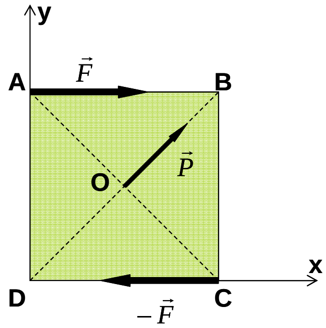
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Primeira Prova – 11 de setembro de 2007

1ª Questão (3,0 pontos) Sobre a placa quadrada ABCD, de centro em O e lado 2a, representada na figura, age o sistema S_1 formado pelas forças $(\vec{F}, A)$, $(-\vec{F}, C)$ e $(\vec{P}, O)$. Nessas condições:

a) Calcular a resultante do sistema de forças S_1;
b) Calcular o momento do sistema S_1 em relação ao polo O;
c) Determinar um pólo para o qual o momento de S_1 seja nulo;
d) Construir um sistema de forças S_2 equivalente a S_1, aplicando sua resultante em C.



a) $\vec{F} = F\vec{i}$ e $\vec{P} = P.(\sqrt{2}/2).(\vec{i}+\vec{j})$ (0,5)

$$\vec{R}_1 = \sum\left[F\vec{i} - F\vec{i} + P.(\sqrt{2}/2).(\vec{i}+\vec{j})\right] = P.(\sqrt{2}/2).(\vec{i}+\vec{j})$$

b) $\vec{M}_{O,S1} = (A-O)\wedge\vec{F} + (C-O)\wedge(-\vec{F}) = -2a.F.\vec{k}$ (0,5)

c) $\vec{M}_{E,S1} = \vec{0} = \vec{M}_{O,S1} + (O-E)\wedge\vec{R}_1$

onde:

$E = (x_E, y_E, z_E)$ e $O = (a, a, 0)$ $\Rightarrow (O-E) = \left((a-x_E),(a-y_E),(-z_E)\right)$

$$\vec{M}_{E,S1} = \vec{0} = -2a.F.\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (a-x_E) & (a-y_E) & (-z_E) \\ P.\sqrt{2}/2 & P.\sqrt{2}/2 & 0 \end{vmatrix} = -2a.F.\vec{k} + P.(\sqrt{2}/2).\left[z_E\vec{i} - z_E\vec{j} + (-x_E + y_E)\vec{k}\right]$$

$z_E = 0$ e $(-x_E + y_E).P.\sqrt{2}/2 - 2a.F = 0$ representa a reta no plano (0,x,y) que passa pelo ponto

$z_E = 0$; $x_E = 0$ $y_E = 2a\sqrt{2}.(F/P)$

A reta é paralela à diagonal BD. (1,0)

c) S_2 é um sistema composto por: uma força $(\vec{R}_2, C) \rightarrow \vec{R}_2 = \vec{R}_1 = P.(\sqrt{2}/2).(\vec{i}+\vec{j})$

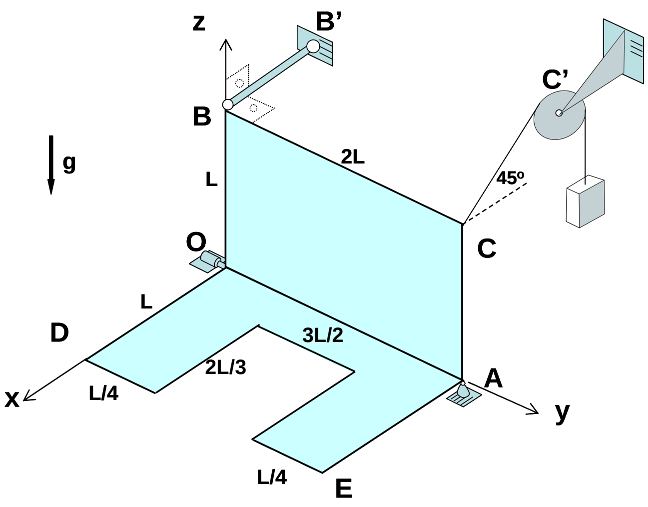
e um binário $\vec{M}_{bin}$ de modo que:

$\vec{M}_{O,S2} = \vec{M}_{bin} + (C-O)\wedge\vec{R}_2$;

