Métodos Estatísticos para a Melhoria da Qualidade

Disciplina: SEP-280
Qualidade Aplicada à Manufatura

Research Group Leaders:
Luiz C. R. Carpinetti, Associate Professor
Mateus C. Gerolamo, Assistant Professor

Inferência sobre a Qualidade do Processo

Inferência sobre a Qualidade do Processo

USO DOS VALORES *P* PARA O TESTE DE HIPÓTESE

Uso dos Valores *P* para o Teste de Hipótese

- A maneira tradicional de relatar o resultado de um teste de hipótese é afirmar que a hipótese nula foi ou não rejeitada ao **nível de significância** α especificado.

- Por exemplo, no problema anterior do teste de pressão de ruptura, podemos dizer que $H_0: \mu = 175$ foi rejeitada ao nível de significância de 0,05.

Uso dos Valores *P* para o Teste de Hipótese

- Essa declaração da conclusão é muitas vezes inadequada, porque ela não dá ao analista qualquer ideia se o valor das estatística de teste está bem próximo do limite da região crítica ou se está bem no interior dessa região.

- Além disso, apresentar os resultados dessa forma impõe, aos outros usuários da informação, o nível de significância pré-definido.

- Essa abordagem pode ser insatisfatória, uma vez que muitos tomadores de decisão podem se sentir desconfortáveis com o risco implícito em $\alpha = 0{,}05$.

Uso dos Valores *P* para o Teste de Hipótese

- Para evitar essas dificuldades, **a abordagem do valor *P*** tem sido amplamente adotada na prática.
- O valor *P* é a probabilidade da estatística de teste assumir um valor pelo menos tão grande quanto o valor observado da estatística, quando a hipótese H_0 é verdadeira.
- Assim, o valor *P* traz muito mais informação sobre o peso da evidência contra H_0 e o tomador de decisão pode tirar conclusões a *qualquer* nível de significância.

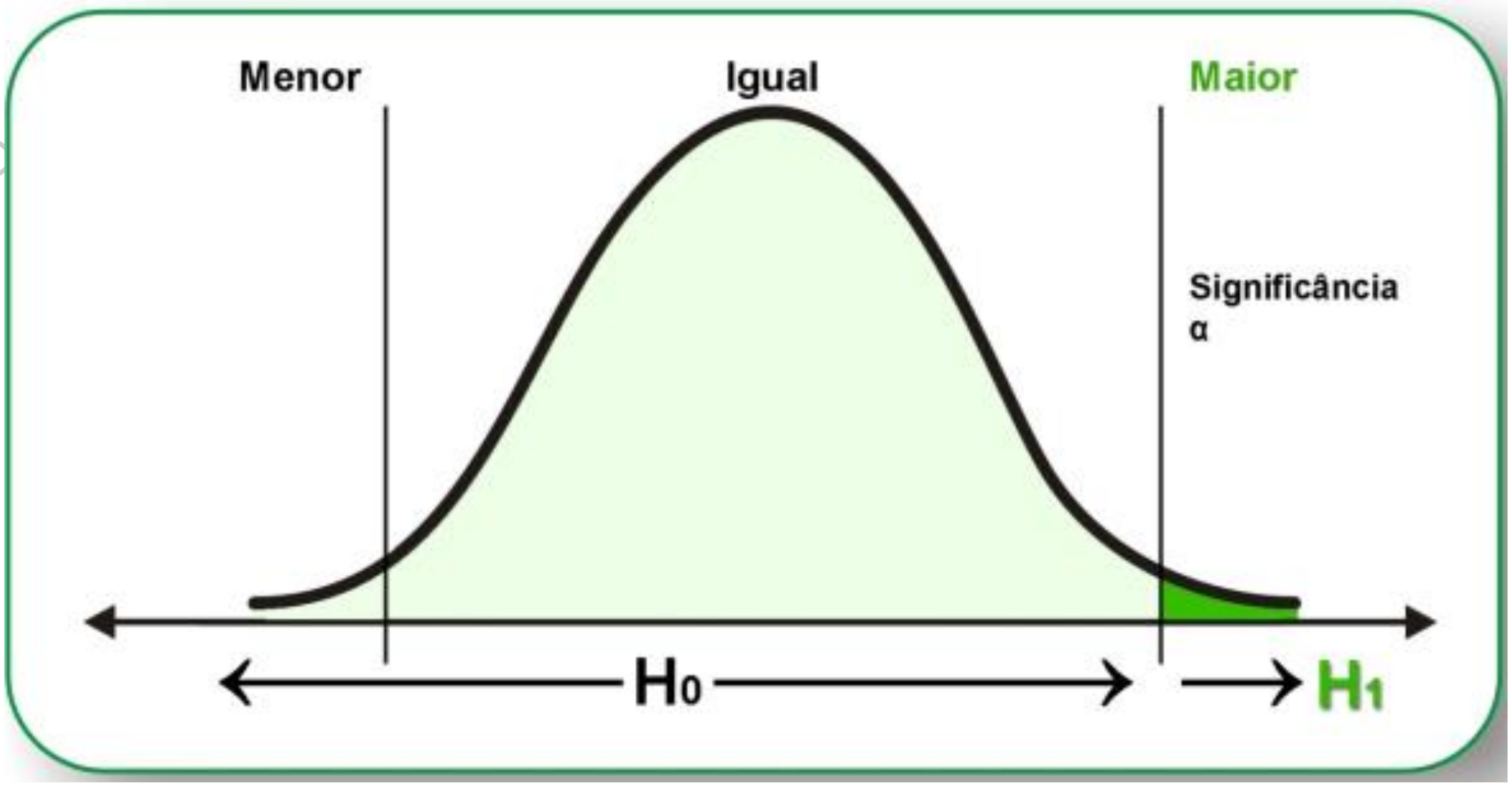
Uso dos Valores *P* para o Teste de Hipótese

