ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Segunda Prova – 13 de outubro de 2015

Duração da Prova: 110 minutos

- **Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos, como calculadoras, "tablets" e celulares.**
- **Após o início da distribuição do enunciado da prova, é proibido sair da sala antes das 08:30.**
- **A partir do momento em que a prova for encerrada, não é permitido ao aluno escrever mais nada na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.**

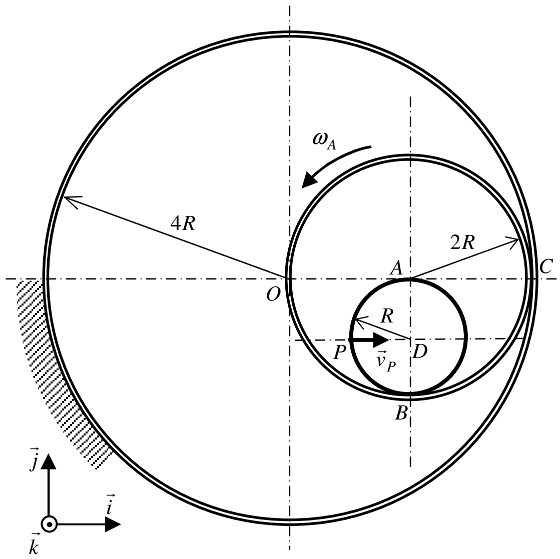
Questão 1 (3,5 pontos) O aro de centro *O*, raio 4*R*, e espessura desprezível, é fixo. O aro de centro *A*, raio 2*R* e espessura desprezível, rola sem escorregar na superfície interna do aro de centro *O* e raio 4*R*, e sua velocidade angular é ω_A , conhecida. O disco, de centro *D* e raio *R*, rola sem escorregar na superfície interna do aro de centro *A* e raio 2*R*. No instante mostrado na figura, sabe-se que a velocidade $\vec{v}_P$ do ponto *P* é na direção de $\vec{i}$, mas o módulo é desconhecido. Nesse instante, determine:

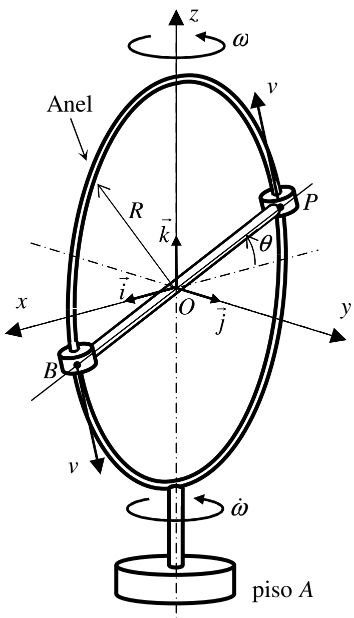
a) o centro instantâneo de rotação CIR_A do aro de centro *A* e raio 2*R* (graficamente) e a velocidade $\vec{v}_B$ do ponto *B* desse mesmo aro;

b) o centro instantâneo de rotação CIR_D do disco de centro *D* e raio *R* (graficamente);

c) o vetor rotação $\vec{\omega}_D$ do disco e a velocidade $\vec{v}_P$ do ponto *P*.

Use os versores $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ para expressar as grandezas cinemáticas.





Questão 2 (3,5 pontos) Um anel esbelto de raio *R* , contido no plano *Oxz*, gira em um eixo vertical com vetor rotação $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ e vetor aceleração angular $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k}$. A barra diametral *BP* percorre o anel de forma que a velocidade relativa $\vec{v}$ do ponto *P* é conhecida e de módulo constante $|\vec{v}| = v$. Considerando o instante em que o ponto *P* está na posição θ do anel, determine em função de θ :

a) o vetor $(P - O)$, o vetor rotação $\dot{\vec{\theta}}$ da barra *BP* em torno de *Oy* e o vetor rotação absoluta $\vec{\Omega}$ da barra *BP*;

b) a velocidade relativa $\vec{v}_{P,r}$, a velocidade de arrastamento $\vec{v}_{P,a}$ e a velocidade absoluta $\vec{v}_P$ do ponto *P* da barra *BP*;

c) a aceleração relativa $\vec{a}_{P,r}$, a aceleração de arrastamento $\vec{a}_{P,a}$, a aceleração de complementar (*Coriolis*) $\vec{a}_{P,c}$ e a aceleração absoluta $\vec{a}_P$ do ponto *P* da barra *BP*;

d) o vetor aceleração angular absoluta $\vec{\alpha}$ da barra *BP*.