$(C-O) = (a, -a, 0)$ e

$\vec{M}_{O,S2} = \vec{M}_{O,S1} = -2a.F.\vec{k}$

$$\vec{M}_{bin} = -2a.F.\vec{k} - (C-O)\wedge\vec{R} = -2a.F.\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & +a & 0 \\ P.\sqrt{2}/2 & P.\sqrt{2}/2 & 0 \end{vmatrix} = (-2.F - P\sqrt{2}).a.\vec{k}$$ (1,0)



2ª Questão (3,5 pontos) Uma placa homogênea, com densidade superficial ρ (kg/m^2) está dobrada em forma de uma cantoneira (ACBODE) conforme indicado na figura. A cantoneira está articulada no ponto A, vinculada a um anel em O, presa em B a uma barra bi-articulada e suspensa em C por um fio. O fio suporta uma carga de massa $\underline{m}$ (kg) por meio de uma polia de peso desprezível, que se encontra em um plano vertical paralelo ao plano Oxz. Pede-se determinar:

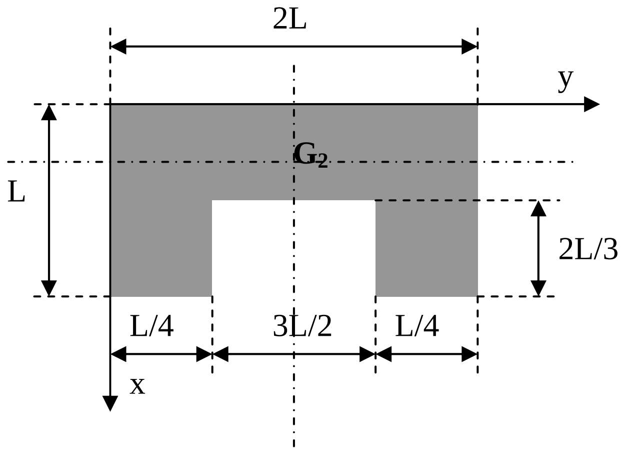
a) As coordenadas do baricentro da porção horizontal da cantoneira;

b) O diagrama de corpo livre da cantoneira;

c) As forças que atuam no fio e na barra, bem como as reações vinculares nos pontos A e O;

d) A relação entre m e ρ para que a força na barra seja nula.

a) Seja G_2 o baricentro da porção horizontal da cantoneira:



Por causa da simetria da figura em relação ao eixo vertical, resulta que: $\boxed{Y_{G2} = L}$.

Utilizando-se, a seguir, a propriedade associativa do baricentro obtém-se:

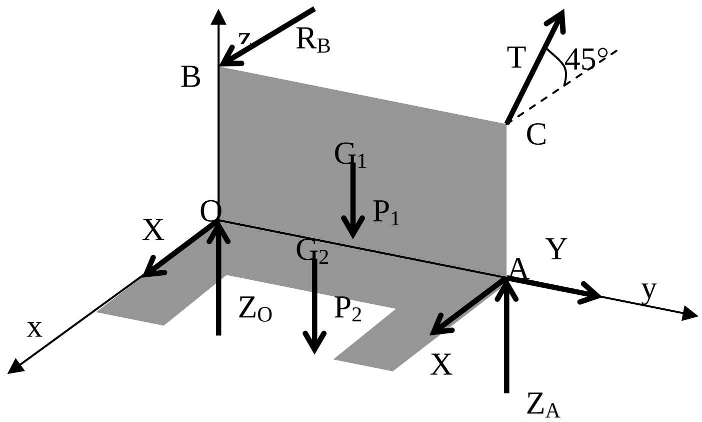
$$\boxed{X_{G_2} = \frac{2L \cdot L \cdot \frac{L}{2} + \left(-\frac{2L}{3} \cdot \frac{3L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2L}{3}\right)}{2L \cdot L + \left(-\frac{2L}{3} \cdot \frac{3L}{2}\right)} = \frac{L}{3}}$$

Portanto, a posição do baricentro da aba horizontal da cantoneira, relativamente à origem O do sistema de referência escolhido, é dada por:

$$\boxed{(G_2 - O) = \frac{L}{3}\vec{i} + L\vec{j}}$$

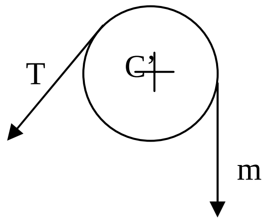
(1,0)

b) Diagrama de corpo livre da cantoneira:



(1,0)

c) Diagrama de corpo livre da polia:



Do equilíbrio da polia, deduz-se que: T = mg

Logo $\boxed{\vec{T} = mg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right)}$

