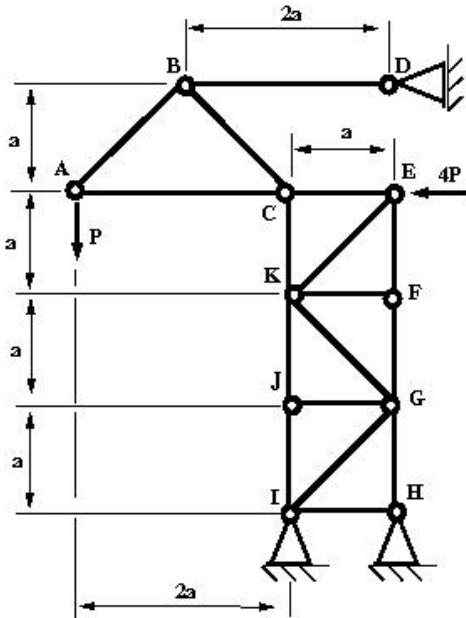




GABARITO: Prova P1- 3 de abril de 2009



1ª. Questão (3,5 pontos) Considere a treliça da figura, sujeita à ação das cargas ativas indicadas nos nós B e E, e sustentada por articulações em D, H e I. Pede-se determinar:

- a) a reação vincular em D; (1,0)
- b) as forças nas barras AB, AC, BC e BD, mencionando se são de tração ou compressão; (1,0)
- c) as forças nas barras KJ, KG e FG, mencionando se são de tração ou compressão. (1,5)

SOLUÇÃO

A treliça como um todo é hiperestática, pois é sustentada por 3 articulações, que podem fornecer duas componentes de reação cada uma. Assim, pode-se separar a estrutura em duas partes. Um local lógico para se fazer o desmembramento é o nó C, pois é comum às partes “superior” e “inferior” da estrutura. A parte superior fica conforme a figura abaixo. Note que a separação em C implica na introdução das reações vinculares que mantêm o conjunto unido, força com componentes ainda desconhecidas X_C e Y_C . Em D, teoricamente seria necessário arbitrar duas componentes de reação; no entanto, como a barra BD é solicitada apenas nos nós B e D, a reação vincular terá necessariamente a direção da própria barra, razão pela qual apenas a componente X_D é imposta, concluindo-se que o conjunto é isostático (vide Figura 1).

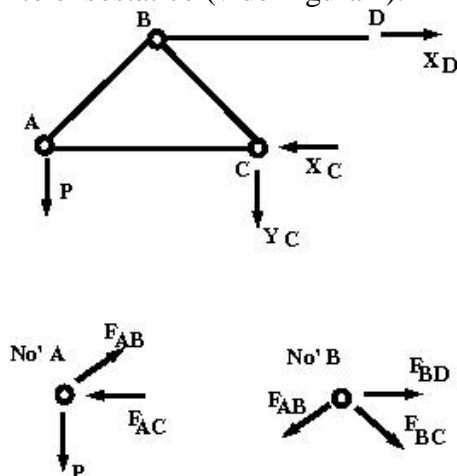


Figura 1: Diagramas de corpo livre dos nós A e B e da parte superior da treliça.



O equilíbrio da parte superior ABCD impõe que:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_D = X_C$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_C = -P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -2aY_C - aX_D = 0 \Rightarrow X_D = 2P$$

$$\Rightarrow X_C = 2P = X_D$$

A força na barra BD é, portanto, idêntica a X_D , ou seja, $F_{BD} = 2P$ (tração).

