



PME 3100 – MECÂNICA I (Reoferecimento) – Prova P1 – 16 de Maio de 2023

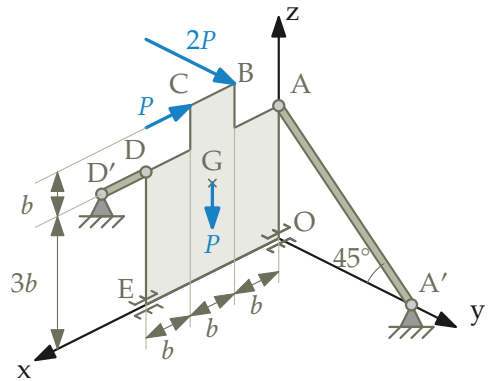
- Esta avaliação tem duração de 120 minutos e é composta por 3 questões.
- Não é permitido utilização de quaisquer dispositivos eletrônicos, tampouco consulta a qualquer material externo.
- As questões podem ser resolvidas a lápis, na ordem escolhida pelo aluno (que deve indicar claramente onde iniciou cada questão).

Formulário

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \quad \vec{M}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \quad \vec{M}_A = \vec{M}_B + (B - A) \wedge \vec{R}$$

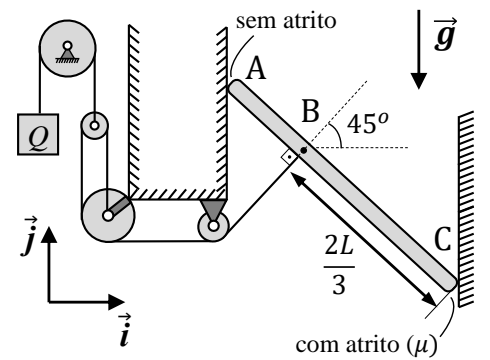
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge (A - B) \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \wedge (A - B) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A - B)]$$

Questão 1 (3,5 pontos). O sistema ilustrado na figura abaixo é constituído por uma placa rígida homogênea OABCDE, de centro de massa G e peso P e pelas barras AA' e DD', ambas rígidas, de pesos desprezíveis e articuladas em suas extremidades. Note que a barra DD' é paralela ao eixo Ox. A placa é vinculada à base fixa por meio de dois anéis ideais em O e E. São ainda aplicadas as forças (2Pj, B) e (-Pi, C) sobre a placa. Considerando a geometria da placa, as dimensões e o sistema de coordenadas fornecidos na figura, pede-se:



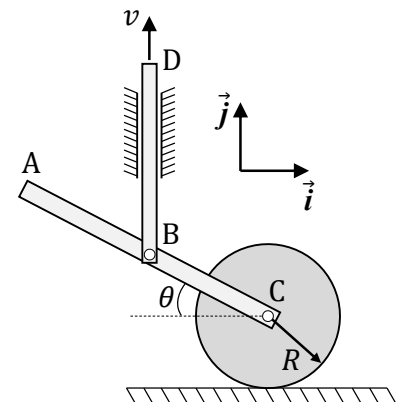
- (0,5) obter o vetor posição (G – O) do centro de massa da placa OABCDE;
- (0,6) esboçar o diagrama de corpo livre (DCL) da placa OABCDE;
- (0,3) listar as componentes de reação que produzem momento nulo com respeito ao polo A;
- (1,5) escrever o sistema de equações de equilíbrio da placa;
- (0,6) resolver o sistema de equações, obtendo todas as componentes de reação.

Questão 2 (3,0 pontos). No sistema ilustrado na figura, a barra homogênea ABC, de peso P e comprimento L, está apoiada em uma parede lisa (sem atrito) em A e em uma parede rugosa (com atrito) em C. O ponto B é conectado a um fio inextensível e sem massa que está acoplado a um sistema de polias que suporta um bloco de peso Q. Em B, o fio permanece ortogonal à barra; entre as polias inferiores, o fio permanece horizontal. Admitindo que as polias possuem peso desprezível e que não há escorregamento entre o fio e as polias, e sendo μ o coeficiente atrito estático entre a parede e a barra em C, pede-se:



- (1,0) o diagrama de corpo livre da barra ABC;
- (0,5) a força de tração no fio em B;
- (1,0) as forças atuantes na barra ABC;
- (0,5) o valor mínimo de μ para que a barra ABC permaneça em equilíbrio.

