**Exercícios de Fundamentos de Controle Estatístico de Processos**

1. Em uma linha de empacotamento de leite, se medirmos o volume de cada saquinho, vamos descobrir que nenhum deles contém exatamente uma mesma quantidade de leite. É lógico que, para fins de comercialização, pouco importa se um saquinho contém um pouco mais ou um pouco menos de leite do que o valor especificado. No entanto, existem restrições que devem ser respeitadas: se o “pouco a mais” de leite não for assim tão pouco, facilmente o saquinho estourará antes de chegar às mãos do consumidor; se, por outro lado, o “pouco a menos” não for assim tão pouco, o produtor poderá perder clientes e mesmo ser multado. Assim, a especificação determina que cada saquinho contenha 1.000 ml de leite; na prática, contudo, o que se espera é que a média dos volumes dos saquinhos fique em torno do valor especificado de 1.000 ml, e que não exista grande variabilidade entre esses volumes. O valor especificado de 1.000 ml é o **valor-alvo** da **variável aleatória *X***, quantidade de leite em cada saquinho. A Tabela a seguir apresenta a quantidade de leite de 100 saquinhos de um mesmo lote.



* 1. Calcule a Média Amostral.
	2. Calcule o Desvio-Padrão Amostral.
	3. Desenhe um Histograma da Distribuição de *X*. O que se pode concluir sobre o comportamento deste histograma?

Em nosso exemplo, variações de temperatura e densidade do leite e a precisão intrínseca do mecanismo que “corta” o fluxo do leite para o saquinho são algumas das causas aleatórias de variabilidade do processo. O efeito conjunto de todas pequenas perturbações deixa de ser desprezível e passa a ser o responsável pela variabilidade natural do processo: uma **variabilidade inevitável (natural)**, com a qual é preciso conviver.

Quanto às **causas especiais**, são sempre possíveis de eliminar ou reduzir; certos casos, contudo, demandam correções significativas no processo. Tomemos como exemplo de causa especial uma alteração indesejada da pressão de operação nas tubulações do sistema de empacotamento de leite.

1. A Tabela a seguir apresenta a quantidade de leite de 100 saquinhos de um mesmo lote, extraído do processo após uma alteração da pressão de operação.



* 1. Calcule a Média Amostral.
	2. Calcule o Desvio-Padrão Amostral.
	3. Desenhe um Histograma da Distribuição de *X*. . O que se pode concluir sobre o comportamento deste histograma?

Os processos devem ser permanentemente monitorados, para detectar a presença de causas especiais. Detectada essa presença, deve-se proceder a uma investigação para identificar a(s) causa(s) especial(is) e intervir para eliminá-la(s).

A principal ferramenta utilizada para monitorar os processos e sinalizar a presença de causas especiais são os **gráficos de controle** $\overbar{X}$ e $R$, também conhecidos como gráficos da média e da amplitude. Exemplos são: o diâmetro de um eixo, o teor de carbono em uma liga metálica, a concentricidade de um cilindro, o volume de leite de um saquinho, etc.

1. No processo de empacotamento de leite, o volume *X* do produto em cada saquinho deve ser permanentemente monitorado para evitar a ocorrência de excessos (que aumentam o risco de os saquinhos estourarem durante o manuseio e o transporte) ou de falta (que leva ao risco de a empresa ser multada). O monitoramento é realizado através da análise periódica de amostras: a cada intervalo de tempo h retira-se uma amostra de n itens para análise. Por exemplo, a cada meia hora de produção (h = 30 min.), selecionam-se, aleatoriamente, cinco saquinhos (n = 5), cujos volumes são medidos. Para cada amostra, deve ser calculada a média $\overbar{X}$ dos valores medidos e a amplitude amostral 𝑹 (diferença entre o maior e o menor valores da amostra). Os valores $\overbar{X}$ e 𝑹 das diversas amostras podem ser marcados, respectivamente, nos gráficos da média e da amplitude. A quantidade de leite dos saquinhos de 15 amostras foram anotadas na Tabela a seguir.