As forças nas barras AB, AC e BC decorrem do equilíbrio dos nós, por exemplo, A e B.
 No nó A,

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{AC} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{AB} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = P\sqrt{2} \text{ (tração)}$$

$$\Rightarrow F_{AC} = P \text{ (compressão)}$$

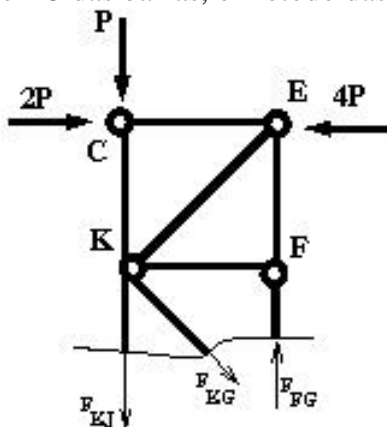
No nó B,

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BD} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{AB} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BC} = 0$$

$$\Rightarrow 2P - P + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BC} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{BC} = -P\sqrt{2} \text{ (compressão)}$$

Resolve-se agora a parte “inferior” da estrutura. Como são solicitadas apenas as forças em 3 das barras, o método das seções aplica-se imediatamente (vide Figura 2).



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 2P - 4P + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{KG} = 0$$

$$\Rightarrow F_{KG} = 2P\sqrt{2} \text{ (tração)}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow aF_{FG} + a\frac{\sqrt{2}}{2} F_{KG} = 0$$

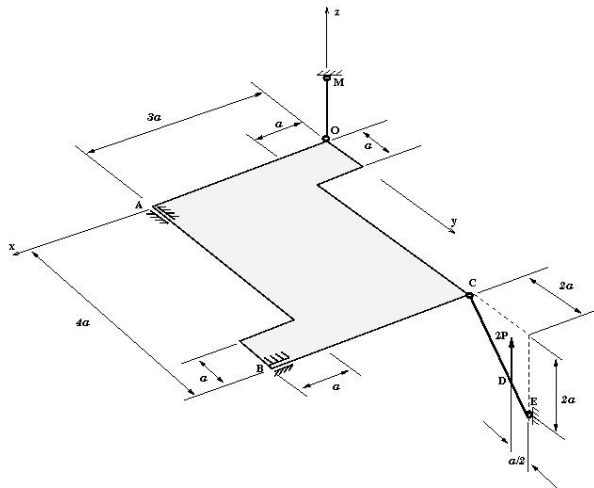
$$\Rightarrow aF_{FG} + a\frac{\sqrt{2}}{2} 2P\sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow F_{FG} = -2P \text{ (tração)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P - F_{KG} \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{FG} - F_{KJ} = 0$$

$$\Rightarrow F_{KJ} = -5P \text{ (compressão)}$$

Figura 2: Diagrama de corpo livre da “seção”



Questão 2 (3,5 pontos)

Uma placa homogênea $OABC$ de peso P é sustentada através de um anel em A , um anel em B , e duas barras, OM e CE , ambas de massa desprezível. Em O e C as barras são vinculadas à placa por meio de articulações. No ponto D da barra CE aplica-se uma carga vertical de módulo $2P$ e sentido indicado. Os vínculos externos em E e M são articulações. São dadas as dimensões indicadas e sabe-se que a barra CE pertence a um plano paralelo ao plano yz .

Pedem-se:

- (a) os diagramas de corpo livre das barras CE e OM ; (1,0)
- (b) o diagrama de corpo livre da placa; (1,0)
- (c) as reações vinculares em A , B e C . (1,5)

Solução:

Analisando o equilíbrio das barras OM e CE , notamos que:

- a barra OM está em equilíbrio sujeita a apenas às duas reações vinculares em suas extremidades; logo, ambas têm mesmo módulo e são diretamente opostas;
- a barra CE está em equilíbrio sujeita a apenas três forças – a carga $2P$ e as reações vinculares em C e E ; logo, estas são coplanares (paralelas ou concorrentes).

Tomando-se por base as considerações acima, resultam para essas barras os diagramas de corpo livre apresentados na Figura 3:

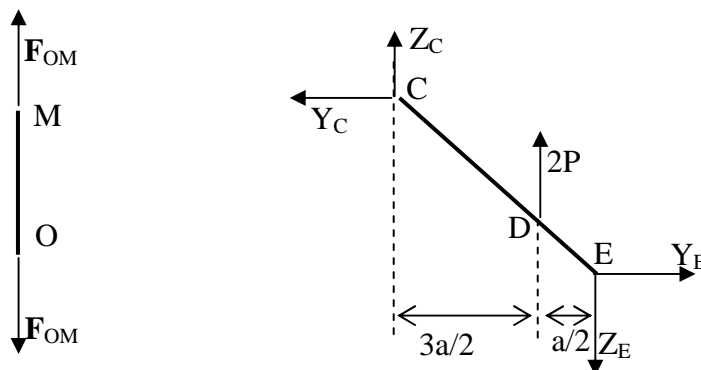


Figura 3: Diagramas de corpo livre das barras: (a) OM : (b) CE .