Questão 3 (3,5 pontos). No mecanismo mostrado na figura, a barra BD desliza verticalmente com velocidade constante $v\vec{j}$, e está articulada ao centro da barra AC de comprimento L. A extremidade C da barra AC está articulada ao centro de um disco de raio R que rola sem escorregar sobre uma superfície horizontal. Pede-se:



- (1,0) determinar graficamente o centro instantâneo de rotação (CIR) do disco e o CIR da barra considerando o mecanismo na posição mostrada na figura;
- (0,5) a velocidade angular $\vec{\omega}_1$ da barra em função de θ ;
- (0,5) a velocidade \vec{v}_C do ponto C em função de θ ;
- (0,5) a velocidade angular $\vec{\omega}_2$ do disco em função de θ ;
- (1,0) a aceleração angular $\vec{\alpha}_1$ da barra e a aceleração angular $\vec{\alpha}_2$ do disco para a posição do mecanismo em que $\theta = 0^\circ$.



Questão 1 (3,5 pontos)

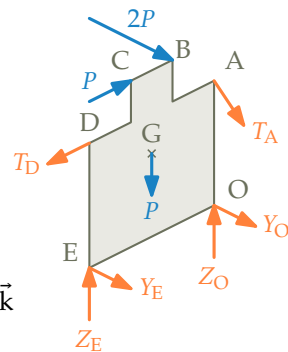
Distribuição de pontos:

- (a) 0,2 ponto para a componente x; 0,1 ponto para a componente y; 0,2 ponto para a componente z.
- (b) 0,6 ponto se o DCL estiver correto ou 0,3 ponto se houver até 2 componentes erradas no DCL.
- (c) 0,1 ponto para cada componente corretamente identificada.
- (d) 0,3 ponto para cada componente da equação de equilíbrio de momentos;
0,2 ponto para cada componente da equação de equilíbrio de forças.
- (e) 0,1 ponto para cada resposta correta.

Resolução:

- (a) A placa homogênea OABCD pode ser descrita como a união de duas placas quadradas homogêneas, uma de área $A_1 = (3b)^2 = 9b^2$ e centro $G_1 = \left(\frac{3}{2}b, 0, \frac{3}{2}b\right)$, e a outra de área $A_2 = b^2$ e centro $G_2 = \left(\frac{3}{2}b, 0, \frac{7}{2}b\right)$. Devido à homogeneidade, as massas são proporcionais às respectivas áreas. Assim:

$$(\mathbf{G} - \mathbf{O}) = \frac{A_1(\mathbf{G}_1 - \mathbf{O}) + A_2(\mathbf{G}_2 - \mathbf{O})}{A_1 + A_2} = \frac{(9b^2)\frac{3}{2}b(\mathbf{i} + \mathbf{k}) + (b^2)\frac{1}{2}b(3\mathbf{i} + 7\mathbf{k})}{10b^2} = \frac{3}{2}b\mathbf{i} + \frac{17}{10}b\mathbf{k}$$



- (b) Diagrama de corpo livre da placa (vide figura ao lado).
- (c) Não produzem momento com respeito ao polo A as componentes T_A , T_D e Z_O , pois suas linhas de ação passam por este polo.
- (d) Resultante de momentos com respeito ao polo A:

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= (\mathbf{O} - \mathbf{A}) \wedge (Y_O\mathbf{j}) + (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \wedge (Y_E\mathbf{j} + Z_E\mathbf{k}) + (\mathbf{G} - \mathbf{A}) \wedge (-P\mathbf{k}) + (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \wedge (2P\mathbf{j}) + (\mathbf{C} - \mathbf{A}) \wedge (-P\mathbf{i}) \\ &= -3b\mathbf{k} \wedge (Y_O\mathbf{j}) + 3b(\mathbf{i} - \mathbf{k}) \wedge (Y_E\mathbf{j} + Z_E\mathbf{k}) + b\left(\frac{3}{2}\mathbf{i} - \frac{13}{10}\mathbf{k}\right) \wedge (-P\mathbf{k}) + b(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \wedge (2P\mathbf{j}) + b(2\mathbf{i} + \mathbf{k}) \wedge (-P\mathbf{i}) \\ &= (3bY_O + 3bY_E - 2bP)\mathbf{i} + \left(-3bZ_E + \frac{3}{2}bP - bP\right)\mathbf{j} + (3bY_E + 2bP)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Resultante de forças:

$$\vec{R} = (T_D - P)\mathbf{i} + \left(Y_O + Y_E + 2P + T_A \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{j} + \left(Z_O + Z_E - P - T_A \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{j}$$

