ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

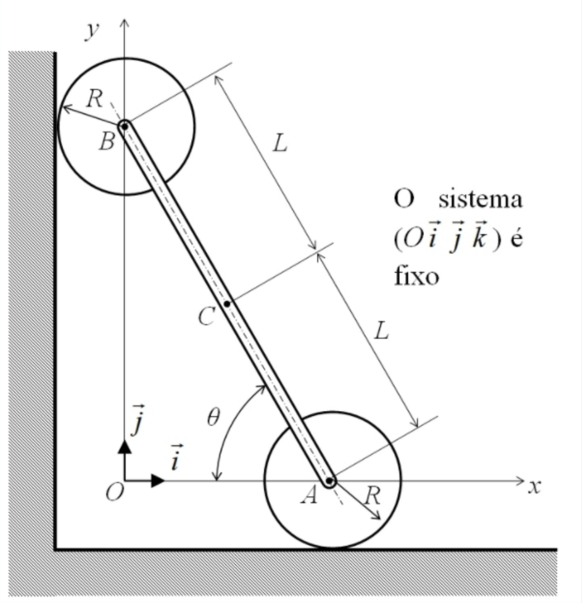
Departamento de Engenharia Mecânica

PME3100 Mecânica I
Primeira Prova – 08 de outubro de 2021
Duração: 2 horas e 20 minutos

Questão 1

Considere o movimento plano da barra *AB* mostrada no desenho, de comprimento 2*L*, e articulada sem atrito pelas suas extremidades aos centros de dois discos idênticos de raio *R*. Os discos mantêm contato com a respectiva superfície e rolam sem escorregar, de modo que o ponto *B* percorre o eixo *Oy* e o ponto *A* percorre o eixo *Ox*. O referencial fixo é o solo e sabe-se que o vetor de rotação da barra *AB* é $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, com $\omega > 0$ constante, a partir do instante inicial $t_0 = 0$, quando temos $\theta(t_0) = 90^o$. O sistema de coordenadas ($O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$) é fixo.

São dados: L = 2.2 m, R = 0.3 m, ω = 3 rad/s.



Ao preencher os campos das respostas:

- **Sempre que necessário, utilize ponto ('.') como separador decimal, em lugar de vírgula (',').**
- **Não deixe espaço em branco entre os caracteres. Em respostas com valor negativo, por exemplo, não separe o sinal de menos ('-') do número.**
- **Use o Sistema Internacional de Unidades.**

Para os itens (a) até (e) considere o sistema no instante inicial, quando a barra *AB* está na vertical ($\theta = 90^o$):

a - (0,5 ponto) Usando a propriedade fundamental da cinemática do corpo rígido, calcule a velocidade $\vec{v}_B$ do ponto *B*. **Use PONTO como separador.**

$\vec{v}_B =$ ☐ $\vec{i}$ + ☐ $\vec{j}$

b - (0,5 ponto) Localize o centro instantâneo de rotação (CIR) do disco de centro *A*. **Use PONTO como separador.**

$CIR_d =$ ☐ $\vec{i}$ + ☐ $\vec{j}$

c - (0,5 ponto) Localize o CIR da barra *AB*. **Use PONTO como separador.**

$CIR_{barra} =$ ☐ $\vec{i}$ + ☐ $\vec{j}$

d - (0,5 ponto) Determine o vetor de rotação $\vec{\Omega}_a$ do disco de centro *A*. **Use PONTO como separador.**

$\vec{\Omega} =$ ☐ $\vec{k}$

e - (0,5 ponto) Calcule a aceleração $\vec{a}_B$ do ponto *B* da barra *AB*. **Use PONTO como separador.**

$\vec{a}_B =$ ☐ $\vec{i}$ + ☐ $\vec{j}$

f - (0,5 ponto) No instante em que a barra *AB* está a 45º ($\theta = 45^o$), calcule a velocidade $\vec{v}_C$ do centro *C* da barra *AB*, expressando-a no sistema de coordenadas intrínseco. **Use PONTO como separador.**

$\vec{v}_C =$ ☐ $\vec{t}$ + ☐ $\vec{n}$

Solução

Instante inicial, quando a barra está na vertical ($\theta = 90^{o}$)**:**

a) O enunciado menciona que no instante inicial, $\vec{v}_A = v_A \vec{i}$, e a barra *AB* está na vertical. Usando a propriedade fundamental da cinemática do corpo rígido:
$\vec{v}_A \cdot (A-B) = \vec{v}_B \cdot (A-B) \Rightarrow v_A \vec{i} \cdot 2L\vec{j} = \vec{v}_B \cdot 2L\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_B \cdot 2L\vec{j} = 0$