Aplicando-se à barra CE a condição de equilíbrio de momentos em torno do ponto E , obtém-se:



$$\sum M_{Ez} = 0 \Rightarrow Y_C \cdot 2a - Z_C \cdot 2a - 2P \cdot \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow 2Y_C - 2Z_C - P = 0 \quad (1)$$

Analisando-se a geometria da placa $OABC$, notamos que esta apresenta um ponto de simetria, correspondente à intersecção das diagonais OB e CA . Como a placa é homogênea, o seu baricentro coincide com esse ponto de simetria, ou seja: $G = (2a, 2a, 0)$.

Dessa forma, o diagrama de corpo livre da placa passa a ser o da Figura 4 abaixo:

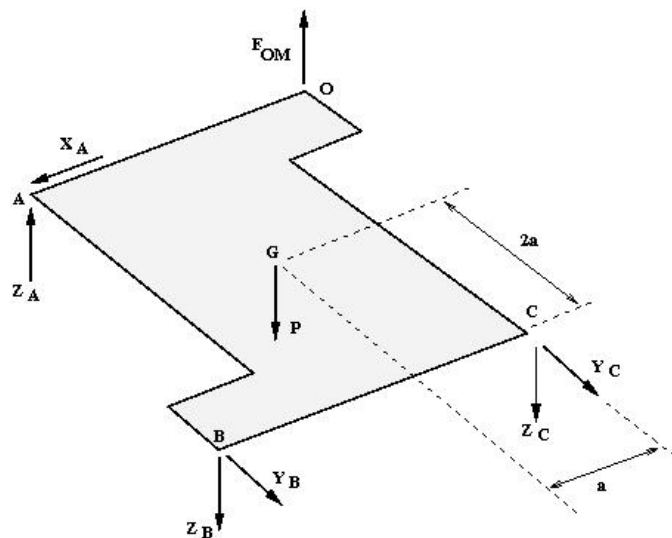


Figura 4: Diagrama de corpo livre da placa $OABC$.

Considerando-se o equilíbrio da placa, obtemos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_A = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_B + Y_C = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow Z_A + F_{OM} - P - Z_B - Z_C = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_{Bx} = 0 \Rightarrow -Z_A \cdot 4a - F_{OM} \cdot 4a + P \cdot 2a = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_{By} = 0 \Rightarrow Z_A \cdot a - P \cdot 2a - Z_C \cdot 3a + F_{OM} \cdot 4a = 0 \quad (6)$$

$$\sum M_{Bz} = 0 \Rightarrow X_A \cdot 4a - Y_C \cdot 3a = 0 \quad (7)$$

Substituindo-se (2) em (7), obtém-se:

$$Y_C = 0 \quad (8)$$

Substituindo-se (8) em (3) obtém-se:

$$Y_B = 0 \quad (9)$$

Substituindo-se (8) em (1) obtém-se:

$$Z_C = -\frac{P}{2} \quad (10)$$

Substituindo-se (10) em (6), obtém-se:



$$Z_A = \frac{P}{2} - 4F_{OM} \quad (11)$$

Substituindo-se (11) em (5) obtém-se:

$$-2Z_A - 2F_{OM} + P = 0 \Rightarrow -P + 8F_{OM} - 2F_{OM} + P = 0$$
$$\therefore F_{OM} = 0 \quad (12)$$

Substituindo-se (12) em (11) obtém-se:

$$Z_A = \frac{P}{2} \quad (13)$$

Substituindo-se (10), (12) e (13) em (4) obtém-se:

$$\frac{P}{2} + 0 - P - Z_B + \frac{P}{2} = 0$$
$$\therefore Z_B = 0 \quad (14)$$

De posse dos resultados anteriores, desenhamos os diagramas de corpo livre finais da placa e das barras, os quais se encontram ilustrados na Figura 5 abaixo.