Obs.: adote o piso *A* como referencial fixo, o anel como referencial móvel e use os versores $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ do sistema móvel *Oxyz*, solidário ao anel, para expressar as grandezas cinemáticas.

Questão 3 (3,0 pontos)

A trajetória de um ponto *P* é dada por $(P - O) = \vec{r}(\alpha) = L(\cos\alpha\,\vec{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j} - \operatorname{sen}2\alpha\,\vec{k})$, onde *L* é constante, de acordo com a lei horária $\alpha = 2t + \dfrac{\pi}{8}$. Pede-se determinar, para o instante $t = \dfrac{\pi}{16}$s :

a) o versor tangente $\vec{t}$ do triedro de Frenet, em função dos versores da base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;

b) a velocidade de *P* usando a base do triedro de Frenet (expressão intrínseca da velocidade);

c) a aceleração de *P* usando a base do triedro de Frenet (expressão intrínseca da aceleração).

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Segunda Prova – 13 de outubro de 2015
Gabarito

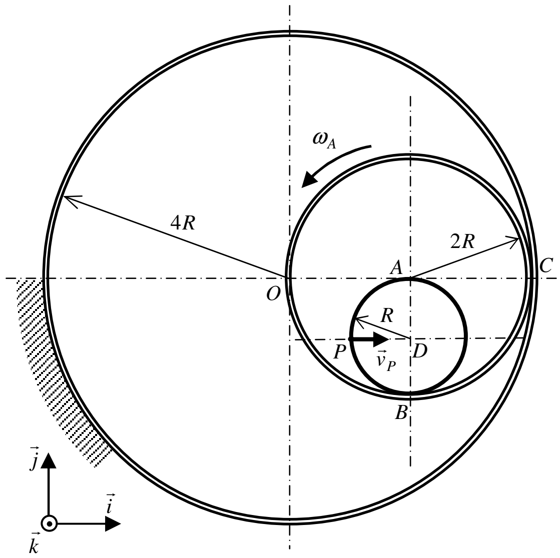
Questão 1 (3,5 pontos) O aro de centro O, raio $4R$, e espessura desprezível, é fixo. O aro de centro A, raio $2R$ e espessura desprezível, rola sem escorregar na superfície interna do aro de centro O e raio $4R$, e sua velocidade angular é ω_A, conhecida. O disco, de centro D e raio R, rola sem escorregar na superfície interna do aro de centro A e raio $2R$. No instante mostrado na figura, sabe-se que a velocidade $\vec{v}_P$ do ponto P é na direção de $\vec{i}$, mas o módulo é desconhecido. Nesse instante, determine:

a) o centro instantâneo de rotação CIR_A do aro de centro A e raio $2R$ (graficamente) e a velocidade $\vec{v}_B$ do ponto B desse mesmo aro;

b) o centro instantâneo de rotação CIR_D do disco de centro D e raio R (graficamente);

c) o vetor rotação $\vec{\omega}_D$ do disco e a velocidade $\vec{v}_P$ do ponto P.

Use os versores $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ para expressar as grandezas cinemáticas.



Solução

a) Ver figura: como rola sem escorregar e o aro de centro O é fixo, a velocidade do ponto C do aro de centro A é nula, sendo o CIR_A.

0,5

$$\left|\vec{v}_B\right| = 2R\sqrt{2}\omega_A$$

$$\vec{v}_B = 2R\sqrt{2}\omega_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{v}_B = 2R\omega_A\left(\vec{i} - \vec{j}\right)}$$

1,0

b) Ver figura: desenhando as retas perpendiculares às velocidades nos pontos B e P, localizamos o CIR_D do disco de centro D.

1,0

c) Usando o CIR_D:

$$\left|\vec{v}_B\right| = R\sqrt{2}\left|\omega_D\right| = 2R\sqrt{2}\omega_A$$

$$\left|\omega_D\right| = 2\omega_A$$

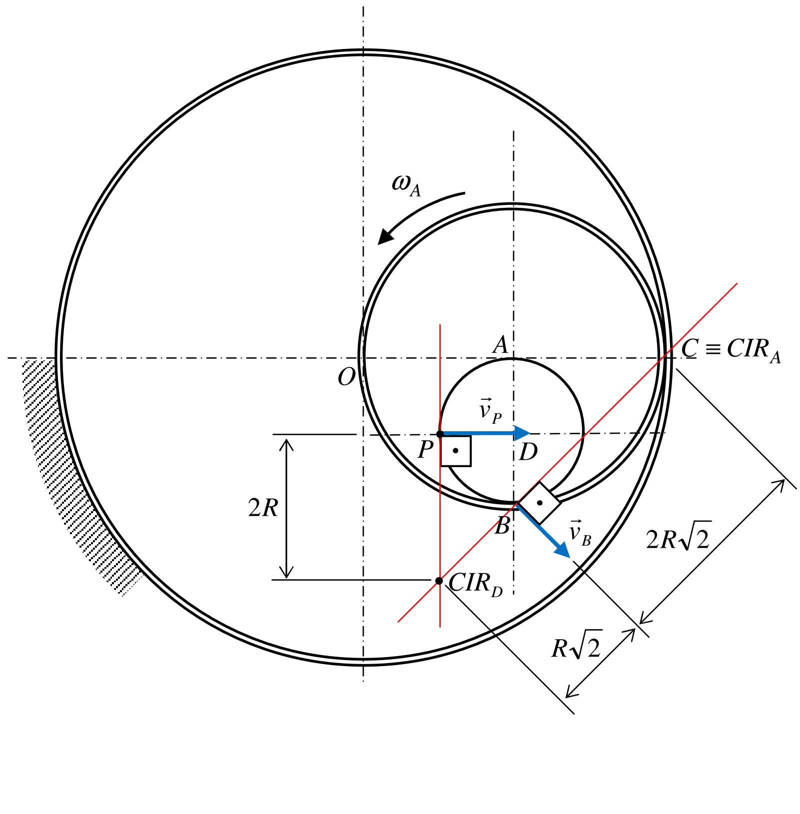
$$\boxed{\vec{\omega}_D = -2\omega_A\vec{k}}$$

0,5

$$\left|\vec{v}_P\right| = 2R\left|\omega_D\right| = 4R\omega_A$$

$$\boxed{\vec{v}_P = 4R\omega_A\vec{i}}$$

0,5



Ou usando o campo de velocidades do disco de centro D:

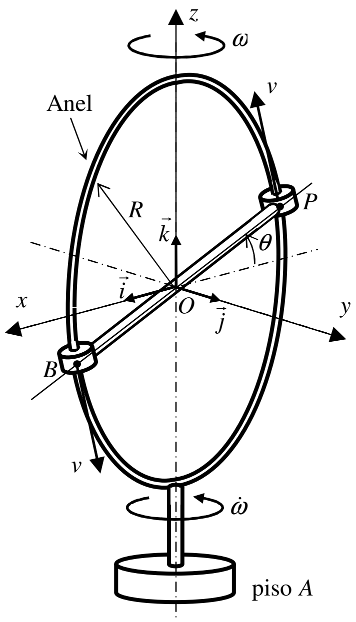
$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega}_D \wedge (P - B) \Rightarrow v_P\,\vec{i} = 2R\omega_A\left(\vec{i} - \vec{j}\right) + \omega_D\,\vec{k} \wedge R\left(-\vec{i} + \vec{j}\right) \Rightarrow$$

$$v_P\,\vec{i} = 2R\omega_A\,\vec{i} - 2R\omega_A\,\vec{j} - \omega_D R\,\vec{j} - \omega_D R\,\vec{i} \Rightarrow \begin{cases} v_P = 2R\omega_A - \omega_D R \Rightarrow v_P = 4R\omega_A \\ -2R\omega_A - \omega_D R = 0 \Rightarrow \omega_D = -2\omega_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_D = -2\omega_A\vec{k}} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{v}_P = 4R\omega_A\vec{i}}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica



Questão 2 (3,5 pontos) Um anel esbelto de raio R, contido no plano *Oxz*, gira em um eixo vertical com vetor rotação $\vec{\omega}=\omega\vec{k}$ e vetor aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}=\dot{\omega}\vec{k}$. A barra diametral *BP* percorre o anel de forma que a velocidade relativa $\vec{v}$ do ponto *P* é conhecida e de módulo constante $|\vec{v}|=v$. Considerando o instante em que o ponto *P* está na posição θ do anel, determine em função de θ:

a) o vetor $(P-O)$, o vetor rotação $\dot{\vec{\theta}}$ da barra *BP* em torno de Oy e o vetor rotação absoluta $\vec{\Omega}$ da barra *BP*;

b) a velocidade relativa $\vec{v}_{P,r}$, a velocidade de arrastamento $\vec{v}_{P,a}$ e a velocidade absoluta $\vec{v}_P$ do ponto *P* da barra *BP*;

c) a aceleração relativa $\vec{a}_{P,r}$, a aceleração de arrastamento $\vec{a}_{P,a}$, a aceleração de complementar (*Coriolis*) $\vec{a}_{P,c}$ e a aceleração absoluta $\vec{a}_P$ do ponto *P* da barra *BP*;

d) o vetor aceleração angular absoluta $\vec{\alpha}$ da barra *BP*.