Ou seja, ou $\vec{v}_B$ é perpendicular a $\vec{j}$, ou $\vec{v}_B = \vec{0}$. Mas como o disco de centro *B* mantém contato com a parede, então, necessariamente, $\boxed{\vec{v}_B = \vec{0}}$.

b) Como não há escorregamento, o CIR do disco de centro *A* é o seu ponto de contato com o solo. No instante inicial, as coordenadas desse ponto são, pela observação da figura, $\boxed{(CIR_d - O) = -R\vec{j}}$.

c) Do item (a), como $\vec{v}_B = \vec{0}$, então o ponto *B* é o CIR da barra *AB*, $\boxed{(CIR_{barra} - O) = 2L\vec{j}}$.

d) Ponto *A* da barra: $\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A-B) = \omega\vec{k} \wedge 2L(-\vec{j}) \Rightarrow \vec{v}_A = \omega 2L\vec{i}$

Ponto *A* do disco: $\vec{v}_A = \vec{\Omega}_a \wedge R\vec{j} = \Omega_a \vec{k} \wedge R\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_A = -\Omega_a R\vec{i}$

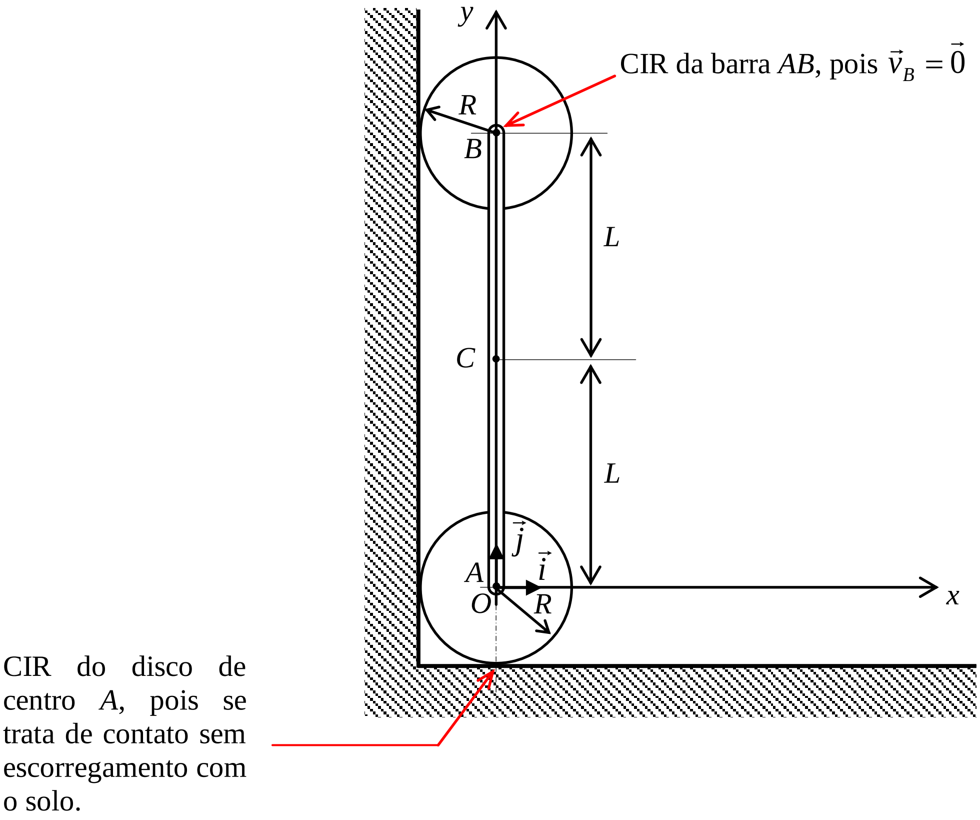
Comparando: $-\Omega_a R = \omega 2L \Rightarrow \Omega_a = -\dfrac{2L}{R}\omega \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega}_a = -\dfrac{2L}{R}\omega\vec{k}}$

e) As coordenadas do ponto *B* são $(0, 2L\mathrm{sen}\theta, 0)$. Portanto, a velocidade do ponto *B* é:

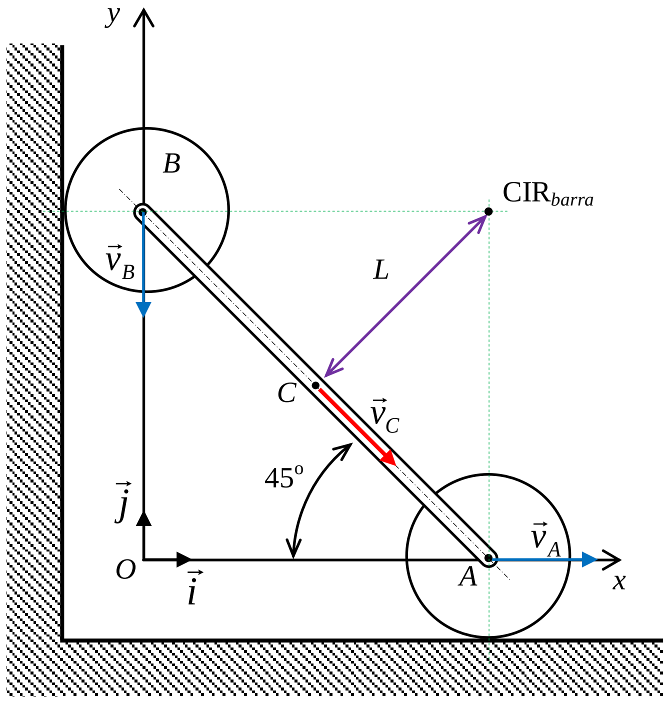
$\vec{v}_B = \dfrac{d}{dt}(2L\mathrm{sen}\theta)\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_B = 2L\dot{\theta}\cos\theta\vec{j}$

Calculando a aceleração: $\vec{a}_B = \dfrac{d}{dt}(2L\dot{\theta}\cos\theta)\vec{j} \Rightarrow \vec{a}_B = -2L\dot{\theta}^2\mathrm{sen}\theta\vec{j} \Rightarrow \vec{a}_B = -2L\omega^2\mathrm{sen}\theta\vec{j}$

Para a posição em que a barra está na vertical ($\theta = 90^{o}$): $\boxed{\vec{a}_B = -2L\omega^2\vec{j}}$



Instante em que a barra está a 45º ($\theta = 45^o$)**:**



f) Sabendo do enunciado que $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, temos, diretamente da figura, que:

$$\vec{v}_C = \omega L\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

Em coordenadas intrínsecas, por definição, o versor tangente $\vec{t}$ tem a direção e o sentido da velocidade.

$$\vec{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

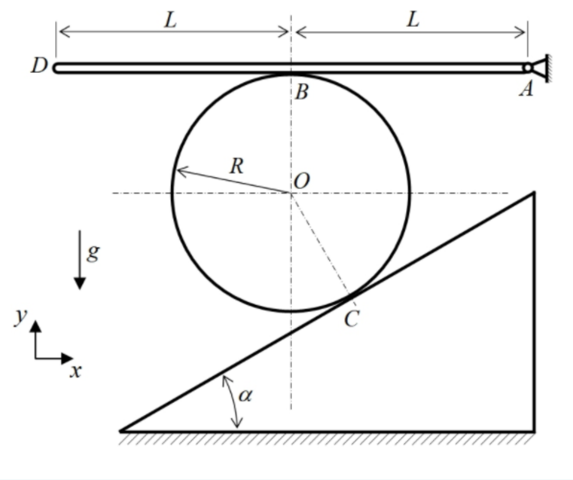
Portanto, temos que:

$$\boxed{\vec{v}_C = \omega L\vec{t}}$$

Questão 2

A figura mostra uma barra homogênea de comprimento 2*L* e massa *m* apoiada sobre um disco de massa *M* e raio *R* que se encontra apoiado no plano inclinado de um ângulo α em relação à horizontal; o vínculo em *A* é uma articulação, o plano inclinado é fixo e o sistema está em equilíbrio estático. O coeficiente de atrito é o mesmo nos pontos de contato *B* e *C*; os vetores devem ser expressos no sistema de coordenadas de eixos (*x*,*y*) de versores ($\vec{i}$, $\vec{j}$), respectivamente, indicado na figura.

São dados: m = 3 kg, M = 8 kg, α = 45 ^{o}, g = 10 m/s^2.