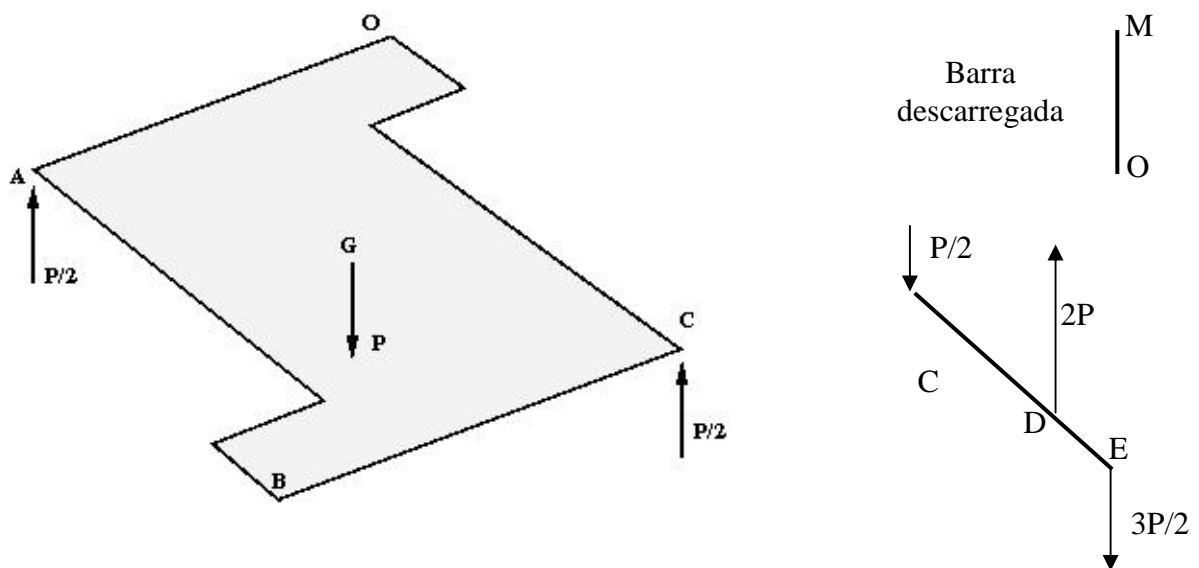


Figura 5: Diagramas de corpo livre finais da placa e das barras.



QUESTÃO 3: (3,0 pontos) Considere a barra $ABCDEF$ da Figura 6, sujeita às seguintes forças:

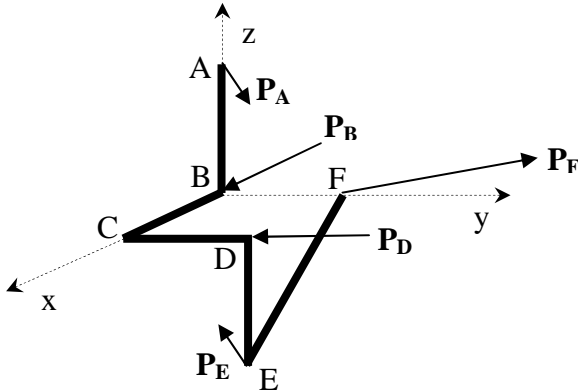


Figura 6: Barra $ABCDEF$ sujeita a 5 forças.

- \vec{P}_A : força atuante em A , com magnitude $|\vec{P}_A| = P$, paralela ao plano xy , formando 45° com o eixo x e sentido indicado na figura;
- \vec{P}_B : força atuante em B , com magnitude $|\vec{P}_B| = P$, direção paralela ao eixo x e sentido indicado na figura;
- \vec{P}_D : força atuante em D , com magnitude $|\vec{P}_D| = P$, direção paralela ao eixo y e sentido indicado na figura;
- \vec{P}_E : força atuante em E , com magnitude $|\vec{P}_E| = P$, direção paralela ao plano xy , formando 225° com o eixo x e sentido indicado na figura;
- \vec{P}_F : força atuante em F , com magnitude $|\vec{P}_F| = 2P$, ao longo da direção CF e com o eixo y e sentido indicado na figura.