- Uma definição formal do **valor *P*** pode ser assim apresentada:

> O **valor *P*** é o menor nível de significância que levaria à rejeição da hipótese nula H_0.

Uso dos Valores *P* para o Teste de Hipótese

- Uma



ntada:

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 53-91

Uso dos Valores *P* para o Teste de Hipótese

- É costume chamar a estatística de teste (e os dados) de significante quando a hipótese nula H_0 é rejeitada; então podemos pensar no valor *P* como sendo o menor nível de significância α para o qual os dados são significantes.

- Uma vez conhecido o valor *P*, o tomador de decisão pode determinar por ele mesmo quão significantes são seus dados, sem que o analista de dados imponha um nível de significância pré-escolhido.

Uso dos Valores *P* para o Teste de Hipótese

- Para os testes de distribuição normal, é relativamente simples calcular o valor de *P*.

- Se Z_0 é o valor calculado da estatística, então o valor *P* é:

Uso dos Valores *P* para o Teste de Hipótese

para o teste superior	$P = 1 - \Phi\|Z_0\|$	$H_0\colon \mu = \mu_0$ $H_1\colon \mu > \mu_0$
para o teste bilateral	$P = 2 \times [1 - \Phi\|Z_0\|]$	$H_0\colon \mu = \mu_0$ $H_1\colon \mu \neq \mu_0$
para o teste inferior	$P = \Phi\|Z_0\|$	$H_0\colon \mu = \mu_0$ $H_1\colon \mu < \mu_0$

onde a função Φ(Z) é a função de distribuição acumulada da normal padrão.

A Distribuição Normal

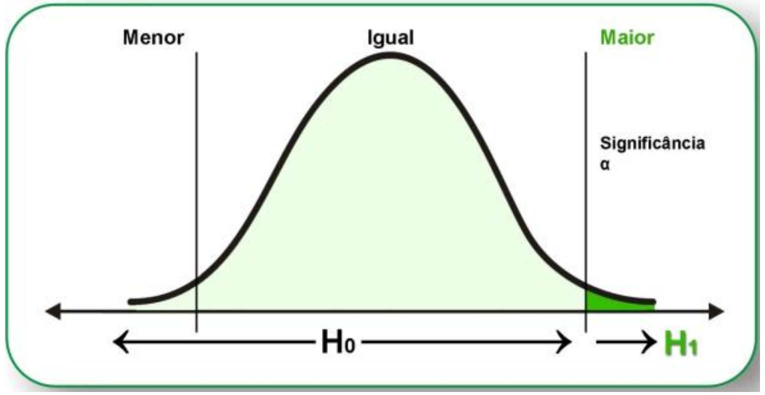
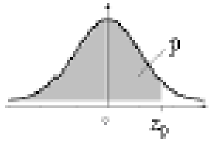


Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada



Fornece Φ(z) = P(-∞ < Z ≤ z), para todo z, de 0,01 em 0,01, desde z = 0,00 até z = 3,59
A distribuição de Z é Normal(0;1)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Obs.: Se z < 0, então Φ(z) = P(−∞ < Z ≤ z) = 1 − Φ(−z).