Ao preencher os campos das respostas:

- **Sempre que necessário, utilize ponto ('.') como separador decimal, em lugar de vírgula (',').**
- **Não deixe espaço em branco entre os caracteres. Em respostas com valor negativo, por exemplo, não separe o sinal de menos ('-') do número.**
- **Use o Sistema Internacional de Unidades.**

Determine:

a - (0,5 ponto) A reação vincular no ponto *A* da barra. **Use PONTO como separador.**

$\vec{R}_A =$ ______ $\vec{i}$ + ______ $\vec{j}$

b - (0,5 ponto) A força de atrito aplicada no disco pela barra no ponto *B*. **Use PONTO como separador.**

$\vec{F}_{atB} =$ ______ $\vec{i}$ + ______ $\vec{j}$

c - (0,5 ponto) A força normal aplicada no disco pela barra no ponto *B*. **Use PONTO como separador.**

$\vec{N}_B =$ ______ $\vec{i}$ + ______ $\vec{j}$

d - (0,5 ponto) A força de atrito aplicada no disco pelo plano inclinado no ponto *C*. **Use PONTO como separador.**

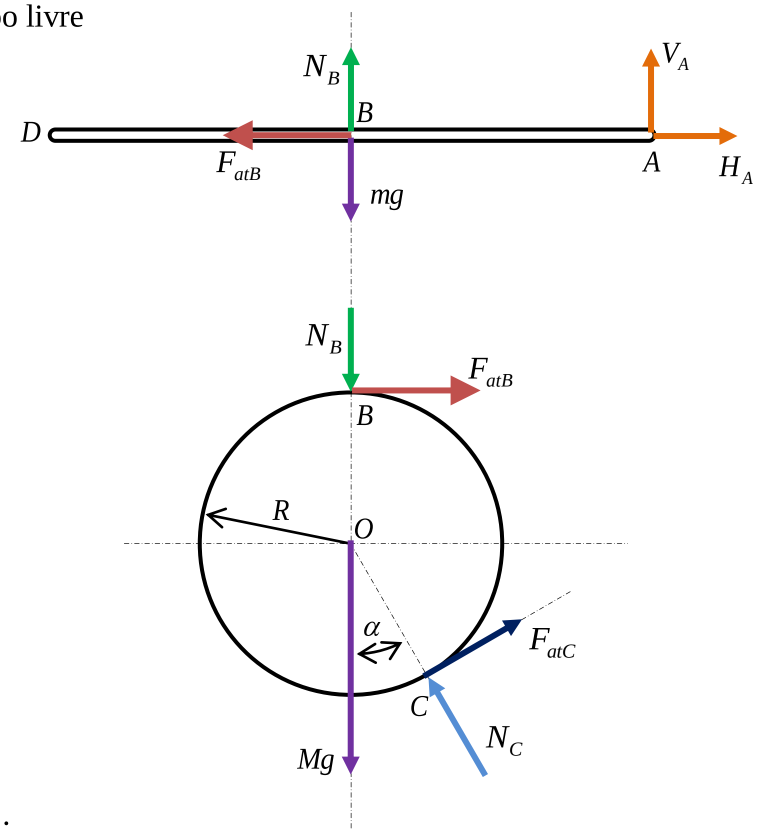
$\vec{F}_{atC} =$ ______ $\vec{i}$ + ______ $\vec{j}$

e - (1,0 ponto) O valor mínimo do coeficiente de atrito para que não ocorra escorregamento no contato em *B*. **Use PONTO como separador.**

$\mu_{min} =$ ______

Solução

Diagramas de corpo livre



Equilíbrio da barra:

$$M_{Az} = 0 \Rightarrow mg \cdot L - N_B \cdot L = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B = mg$$

$$\boxed{\vec{N}_B = 0\vec{i} - mg\,\vec{j}}$$

$$R_x = 0 \Rightarrow H_A - F_{atB} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = F_{atB}$$

$$R_y = 0 \Rightarrow N_B - mg + V_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 0$$

Equilíbrio do disco:

Polo O

$$M_{Oz} = 0 \Rightarrow F_{atB} \cdot R - F_{atC} \cdot R = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{atB} = F_{atC}$$