Por outro lado, a barra BB' está em equilíbrio sob a ação de apenas duas forças aplicadas em suas extremidades. Logo, essas forças têm mesma linha de ação, mesmo módulo e sentidos opostos, ou seja:

$\vec{R}_B = R_B\vec{i}$

O anel em O resiste apenas a forças nas direções x e z. Logo:

$\vec{R}_O = X_O\vec{i} + Z_O\vec{k}$

A articulação em A resiste a forças nas direções x, y e z. Logo:

$\vec{R}_A = X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}$

Os pesos das porções vertical e horizontal da cantoneira são equivalentes a forças concentradas aplicadas em seus baricentros G_1 e G_2, respectivamente, que são dadas por:

$\vec{P}_1 = -2\rho g L^2 \vec{k}$ e $\vec{P}_2 = -\left(2L^2 - \frac{2L}{3} \cdot \frac{3L}{2}\right)\rho g \vec{k} = -L^2 \rho g \vec{k}$

Para facilitar os próximos cálculos, montamos a tabela a seguir:

Força		**Ponto de aplicação**
$\vec{P}_1, G_1$	$-2\rho g L^2 \vec{k}$	$L\vec{j} + \frac{L}{2}\vec{k}$
$\vec{P}_2, G_2$	$-\rho g L^2 \vec{k}$	$\frac{L}{3}\vec{i} + L\vec{j}$
$\vec{T}, C$	$mg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right)$	$2L\vec{j} + L\vec{k}$
$\vec{R}_A, A$	$X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}$	$2L\vec{j}$
$\vec{R}_O, O$	$X_O\vec{i} + Z_O\vec{k}$	$\vec{0}$
$\vec{R}_B, B$	$R_B\vec{i}$	$L\vec{k}$

Finalmente, aplicamos as equações de equilíbrio da Estática:

$\sum \vec{F}_i = \vec{0}$ e $\sum \vec{M}_{O_i} = \vec{0}$

Igualando a resultante a zero, obtemos:

$$-2\rho g L^2 \vec{k} - \rho g L^2 \vec{k} - mg\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + mg\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} + X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k} + X_O\vec{i} + Z_O\vec{k} + R_B\vec{i} = \vec{0}$$

de onde resultam as equações:

$$\begin{cases} X_A + X_O + R_B = mg\frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y_A = 0 \\ Z_A + Z_O = 3\rho g L^2 - mg\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Igualando a zero a resultante dos momentos em relação ao pólo O, obtemos:

$$\left(L\vec{j} + \frac{L}{2}\vec{k}\right) \wedge \left(-2\rho g L^2 \vec{k}\right) + \left(\frac{L}{3}\vec{i} + L\vec{j}\right) \wedge \left(-\rho g L^2 \vec{k}\right) + \left(2L\vec{j} + L\vec{k}\right) \wedge mg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right) + L\vec{k} \wedge R_B\vec{i} +$$
$$2L\vec{j} \wedge \left(X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}\right) = \vec{0}$$

Desenvolvendo a equação acima, resulta:

$$\begin{cases} 2LZ_A + L\sqrt{2}mg - 3\rho g L^3 = 0 \\ LR_B - L\dfrac{\sqrt{2}}{2}mg + \dfrac{\rho g L^3}{3} = 0 \\ -2LX_A + \sqrt{2}Lmg = 0 \end{cases}$$

Portanto, obtém-se:

$$Z_A = \rho g \frac{3L^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

$$X_A = \frac{\sqrt{2}}{2}mg \qquad \text{(II)}$$

$$R_B = \frac{\sqrt{2}}{2}mg - \rho g \frac{L^2}{3}$$

Substituindo-se (II) em (I) obtém-se:

$$X_O = \rho g \frac{L^2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

$$Z_O = \rho g \frac{3L^2}{2}$$

Portanto, as reações vinculares, são:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{R}_A &= \frac{\sqrt{2}}{2}mg\vec{i} + \left(\rho g \frac{3L^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}mg\right)\vec{k} \\ \vec{R}_B &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}mg - \rho g \frac{L^2}{3}\right)\vec{i} \\ \vec{R}_O &= \left(\rho g \frac{L^2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}mg\right)\vec{i} + \rho g \frac{3L^2}{2}\vec{k} \end{aligned}}$$

A força de tração no fio é:

$$\boxed{\vec{T} = mg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right)}$$