São dados: $AB = BC = CD = DE = BF = \ell$

Pede-se:

- (a) A resultante do sistema de forças e o momento resultante em relação ao pólo C ; (1,0)
- (b) Verificar se o sistema é redutível a uma única força. Justificar. (1,0)
- (c) Determinar o momento mínimo e a equação do eixo central, representando-o graficamente na figura. (1,0)

Solução

De acordo com o enunciado, as forças atuantes no sistema são as seguintes:

$$\vec{P}_A = P \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) \quad \text{atuante no ponto } A(0,0,1)$$

$$\vec{P}_B = P \vec{i} \quad \text{atuante no ponto } B(0,0,0)$$

$$\vec{P}_D = -P \vec{j} \quad \text{atuante no ponto } D(1,1,0)$$

$$\vec{P}_E = -P \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) \quad \text{atuante no ponto } E(1,1,-1)$$

$$\vec{P}_F = P(-\sqrt{2} \vec{i} + \sqrt{2} \vec{j}) \quad \text{atuante no ponto } F(0,1,0)$$



Portanto, a resultante do sistema de forças será:

$$\vec{R} = \vec{P}_A + \vec{P}_B + \vec{P}_D + \vec{P}_E + \vec{P}_F = P \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) + P \vec{i} - P \vec{j} - P \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) + P(-\sqrt{2} \vec{i} + \sqrt{2} \vec{j})$$

ou seja:

$$\vec{R} = P(1 - \sqrt{2}) \vec{i} + P(\sqrt{2} - 1) \vec{j}$$

Para calcular o momento resultante em relação ao ponto C , notemos que:

- as forças \vec{P}_B, \vec{P}_D e \vec{P}_F são concorrentes em C ; logo, produzem momento nulo em relação a esse ponto;
- as forças \vec{P}_A e \vec{P}_E são paralelas, têm mesma magnitude e sentidos opostos; logo, constituem um binário (\vec{P}_A, \vec{P}_E) ;

Portanto, o momento resultante em relação ao ponto C se reduz ao binário (\vec{P}_A, \vec{P}_E) , ou seja:

$$\vec{M}_C = (A - C) \wedge \vec{P}_A + (E - C) \wedge \vec{P}_E$$

Substituindo na expressão acima as respectivas forças e vetores-posição, obtém-se:

$$\vec{M}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\ell & 0 & \ell \\ P \frac{\sqrt{2}}{2} & P \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \ell & -\ell \\ -P \frac{\sqrt{2}}{2} & -P \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = -P\ell \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + P\ell \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} - P\ell \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + P\ell \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

ou seja:

$$\vec{M}_C = -P\ell\sqrt{2} \vec{i} + P\ell\sqrt{2} \vec{j}$$

Constatamos que o sistema dado não é redutível a uma única força, uma vez que

$$I = \vec{M}_C \cdot \vec{R} = 2P^2L(2 - \sqrt{2}) \neq 0$$

Analisando os vetores \vec{M}_C e \vec{R} , constatamos que ambos têm a mesma direção, pois:

$$\vec{M}_C \wedge \vec{R} = (-P\ell\sqrt{2} \vec{i} + P\ell\sqrt{2} \vec{j}) \wedge (P(1 - \sqrt{2}) \vec{i} + P(\sqrt{2} - 1) \vec{j}) = \vec{0}$$

Lembrando que o momento mínimo é paralelo à direção da resultante, concluímos que \vec{M}_C corresponde ao próprio momento mínimo e que o eixo central coincide com a linha de ação da resultante do sistema de forças concorrentes $\vec{P}_B, \vec{P}_D, \vec{P}_F$.