Polo C

$$M_{Cz} = 0 \Rightarrow (M+m)g \cdot R\operatorname{sen}\alpha - F_{atB} \cdot (R + R\cos\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{atB} = \frac{(M+m)g \cdot \operatorname{sen}\alpha}{(1+\cos\alpha)}$$

$$\Rightarrow \quad H_A = \frac{(M+m)g \cdot \operatorname{sen}\alpha}{(1+\cos\alpha)}$$

$$\boxed{\vec{R}_A = \frac{(M+m)g \cdot \operatorname{sen}\alpha}{(1+\cos\alpha)}\vec{i} + 0\vec{j}}$$

$$\Rightarrow \quad F_{atC} = \frac{(M+m)g \cdot \operatorname{sen}\alpha}{(1+\cos\alpha)}$$

$$\boxed{\vec{F}_{atB} = \frac{(M+m)g \cdot \operatorname{sen}\alpha}{(1+\cos\alpha)}\vec{i} + 0\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{atC} = \frac{(M+m)g \cdot \operatorname{sen}\alpha}{(1+\cos\alpha)}\cos\alpha\,\vec{i} + \frac{(M+m)g \cdot \operatorname{sen}\alpha}{(1+\cos\alpha)}\operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}}$$

Para que não haja escorregamento no ponto B, é preciso observar a seguinte condição:

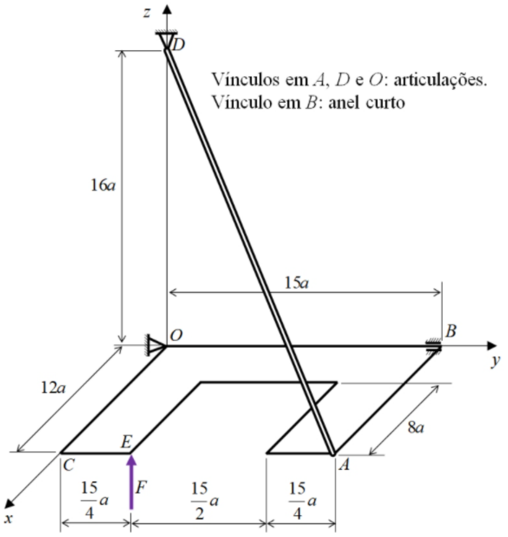
$$F_{atB} \le \mu N_B$$

$$\frac{(M+m)g \cdot \operatorname{sen}\alpha}{(1+\cos\alpha)} \le \mu mg \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{(M+m)\operatorname{sen}\alpha}{m(1+\cos\alpha)}$$

$$\boxed{\mu_{mín} = \frac{(M+m)\operatorname{sen}\alpha}{m(1+\cos\alpha)}}$$

Questão 3

A figura mostra uma placa feita de material homogêneo, de espessura desprezível. Essa placa está contida no plano *Oxy*, apoiada numa articulação em *O*, num anel em *B* e pela barra *AD*, articulada nas duas extremidades. O ponto *D* está no eixo *Oz*. A placa está sujeita a uma força $\vec{F} = F\vec{k}$ aplicada no vértice *E*.



a - (1,0 ponto) Determine a posição do centro de massa G da placa, usando o sistema de coordenadas mostrado na figura.

Considerando que os pesos da barra e da placa são desprezíveis em comparação com a força aplicada no ponto E:

b - (1,0 ponto) Desenhe o diagrama de corpo livre da placa.

c - (1,0 ponto) Determine a força Q que atua na barra AD, especificando se se trata de tração ou compressão.

d - (1,0 ponto) Calcule as reações vinculares em O e B.

Resolva a questão preferencialmente em folha A4 (sem linhas) e com letra legível. A solução deve ser digitalizada e salva em um único arquivo no formato PDF. Este arquivo deve ser submetido na tarefa respectiva do Moodle.

ATENÇÃO: Somente serão aceitos arquivos no formato PDF. Procure obter boa qualidade de imagem e bom contraste para não prejudicar sua nota na correção.

Solução

a) Usando a propriedade de concentração de massas:

$$x_G = \frac{15a \cdot 12a \cdot 6a - \frac{15}{2}a \cdot 8a \cdot 8a}{15a \cdot 12a - \frac{15}{2}a \cdot 8a} \Rightarrow \boxed{x_G = 5a}$$

$$\boxed{y_G = \frac{15}{2}a} \quad \text{(por simetria)}$$

$$\boxed{z_G = 0} \quad \text{(a placa está no plano } Oxy\text{, e a espessura é desprezível)}$$

