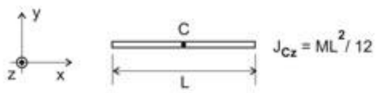
$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2mgd(\cos\theta - \cos\theta_0)}{J_{O\omega}}$$

Condição para que a barra não mude o sentido de rotação: $\omega = 0$ em $\theta = \pi$; assim:

$$0 = \omega_0^2 + \frac{2mgd(\cos\pi - \cos\theta_0)}{J_{Oz}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2mgd}{J_{Oz}}} = \sqrt{\frac{240d}{l^2+12d^2}}$$

Questão dissertativa (4,0 pontos): A figura abaixo representa um dispositivo robótico movendo-se num plano vertical, com aceleração da gravidade g. Na extremidade A da coluna fixa OA há um pequeno motor elétrico que aplica um momento (anti-horário) M_A na extremidade A do braço AB, fazendo este braço girar em torno de A com velocidade angular ω_1 e aceleração angular $\dot{\omega}_1$, dados. Na extremidade B do braço AB há outro pequeno motor, que aplica o momento M_B (anti-horário) no braço BC, fazendo-o girar com velocidade angular ω_2 e aceleração angular $\dot{\omega}_2$. A massa do braço AB é m_1, a do braço BC é m_2, e ambos podem ser considerados como hastes delgadas homogêneas.





Para a posição mostrada na figura, e usando o sistema de eixos indicado, pede-se:

(a) desenhar os diagramas de corpo livre dos braços AB e BC;

(b) escrever as equações do Teorema da Resultante (TR) e do Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA) para o braço BC;

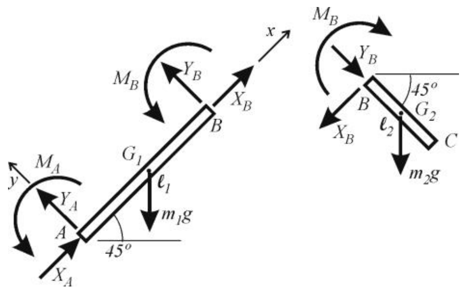
Supondo que o motor em B trave a conexão dos braços AB e BC na posição relativa mostrada, pede-se:

(c) obter as expressões de ω_2, $\dot{\omega}_2$, $\vec{a}_{G_1}$ e $\vec{a}_{G_2}$ em função de ω_1, $\dot{\omega}_1$, das massas e das dimensões dadas na figura;

(d) determinar o momento exercido pelo braço AB sobre o braço BC.

Resolução:

(a) **[1,0 ponto]** diagramas:



(b) **[1,0 ponto]** **<u>Braço BC:</u>**

<u>TR:</u> $m_2\vec{a}_{G_2} = m_2\left(a_{G_2x}\vec{\imath} + a_{G_2y}\vec{\jmath}\right) = \left(-X_B - m_2 g\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{\imath} + \left(-Y_B - m_2 g\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{\jmath} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_2 a_{G_2x} = -X_B - m_2 g\frac{\sqrt{2}}{2} & (1) \\ m_2 a_{G_2y} = -Y_B - m_2 g\frac{\sqrt{2}}{2} & (2) \end{cases}$$

TQMA: $\vec{H}_{G_2} = J_{G_2}\omega_2\vec{k} = \frac{m_2 l_2^2}{12}\omega_2\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_{G_2} = \frac{m_2 l_2^2}{12}\dot{\omega}_2\vec{k} = \vec{M}_{G_2} = \left(X_B\frac{l_2}{2} - M_B\right)\vec{k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{m_2 l_2^2}{12}\dot{\omega}_2 = X_B\frac{l_2}{2} - M_B \qquad (3)$$

(c) **[1,0 ponto]** Relações cinemáticas:

- articulação B travada: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ (4) e $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}$ (5)

- braço AB: $\vec{a}_{G_1} = a_{G_1x}\vec{\imath} + a_{G_1y}\vec{\jmath} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G_1 - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G_1 - A)] =$

$$= \vec{0} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \frac{l_1}{2}\vec{\imath} + \omega^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \frac{l_1}{2}\vec{\imath}\right] = \frac{l_1}{2}(-\omega^2\vec{\imath} + \dot{\omega}\vec{\jmath}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{G_1} = a_{G_1x}\vec{\imath} + a_{G_1y}\vec{\jmath} = \frac{l_1}{2}(-\omega^2\vec{\imath} + \dot{\omega}\vec{\jmath}) \Rightarrow \begin{cases} a_{G_1x} = -\frac{l_1}{2}\omega^2 & (6) \\ a_{G_1y} = \frac{l_1}{2}\dot{\omega} & (7) \end{cases}$$

e $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)] = l_1(-\omega^2\vec{\imath} + \dot{\omega}\vec{\jmath})$

- braço BC: $\vec{a}_{G_2} = a_{G_2x}\vec{\imath} + a_{G_2y}\vec{\jmath} = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G_2 - B) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G_2 - B)] =$

$$= l_1(-\omega^2\vec{\imath} + \dot{\omega}\vec{\jmath}) + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \left(-\frac{l_2}{2}\vec{\jmath}\right) + \omega^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \left(-\frac{l_2}{2}\vec{\jmath}\right)\right] =$$

$$= \left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2 l_1\right)\vec{\imath} + \left(\dot{\omega}l_1 + \omega^2\frac{l_2}{2}\right)\vec{\jmath} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{G_2} = a_{G_2x}\vec{\imath} + a_{G_2y}\vec{\jmath} = \left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2 l_1\right)\vec{\imath} + \left(\dot{\omega}l_1 + \omega^2\frac{l_2}{2}\right)\vec{\jmath} \Rightarrow \begin{cases} a_{G_2x} = \dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2 l_1 & (8) \\ a_{G_2y} = \dot{\omega}l_1 + \omega^2\frac{l_2}{2} & (9) \end{cases}$$

(d) **[1,0 ponto]**

de (1) e (8): $-X_B - m_2 g\frac{\sqrt{2}}{2} = m_2\left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2 l_1\right) \Rightarrow X_B = -m_2\left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2 l_1 + g\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Substituindo X_B em (3): $\frac{m_2 l_2^2}{12}\dot{\omega} = -m_2\frac{l_2}{2}\left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2 l_1 + g\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - M_B \Rightarrow$

$$\Rightarrow M_B = \frac{m_2 l_2}{2}\left(l_1\omega^2 - \frac{2l_2}{3}\dot{\omega} - g\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$