Na figura 7, a seguir, mostra-se o eixo central do sistema de forças dado.

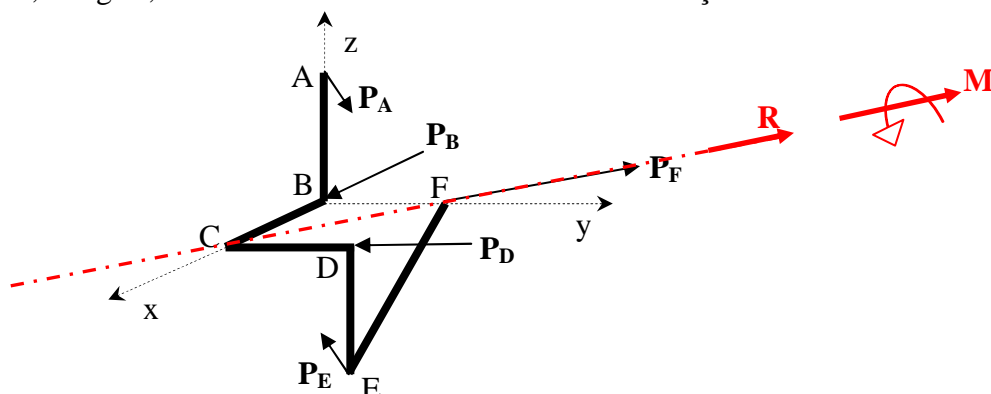


Figura 7: Eixo central do sistema de forças dado



Alternativamente, poderíamos ter aplicado a fórmula para o cálculo do momento mínimo e a equação do eixo central, ou seja:

$$\vec{M}_{\min} = \frac{\vec{M}_C \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^2} \vec{R} = -P\ell\sqrt{2}\vec{i} + P\ell\sqrt{2}\vec{j}$$

$$E = C + \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_C}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R} = \ell\vec{i} + \lambda [P(1-\sqrt{2})\vec{i} + P(\sqrt{2}-1)\vec{j}]$$

QUESTÃO 4: demonstre que, se a resultante de um sistema de forças é nula, o momento desse sistema em relação a qualquer pólo é o mesmo.

Solução:

Aplicando-se a Fórmula de mudança de pólo ao sistema referido, tem-se:

$$M_o = M_o + (Q - O) \wedge \vec{R}$$

Como $\vec{R} = \vec{0}$, resulta:

$$M_o = M_o$$

Ou seja, o momento do sistema de forças independe do pólo considerado, **conforme queríamos demonstrar**

QUESTÃO 5: considere um particular nó de uma treliça plana, sujeita apenas a cargas nodais. Admita que, nesse nó, incidam 4 barras, duas a duas colineares, formando entre si um ângulo qualquer 2θ ($\theta \neq 0$ e $2\theta \neq \pi$). Demonstre que as forças internas atuantes nas barras alinhadas têm o mesmo módulo e são diretamente opostas.

Solução:

Na Figura 8-a apresentam-se as 4 barras incidentes no nó, conforme o enunciado do problema e, na Figura 8-b, o diagrama de corpo livre do referido nó.

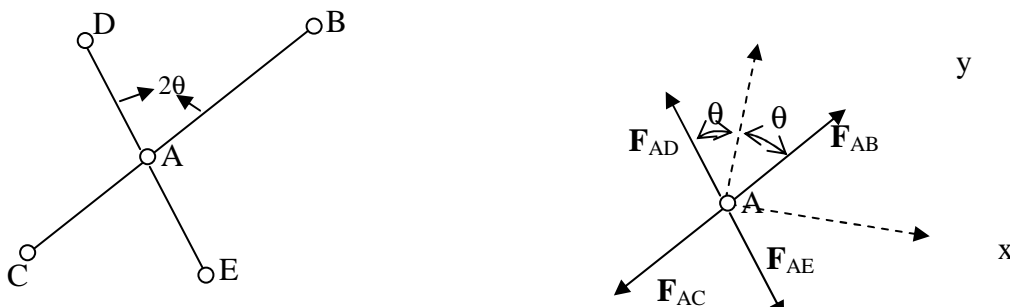


Figura 8: (a) Barras da treliça colineares duas a duas, incidentes em A ; (b) Equilíbrio do nó A.