Para o equilíbrio da estrutura é necessário que $\vec{M}_A = \vec{0}$ e $\vec{R} = \vec{0}$, de onde se obtêm as equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} 3bY_O + 3bY_E - 2bP = 0 \\ -3bZ_E + \frac{3}{2}bP - bP = 0 \\ 3bY_E + 2bP = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T_D - P = 0 \\ Y_O + Y_E + 2P + T_A \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ Z_O + Z_E - P - T_A \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

- (e) Resolvendo as equações, obtemos:

$$\boxed{Y_E = -\frac{2}{3}P} \quad \boxed{Z_E = \frac{1}{6}P} \quad \boxed{Y_O = \frac{4}{3}P} \quad \boxed{Z_O = -\frac{11}{6}P} \quad \boxed{T_A = -\frac{8\sqrt{2}}{3}P} \quad \boxed{T_D = P}$$

**Questão 2 (3,0 pontos)**

Distribuição de pontos:

- (a) 0,5 ponto para as forças ativas e 0,5 ponto para as forças reativas.
- (b) 0,0 ponto para resposta incorreta e 0,5 ponto para a resposta correta.
- (c) 0,5 ponto para as equações de equilíbrio e 0,5 ponto por resolver o sistema corretamente com subdivisão na metade de cada meio ponto de acordo com o número de equações e resultados corretos
- (d) 0,3 ponto para uso correto da condição de atrito estático mas com diferença algébrica com o gabarito, e 0,5 ponto para resposta correta.

Resolução:

- (a) Diagrama de corpo livre da barra ABC (vide figura ao lado).
- (b) Considerando a transmissão do peso do bloco pelo sistema de polias, a força de tração no fio em B é $T = \frac{Q}{2}$.
- (c) Resultante de forças:

$$\vec{R} = (N_A - N_C - T \cos 45^\circ)\vec{i} + (-T \sin 45^\circ - P + F_C)\vec{j}$$

Resultante de momentos com respeito ao polo C:

$$\vec{M}_C = (-N_A L \sin 45^\circ + T \frac{2L}{3} + P \frac{L \cos 45^\circ}{2})\vec{k}$$

Para o equilíbrio da barra ABC é necessário que $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_A = \vec{0}$ de onde se obtêm as equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} N_A - N_C - T \cos 45^\circ = 0 \\ -T \sin 45^\circ - P + F_C = 0 \\ -N_A L \sin 45^\circ + T \frac{2L}{3} + P \frac{L \cos 45^\circ}{2} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo as equações, obtêm-se:

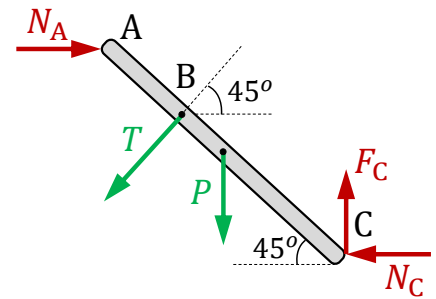
$$N_A = \frac{P}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}Q$$

$$N_C = \frac{P}{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}Q$$

$$F_C = P + \frac{\sqrt{2}}{4}Q$$

- (d) Para que a barra ABC permaneça em equilíbrio, $|F_C| \leq \mu|N_C|$. Portanto:

$$\left| \frac{F_C}{N_C} \right| \leq \mu \Rightarrow \mu \geq \left(\frac{12P + 3\sqrt{2}Q}{6P + \sqrt{2}Q} \right)$$





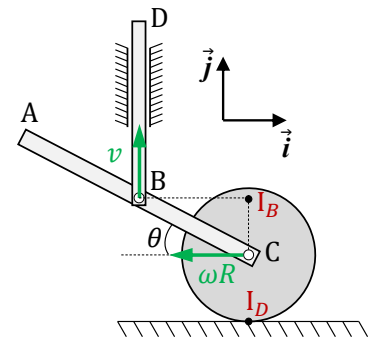
Questão 3 (3,5 pontos)

Distribuição de pontos:

- (a) 0,5 ponto para a determinação gráfica correta do CIR do disco e 0,5 ponto para a determinação gráfica correta do CIR da barra ABC.
- (b) 0,5 ponto se $\vec{\omega}_1$ estiver correto ou 0,2 ponto se a expressão do campo de velocidades correlacionando \vec{v}_B e $\vec{\omega}_1$ estiver correta.
- (c) 0,5 ponto se \vec{v}_C estiver correto ou 0,2 ponto se a expressão do campo de velocidades correlacionando \vec{v}_C e $\vec{\omega}_1$ estiver correta.
- (d) 0,5 ponto se $\vec{\omega}_2$ estiver correto ou 0,2 ponto se a expressão do campo de velocidades correlacionando \vec{v}_C e $\vec{\omega}_2$ estiver correta.
- (e) 0,2 ponto se a expressão do campo de acelerações correlacionando \vec{a}_C e $\vec{\alpha}_1$ para a barra estiver correta;
0,2 ponto se a expressão do campo de acelerações correlacionando \vec{a}_C e $\vec{\alpha}_2$ para o disco estiver correta;
0,2 ponto se o vetores $(C - B)$ e $\vec{\alpha}_1$ para $\theta = 0$ estiverem corretos;
0,2 ponto se $\vec{\alpha}_1$ é calculado corretamente e 0,2 ponto se $\vec{\alpha}_2$ é calculado corretamente.

Resolução:

- (a) O CIR da barra ABC (I_B) e o CIR do disco (I_D) estão ilustrados na figura ao lado.
- (b) A velocidade angular da barra ABC pode ser calculada utilizando-se a expressão do campo de velocidades para corpo rígido e considerando o seu CIR como ponto de referência. Dessa forma, tem-se:



$$\vec{v}_B = \vec{v}_{I_B} + \vec{\omega}_1 \wedge (B - I_B), \quad \vec{v}_{I_B} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_B = \omega_1 \vec{k} \wedge -\frac{L}{2} \cos \theta \vec{i} = -\frac{\omega_1 L}{2} \cos \theta \vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_1 = -\left(\frac{2v}{L \cos \theta}\right) \vec{k}}$$

- (c) Aplicando novamente a expressão do campo de velocidades para a barra ABC e utilizando a velocidade angular calculada no item anterior, obtêm-se:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{I_B} + \vec{\omega}_1 \wedge (C - I_B), \quad \vec{v}_{I_B} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_C = -\left(\frac{2v}{L \cos \theta}\right) \vec{k} \wedge -\frac{L}{2} \sin \theta \vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_C = -(v \tan \theta) \vec{i}}$$

- (d) Aplicando-se agora expressão do campo de velocidades para o disco e utilizando o ponto C como ponto de referência, tem-se:

$$\vec{v}_C = -(v \tan \theta) \vec{i} = -\omega_2 R \vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_2 = \left(\frac{v \tan \theta}{R}\right) \vec{k}}$$

- (e) Aplicando a expressão do campo de acelerações para a barra ABC e para o disco, a aceleração do ponto C pode ser expressa, como segue:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_1 \wedge (C - B) + \vec{\omega}_1 \wedge [\vec{\omega}_1 \wedge (C - B)], \quad \vec{a}_B = \vec{0} \quad (\text{para a barra})$$

$$\vec{a}_C = -\alpha_2 R \vec{i} \quad (\text{para o disco})$$



Para $\theta = 0$: $(C - B) = \left(\frac{L}{2}\right)\vec{i}$ e $\vec{\omega}_1 = -\left(\frac{2v}{L}\right)\vec{k}$, então:

$$\vec{a}_C = \alpha_1 \vec{k} \wedge \left(\frac{L}{2}\right)\vec{i} - \left(\frac{2v}{L}\right)\vec{k} \wedge \left[-\left(\frac{2v}{L}\right)\vec{k} \wedge \left(\frac{L}{2}\right)\vec{i}\right] = -\left(\frac{2v^2}{L}\right)\vec{i} + \left(\frac{\alpha_1 L}{2}\right)\vec{j} = -\alpha_2 R \vec{i}$$

Finalmente, as seguintes equações escalares são obtidas:

$$\begin{cases} -\frac{2v^2}{L} = -\alpha_2 R & \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_2 = \frac{2v^2}{RL}\vec{k}} \\ \frac{\alpha_1 L}{2} = 0 & \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_1 = \vec{0}} \end{cases}$$