A força atuante na barra BB’, a partir do ponto B, é dada por:

$$\boxed{\vec{F}_{BB'} = -\vec{R}_B = \left(\rho g \frac{L^2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} mg\right)\vec{i}} \qquad (1,0)$$

d) Para que FBB’ seja nula deve-se ter, portanto:

$$\rho \frac{L^2}{3} g - \frac{\sqrt{2}}{2} mg = 0$$

ou seja:

$$\boxed{\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2L^2} m} \qquad (0,5)$$

3ª Questão (3,5 pontos) A estrutura da figura é formada por quatro barras bi-articuladas com pesos desprezíveis e está submetida a uma força vertical Q. Pede-se calcular:

a) As reações vinculares em A e D ;

b) As forças que atuam nas barras, indicando se são forças de tração ou de compressão.

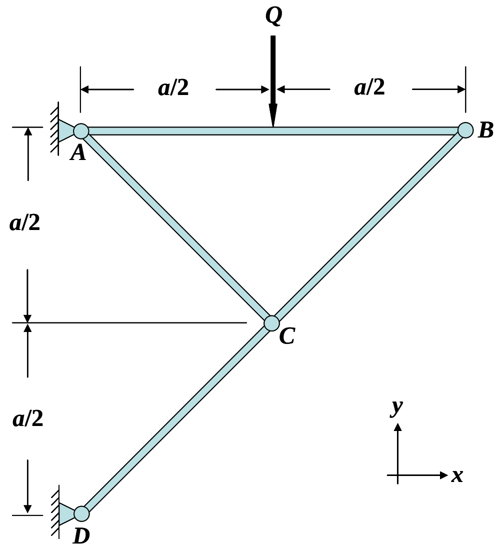
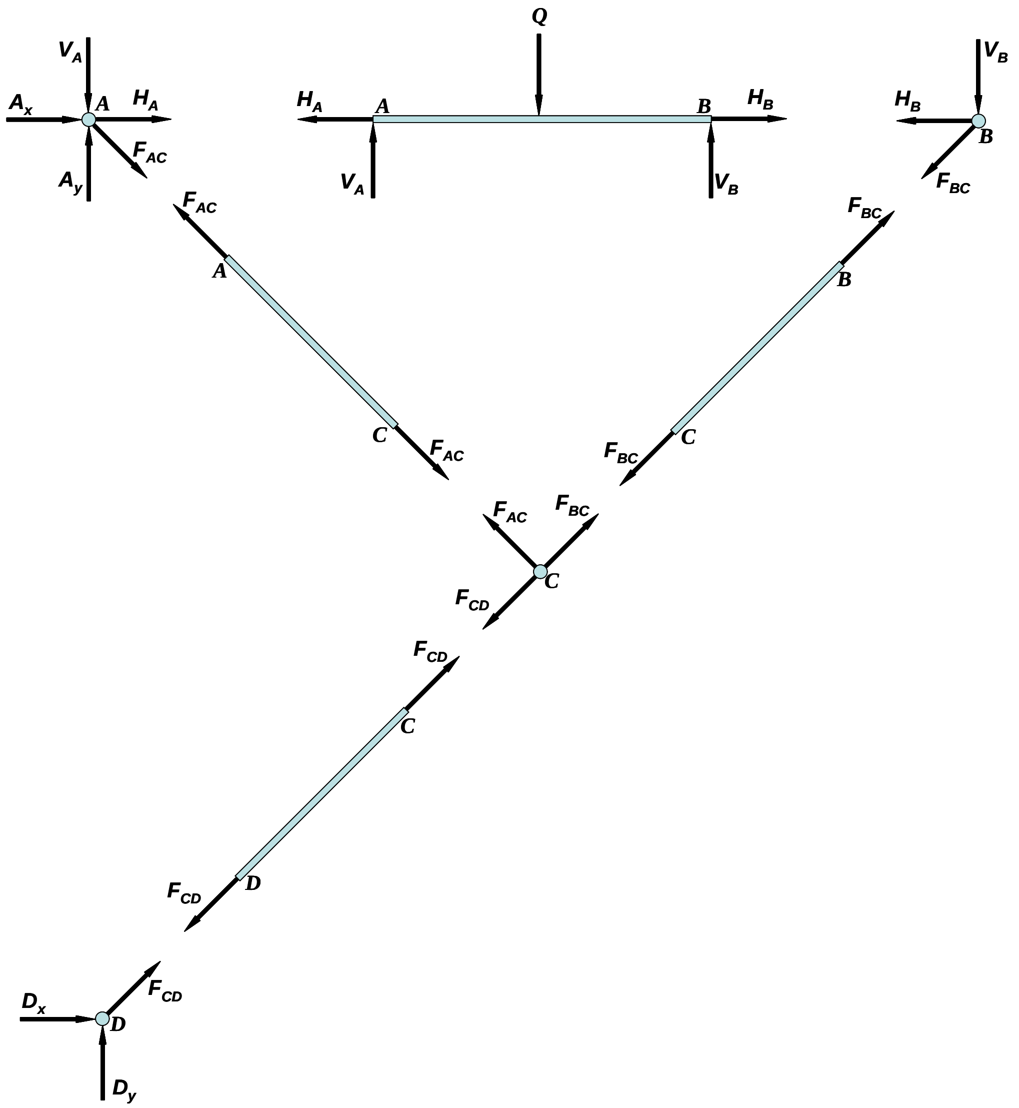