Exemplo

- Retornando o exemplo do problema do teste de garrafas, sabemos que o valor calculado da estatística de teste é $Z_0 = 3{,}50$. Calcule o valor *P* e tire suas conclusões quanto ao valor encontrado.

Uso dos Valores *P* para o Teste de Hipótese

- Nem sempre é fácil calcular o valor *P* exato para um teste.
- No entanto, os programas de computador mais modernos para análise estatística apresentam os valores *P* e eles podem também ser obtidos com algumas calculadoras.
- É possível também usar as Tabelas Estatísticas para aproximar os valores *P* em alguns casos.
- Leia o texto "*Entendendo o Valor P*" disponível no moodle!

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 53-91

Inferência sobre a Qualidade do Processo

INFERÊNCIA ESTATÍSTICA PARA UMA AMOSTRA

(CONTINUAÇÃO)

Inferência para a Média de uma Distribuição Normal com Variância Desconhecida

Exemplo

- A força média de resistência de uma fibra sintética é uma importante característica da qualidade de interesse do fabricante, que deseja testar a hipótese de que a força média é 50 psi, usando α = 0,05. Da experiência passada, o fabricante está propenso a assumir que a força de resistência é distribuída aproximadamente segundo uma normal; no entanto a média e o desvio-padrão da força de resistência são ambos desconhecidos. Uma amostra aleatória de 16 espécimes de fibra é selecionada e as forças de resistência são determinadas. Os dados amostrais estão exibidos na Tabela.

Espécime	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Força (psi)	48,89	52,07	49,29	51,66	52,16	49,72	48,00	49,96	49,20	48,10	47,90	46,94	51,76	50,75	49,86	51,57

Distribuição *t* de Student p/ pequenas Amostras

- Para amostras *n* > 30, qualquer tipo de distribuição original da variável aleatória possui distribuição das médias aproximadas à uma distribuição normal → Teorema Central do Limite.
- No entanto, tempo e custo impõem limites ao tamanho da amostra.
- **A utilização da distribuição normal pode ser inadequada para amostras pequenas.**

Distribuição *t* de Student p/ pequenas Amostras

- Criada por William Gosset (1876-1937) para análises com pequenas amostras.
- Funcionário da Cervejaria Guinness.
- Cervejaria não permitia publicação de pesquisas → Pseudônimo de *Student*

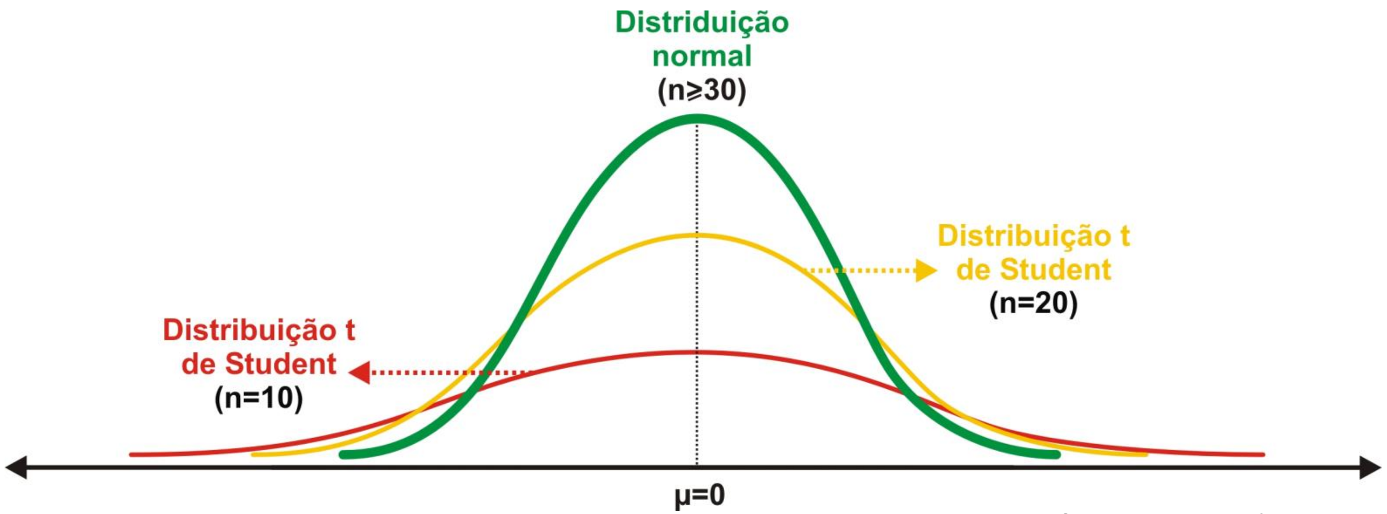
Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 53-91

Distribuição *t* de Student p/ pequenas Amostras

- A **Distribuição '*t*' de Student** é essencialmente uma distribuição normal (com forma aproximada de um sino) para todas as amostras de tamanho '*n*'.