1. Calcule a Média de cada amostra ($\overbar{X}\_{i}$).
2. Calcule a Amplitude ($R\_{i}$) de cada amostra.
3. Construa gráficos de controle para os valores de $\overbar{X}$ e $R$. Considere os seguintes limites de controle: Para $\overbar{X}$, LIC = 994,00; LM = 1.000,00; e LSC = 1.006,00. Para $R$, LIC = 0,00; LM = 10,50; e LSC = 22,21.
4. Decida sobre a necessidade de intervenção no Processo.
5. No exemplo do processo de enchimento de saquinhos de leite, podemos estudar o processo medindo o volume *X* de um saquinho a cada 15minutos de produção. A Tabela a seguir apresenta os valores medidos de cada saquinho de leite (variável *X*) em ordem cronológica (ler de cima para baixo, da esquerda para a direita).



1. O que podemos concluir com relação ao comportamento da variável aleatória *X*?
2. Procure separar intervalos de tempos nos quais o processo apresente grupos diferentes de comportamentos (4 intervalos). Se fosse possível “fotografar” a distribuição de *X* nesses diferentes intervalos, procure representar na Figura a seguir como seriam representadas essas distribuições (apenas visualmente, de forma aproximada).



1. Construa um diagrama de causa-e-efeito (espinha de peixe ou Ishikawa) para estudar formas de melhorar a qualidade do processo e reduzir fontes especiais de variabilidade.
2. Com as potenciais causas levantadas no item anterior, o próximo passo consiste em eliminar as causas especiais presentes no processo. Construa uma tabela com a lista de causas especiais levantadas e possíveis medidas corretivas e/ou preventivas para a melhoria da qualidade do processo.
3. Considere que, com a melhoria do processo anteriormente proposta, uma nova sequência de medição dos valores de *X* agora apresenta o seguinte comportamento (ver Tabela). Quais conclusões podem ser tiradas com relação ao ajuste do processo com relação à média e com relação à estabilidade do processo com relação à sua variabilidade?



Reconsidere os dados iniciais do exercício 1. Tabela a seguir:



A partir dos dados anteriores de volume de 100 saquinhos de leite, podemos considerar o processo em controle, ou seja, o processo estável e ajustado no alvo (ou próximo dele). O histograma construído no exercício 1, com as 100 observações desta Tabela, leva-nos a admitir que que a distribuição de frequências dos valores de *X* ajusta-se muito bem a uma distribuição normal.

Se pudéssemos sempre ter certeza absoluta de que o processo permaneceu em controle durante todo o intervalo de tempo em que foram retiradas as amostras, bastaria adotar $\overbar{X}$ (média aritmética de todos os valores de ***X*** coletados) como estimativa de μ, e S2 como estimativa da variância σ2. Na prática, contudo, nunca se sabe se durante a produção dos itens dos quais se obtiveram os valores da característica de qualidade *X* o processo realmente permaneceu isento de causas especiais. Para lidar com essa questão, foi desenvolvido o conceito de **Subgrupos Racionais**, que preconiza a retirada de pequenas amostras a intervalos de tempos regulares.

No caso dos saquinhos de leite, ao invés de retirarem os 100 saquinhos de uma só vez, retiram-se amostras menores, distanciadas no tempo; por exemplo, uma amostra de 4 ou 5 saquinhos a cada meia hora.

Cada amostra ou **subgrupo racional** é constituído de unidades produzidas quase num mesmo instante; caso ocorra perturbação no processo em consequência de alguma causa especial (uma alteração na média, por exemplo), dificilmente ela ocorrerá durante a formação do subgrupo. Desse modo, minimiza-se a probabilidade de que uma amostra seja formada por elementos de diferentes populações.