Diagrama de corpo livre:



Equações de equilíbrio:

- Barra AB : $\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - H_B = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - Q = 0 \\ \sum M_{Az} = 0 \Rightarrow -Q\dfrac{a}{2} + V_B\, a = 0 \end{cases}$

- Nó A: $\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + H_A + F_{AC}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - V_A - F_{AC}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$

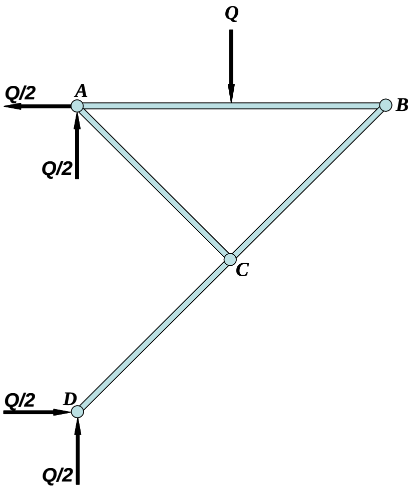
- Nó B: $\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow -H_B - F_{BC}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow -V_B - F_{BC}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$

- Nó C: $\begin{cases} F_{AC} = 0 \\ F_{BC} = F_{CD} \end{cases}$

- Nó D: $\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow D_x + F_{CD}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow D_y + F_{CD}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$

Reações vinculares:

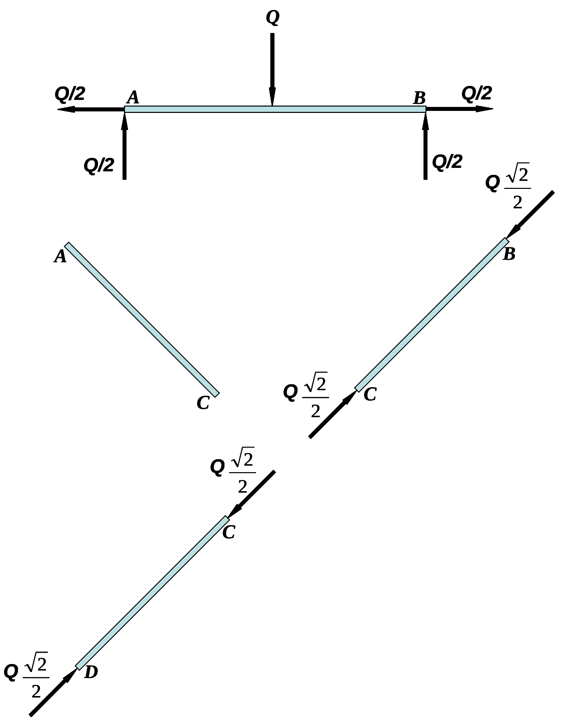
$\boxed{A_x = -\dfrac{Q}{2}}$; $\boxed{A_y = \dfrac{Q}{2}}$; $\boxed{D_x = \dfrac{Q}{2}}$ e $\boxed{D_y = \dfrac{Q}{2}}$



Forças nas barras: (2,0)

$\boxed{H_A = \frac{Q}{2}}$; $\boxed{H_B = \frac{Q}{2}}$; $\boxed{V_A = \frac{Q}{2}}$; $\boxed{V_B = \frac{Q}{2}}$;

$\boxed{F_{AC} = 0}$; $\boxed{F_{BC} = -Q\frac{\sqrt{2}}{2}}$ e $\boxed{F_{CD} = -Q\frac{\sqrt{2}}{2}}$



(1,5)