A dotando-se o sistema de eixos indicado na Figura 8 e aplicando-se ao nó A as equações de equilíbrio da Estática, obtém-se:



$$F_{AB} \sin \theta - F_{AD} \sin \theta + F_{AE} \sin \theta - F_{AC} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$F_{AB} \cos \theta + F_{AD} \cos \theta - F_{AE} \cos \theta - F_{AC} \cos \theta = 0 \quad (2)$$

Simplificando-se (1) e (2) acima, obtêm-se:

$$F_{AB} - F_{AD} + F_{AE} - F_{AC} = 0 \quad (3)$$

$$F_{AB} + F_{AD} - F_{AE} - F_{AC} = 0 \quad (4)$$

Somando-se (3) e (4), resulta:

$$F_{AB} = F_{AC} \quad (5)$$

Substituindo-se (5) em (3), resulta:

$$F_{AD} = F_{AE} \quad (6)$$

Conforme queríamos demonstrar.

QUESTÃO 6: no interior de uma tigela hemisférica de raio R colocada sobre uma mesa, apóia-se uma faca de comprimento ℓ ($R < \ell < 2R$) e peso desprezível. Nos pontos de contato entre a faca e a tigela, os ângulos de atrito são θ_A e θ_B . Admitindo que a faca seja apoiada de forma a se manter paralela ao plano da mesa, determinar, graficamente, o lugar geométrico dos pontos x da faca ($-\ell/2 < x < \ell/2$) tais que, aplicando-se nesta uma carga P vertical, o seu equilíbrio não seja alterado.

Solução:

Seja um corte da seção transversal da tigela, em um plano paralelo à direção da faca, conforme mostrado na Figura 9.

A faca está sujeita a apenas 3 forças, quais sejam, as reações em A e B, F_A e F_B , e a força externa aplicada, P . Das condições de equilíbrio de um corpo rígido, conclui-se que estas 3 forças devem ser concorrentes. Como as reações devem pertencer aos respectivos cones de atrito, para que haja equilíbrio, o ponto de concorrência das 3 forças deve estar na região comum a ambos os cones, delimitadas na seção transversal à área hachurada contida na intersecção dos ângulos de atrito θ_A e θ_B . Assim, a carga P somente pode ser aplicada entre os pontos C e D da faca conforme indicado na figura; caso contrário, ocorrerá escorregamento.

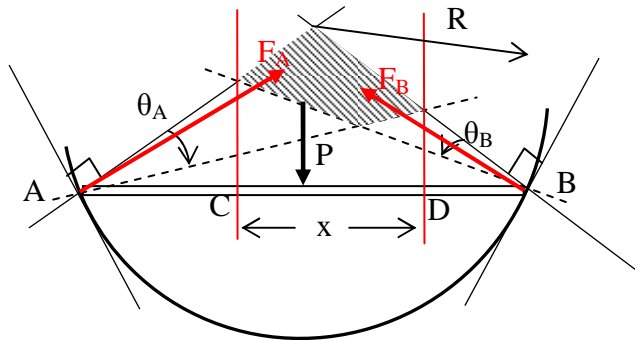


Figura 9: equilíbrio da barra sobre a tigela esférica

QUESTÃO 7: explique o significado de cada um dos termos da equação do eixo central de um sistema de forças (\vec{F}_i, P_i) na forma vetorial.

Solução: A equação do eixo central de um sistema de forças é, na forma vetorial:

$$E = O + \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R}, \text{ onde}$$

O: pólo genérico de redução do sistema de forças;

E: ponto genérico do eixo central;

\vec{R} : resultante do sistema de forças;

\vec{M}_O : momento do sistema de forças em relação ao pólo genérico O;

λ : escalar qualquer (real);

$\lambda \vec{R}$: vetor paralelo à resultante;

$O + \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2}$: distância mínima orientada desde o pólo genérico ao eixo central.