No nosso exemplo, suponha que uma perturbação ocorra em um instante de tempo entre as retiradas de duas amostras, e que tal perturbação aumente a média do processo de 1.000 ml para 1.010 ml. Dentro de cada uma das amostras não haverá aumento de variabilidade, pois toda a distribuição de *X* se deslocará. Haverá, isso sim, aumento de variabilidade **entre** amostras, ou seja, os valores $\overbar{X}$ (médias dos valores de *X* de cada amostra) terão sua variabilidade aumentada. Portanto, a variância do processo deve ser estimada com base na dispersão dos valores **dentro** das amostras. Essa dispersão independe de possíveis alterações na média do processo.

1. Na Tabela a seguir, há valores da variável *X* em 8 subgrupos de tamanho 5 (*m* = 8 e *n* = 5). Por exemplo, *X*42 corresponde ao segundo valor de *X* do 4º subgrupo, ou seja, *X*42 = 1.002,1. Na 7ª coluna da Tabela ($\overbar{X}\_{i}$), estão os valores das médias dos subgrupos.



A média o *i*-ésimo subgrupo é dada por:

$$\overbar{X}\_{i}=\sum\_{j=1}^{n}\frac{X\_{ij}}{n}$$

A média das médias dos subgrupos (média global) é dada por:

$$̿=\sum\_{i=1}^{m}\frac{X\_{i}}{m}$$

O **estimador *S*A** considera as *m* amostras de *n* unidades como uma única grande amostra, com *mn* unidades. Ora, dada uma amostra aleatória de *N* valores {*y*1, *y*2, ..., *y*N} de uma variável aleatória *Y*, um estimador do desvio-padrão de *Y* é o *desvio-padrão amostral S*, dado por:

$S=\sqrt{\frac{\sum\_{i=1}^{N}(y\_{i}-\overbar{y})^{2}}{N-1}}$ onde $\overbar{y}=\frac{1}{N}×\sum\_{i=1}^{N}y\_{i}$

Esse estimador *S* é tendencioso, pois seu valor esperado é igual a $c\_{4}σ$, onde a constante c4 é função de *N*, o tamanho da amostra conforme a Tabela a seguir:



Nessa tabela, o tamanho da amostra considerada é chamado de *n*, minúsculo. Portanto, $^{S}/\_{c\_{4}}$ torna-se um estimador não tendencioso de σ.

Substituindo $y\_{i}$ por $X\_{ij}$, $\overbar{y}$ por $̿$, e $N$ por $mn$ (o tamanho da “grande amostra” que contém todas as observações), obtém-se a expressão:

$$S\_{A}=\frac{1}{c\_{4}}×\sqrt{\frac{\sum\_{i=1}^{m}\sum\_{j=1}^{n}(X\_{ij}-̿)^{2}}{mn-1}}$$

onde $X\_{ij}$é o *j*-ésimo elemento do *i*-ésimo subgrupo, *n*é o tamanho dos subgrupos, e *m* o número de subgrupos.

O **estimador *S*B** é baseado no desvio-padrão das médias dos subgrupos. *S*B é dado por:

$$S\_{B}=\frac{1}{c\_{4}}×\left[\sqrt{\frac{\sum\_{i=1}^{m}(\overbar{X}\_{i}-̿)^{2}}{m-1}}\right]×\sqrt{n}$$

O **estimador *S*C** é baseado nos desvios-padrão amostrais *S*i dos *m* subgrupos. *S*C é dado por:

$$S\_{C}=\frac{\overbar{S}}{c\_{4}}$$

O **estimador *S*D** é baseado na amplitude amostral *R*. *S*D é dado por:

$$S\_{D}=\frac{\overbar{R}}{d\_{2}}$$

1. Calcule SA.
2. Calcule SB.
3. Calcule SC.
4. Calcule SD.
5. Interprete os valores e decida qual deles usar (justifique).
6. Na Tabela a seguir, há valores da variável *X* em 8 subgrupos de tamanho 5 (*m* = 8 e *n* = 5).



1. Calcule e interprete o valor SA.
2. Calcule e interprete o valor SB.
3. Calcule e interprete o valor SC.
4. Calcule e interprete o valor SD.
5. Decida qual desses estimadores você pretende usar (justifique).
6. Compare os resultados desse exercício com o exercício anterior.