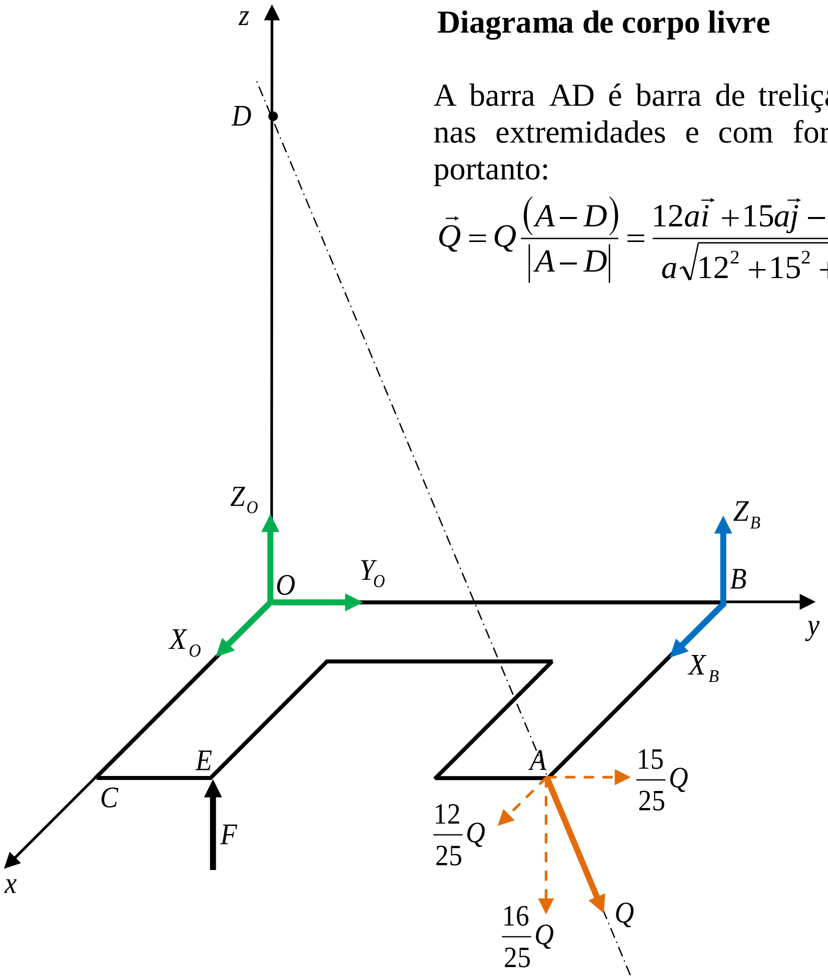
Ou $\boxed{(G - O) = 5a\vec{i} + \frac{15}{2}a\vec{j}}$

b)

Diagrama de corpo livre

A barra AD é barra de treliça (massa desprezível, articulada nas extremidades e com forças apenas nas extremidades), portanto:

$$\vec{Q} = Q\frac{(A-D)}{|A-D|} = \frac{12a\vec{i} + 15a\vec{j} - 16a\vec{k}}{a\sqrt{12^2+15^2+16^2}}Q = \frac{12\vec{i} + 15\vec{j} - 16\vec{k}}{25}Q$$



c)

$$M_{Oy} = 0 \Rightarrow \frac{16}{25}Q\cdot 12a - F\cdot 12a = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{25}{16}F}$$

a barra *AD* está sendo comprimida

d)

$$R_x = 0 \Rightarrow X_B + X_O + \frac{12}{25}Q = 0 \Rightarrow X_B + X_O + \frac{3}{4}F = 0 \qquad (1)$$

$$R_y = 0 \Rightarrow Y_O + \frac{15}{25}Q = 0 \Rightarrow Y_O + \frac{15}{16}F = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y_O = -\frac{15}{16}F} \qquad (2)$$

$$R_z = 0 \Rightarrow F + Z_B + Z_O - \frac{16}{25}Q = 0 \Rightarrow F + Z_B + Z_O - F = 0 \qquad (3)$$

$$M_{Ox} = 0 \Rightarrow F\cdot\frac{15}{4}a - \frac{16}{25}Q\cdot 15a + Z_B\cdot 15a = 0 \Rightarrow F\cdot\frac{15}{4}a - F\cdot 15a + Z_B\cdot 15a = 0 \Rightarrow \boxed{Z_B = \frac{3}{4}F} \qquad (4)$$

$$M_{Oz} = 0 \Rightarrow -X_B\cdot 15a + \frac{15}{25}Q\cdot 12a - \frac{12}{25}Q\cdot 15a = 0 \Rightarrow -X_B + \frac{12}{16}F - \frac{12}{16}F = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_B = 0} \qquad (5)$$

Substituindo (5) em (1):

$$\boxed{X_O = -\frac{3}{4}F}$$

Substituindo (4) em (3):

$$\boxed{Z_O = -\frac{3}{4}F}$$