Obs.: adote o piso *A* como referencial fixo, o anel como referencial móvel e use os versores $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ do sistema móvel *Oxyz*, solidário ao anel, para expressar as grandezas cinemáticas.

Solução

1,0 a) Vetor rotação $\dot{\vec{\theta}}$ da barra *BP*:

Tomando $\boxed{(P-O)=R(-\cos\theta\,\vec{i}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{k})}$

$$\vec{v}_{P,r}=\vec{v}=\vec{v}_O+\dot{\vec{\theta}}\wedge(P-O)=\dot{\theta}\,\vec{j}\wedge R(-\cos\theta\,\vec{i}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{k})\Rightarrow\vec{v}_{P,r}=\vec{v}=R\dot{\theta}(\cos\theta\,\vec{k}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{i})$$

Do enunciado: $|\vec{v}_{P,r}|=|\vec{v}|=v\Rightarrow R\dot{\theta}=v\Rightarrow\boxed{\dot{\vec{\theta}}=\frac{v}{R}\vec{j}}$

$$\vec{\Omega}=\vec{\omega}_{rel}+\vec{\omega}_{arr}\Rightarrow\boxed{\vec{\Omega}=\frac{v}{R}\vec{j}+\omega\vec{k}}$$

1,0 b) Velocidade de *P*:

$$\boxed{\vec{v}_{P,r}=v(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{k})}$$

$$\vec{v}_{P,a}=\vec{v}_O+\vec{\omega}\wedge(P-O)=\omega\vec{k}\wedge R(-\cos\theta\,\vec{i}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{k})\Rightarrow\boxed{\vec{v}_{P,a}=-R\omega\cos\theta\,\vec{j}}$$

$$\vec{v}_P=\vec{v}_{P,r}+\vec{v}_{P,a}=v(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{k})-R\omega\cos\theta\,\vec{j}\Rightarrow\boxed{\vec{v}_P=v\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}-R\omega\cos\theta\,\vec{j}+v\cos\theta\,\vec{k}}$$

1,0 c) Aceleração de *P*:

$$\vec{a}_{P,r}=\vec{a}_O+\ddot{\vec{\theta}}\wedge(P-O)+\dot{\vec{\theta}}\wedge\left[\dot{\vec{\theta}}\wedge(P-O)\right]$$

$\vec{a}_O=\vec{0}$ e $\dot{\theta}=\frac{v}{R}$ (constante) $\Rightarrow\ddot{\vec{\theta}}=\vec{0}$, portanto: $\boxed{\vec{a}_{P,r}=\frac{v^2}{R}(\cos\theta\,\vec{i}-\operatorname{sen}\theta\,\vec{k})}$

$$\vec{a}_{P,a}=\vec{a}_O+\vec{\alpha}_{arr}\wedge(P-O)+\vec{\omega}_{arr}\wedge[\vec{\omega}_{arr}\wedge(P-O)]\Rightarrow\vec{a}_{P,a}=\dot{\omega}\vec{k}\wedge(P-O)+\omega\vec{k}\wedge[\omega\vec{k}\wedge(P-O)]$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,a}=R(\omega^2\cos\theta\,\vec{i}-\dot{\omega}\cos\theta\,\vec{j})}$$

$$\vec{a}_{P,c}=2\vec{\omega}_{arr}\wedge\vec{v}_{P,r}=2\omega\vec{k}\wedge v(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{k})\Rightarrow\boxed{\vec{a}_{P,c}=2v\omega\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{a}_P=\left(\frac{v^2}{R}+R\omega^2\right)\cos\theta\,\vec{i}+(2v\omega\operatorname{sen}\theta-R\dot{\omega}\cos\theta)\,\vec{j}-\frac{v^2}{R}\operatorname{sen}\theta\,\vec{k}}$$

0,5 d) Aceleração angular da barra *BP*: $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_{rel}+\vec{\alpha}_{arr}+\vec{\omega}_{arr}\wedge\vec{\omega}_{rel}\Rightarrow\vec{\alpha}=\vec{0}+\dot{\omega}\vec{k}+\omega\vec{k}\wedge\frac{v}{R}\vec{j}\Rightarrow\boxed{\vec{\alpha}=-\frac{v}{R}\omega\vec{i}+\dot{\omega}\vec{k}}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 3 (3,0 pontos)

A trajetória de um ponto P é dada por $(P-O)=\vec{r}(\alpha)=L(\cos\alpha\,\vec{i}+\text{sen}\,\alpha\,\vec{j}-\text{sen}\,2\alpha\,\vec{k})$, onde L é constante, de acordo com a lei horária $\alpha=2t+\frac{\pi}{8}$. Pede-se determinar, para o instante $t=\frac{\pi}{16}\,\text{s}$:

a) o versor tangente $\vec{t}$ do triedro de Frenet, em função dos versores da base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$;
b) a velocidade de P usando a base do triedro de Frenet (expressão intrínseca da velocidade);
c) a aceleração de P usando a base do triedro de Frenet (expressão intrínseca da aceleração).

Solução

1,0

a) versor tangente $\vec{t}$ do triedro de Frenet: $\vec{t}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}(\alpha)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\left[L(\cos\alpha\,\vec{i}+\text{sen}\,\alpha\,\vec{j}-\text{sen}\,2\alpha\,\vec{k})\right]}{d\alpha}\frac{d\left(2t+\frac{\pi}{8}\right)}{dt}=L(-\text{sen}\,\alpha\,\vec{i}+\cos\alpha\,\vec{j}-2\cos2\alpha\,\vec{k})\cdot2\Rightarrow$$
$$\vec{v}=2L(-\text{sen}\,\alpha\,\vec{i}+\cos\alpha\,\vec{j}-2\cos2\alpha\,\vec{k})$$

No instante $t=\frac{\pi}{16}\,s$, temos que $\alpha=2t+\frac{\pi}{8}=2\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$:

$$\vec{v}=2L\left(-\text{sen}\frac{\pi}{4}\vec{i}+\cos\frac{\pi}{4}\vec{j}-2\cos2\frac{\pi}{4}\vec{k}\right)\Rightarrow\vec{v}=2L\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

Nesse instante, o versor tangente $\vec{t}$ do triedro de Frenet é $\vec{t}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{2L\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)}{2L}\Rightarrow\boxed{\vec{t}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}}$

0,5

b) Velocidade intrínseca: $\vec{v}=v\,\vec{t}$

No instante $t=\frac{\pi}{16}\text{s}$ temos: $\vec{v}=2L\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)}_{\vec{t}}\Rightarrow\boxed{\vec{v}=2L\vec{t}}$

c) Aceleração intrínseca: $\vec{a}=a_t\vec{t}+a_n\vec{n}$ 0,5

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}(\alpha)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\left[2L(-\text{sen}\,\alpha\,\vec{i}+\cos\alpha\,\vec{j}-2\cos2\alpha\,\vec{k})\right]}{d\alpha}\frac{d\left(2t+\frac{\pi}{8}\right)}{dt}=2L(-\cos\alpha\,\vec{i}-\text{sen}\,\alpha\,\vec{j}+4\text{sen}2\alpha\,\vec{k})\cdot2$$
$$\vec{a}=4L(-\cos\alpha\,\vec{i}-\text{sen}\,\alpha\,\vec{j}+4\text{sen}2\alpha\,\vec{k})$$

No instante $t=\frac{\pi}{16}\,s$, temos que $\alpha=\frac{\pi}{4}$:

$$\vec{a}=4L\left(-\cos\frac{\pi}{4}\vec{i}-\text{sen}\frac{\pi}{4}\vec{j}+4\text{sen}2\frac{\pi}{4}\vec{k}\right)\Rightarrow\vec{a}=4L\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+4\vec{k}\right)$$

Como $\vec{a}=4L\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+4\vec{k}\right)$ e $\vec{t}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$, temos que:

$$a_t=\vec{a}\cdot\vec{t}=4L\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+4\vec{k}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)=4L\left(\frac{2}{4}-\frac{2}{4}+0\right)=0$$

Portanto, $a_n=|\vec{a}|=\left|4L\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+4\vec{k}\right)\right|=4L\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+16}=4L\sqrt{17}\Rightarrow\boxed{\vec{a}=4L\sqrt{17}\,\vec{n}}$ 1,0