- Através dela, determinamos os valores críticos *t* do intervalo de confiança onde:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$



Distribuição *t* de Student p/ pequenas Amostras

Propriedades da Distribuição *t* de Student:

- É diferente conforme o tamanho da amostra (*n*);
- Tem forma geral simétrica, mas reflete a maior variabilidade esperada em pequenas amostras;
- Tem média $t = 0$;
- O desvio padrão varia com o tamanho da amostra, mas é superior a 1;

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 53-91

Distribuição *t* de Student p/ pequenas Amostras

Propriedades da Distribuição *t* de Student:

- Quanto maior '*n*', maior a aproximação em relação à distribuição normal.
  - para $n > 30$, podemos utilizar distribuição normal com valores críticos '*z*'.

- Condições de utilização:
  - tamanho da amostra pequeno ($n \leq 30$),
  - σ **desconhecido**,
  - população original tem distribuição essencialmente normal.

Distribuição *t* de Student p/ pequenas Amostras

Utilização da Distribuição *t* de Student:

- Para aplicarmos *t* de Student, a distribuição da população original deve ser essencialmente normal;
- Contudo, pode-se obter bons resultados se:
  - for basicamente simétrica;
  - possuir uma única moda.

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 53-91

Distribuição *t* de Student p/ pequenas Amostras

<u>Utilização da Distribuição *t* de Student</u>:

- **Aplicamos *t* de Student no lugar da distribuição normal, pois quando não se conhece σ, a utilização de 's' de uma pequena amostra incorpora outra fonte de erro.**

- Para mantermos o grau de confiança desejado, compensamos a variabilidade adicional ampliando o intervalo de confiança por um processo que substitui o valor crítico *z* por outro *t* obtido na Tabela da Distribuição *t* de Student.

Distribuição *t* de Student p/ pequenas Amostras

Utilização da Tabela de Distribuição *t* de Student:

- Obtemos o valor de $t_{\alpha,\nu}$ na Tabela localizando o número de graus de liberdade (ν) na coluna à esquerda e percorrendo a linha correspondente até atingir o valor aplicável de α.
- Aplicaremos, graus de liberdade como $\nu = n - 1$.

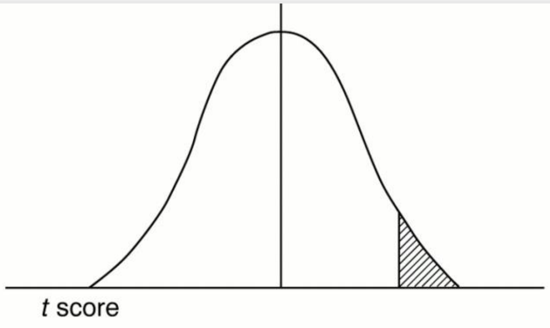
Inferência Estatística para Uma Amostra

Distribuição *t* de Student p/ pequenas Amostras

<u>Utilização da Tabela de Distribuição *t* de Student</u>:

- Obtemos o valor de $t_{\alpha,\nu}$ na Tabela localizando o número de graus de liberdade (ν) na coluna à esquerda e percorrendo a linha correspondente até atingir o valor aplicável de α.
- Aplicaremos, graus de liberdade como $\nu = n - 1$.

Tabela de Distribuição *t* de Student



df \ p	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.683	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.160	2.650	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797

Inferência para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

Teste de Hipóteses

- Suponha que *x* seja uma variável aleatória normal com média μ desconhecida.
- Queremos testar a hipótese de que a média é igual a um valor nominal μ_0; isto é:

$$H_0\colon\ \mu = \mu_0$$
$$H_1\colon\ \mu \neq \mu_0$$

Inferência para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

Teste de Hipóteses

- Note que este problema é semelhante àquele sobre a inferência para a média de uma população com variância *conhecida*, exceto pelo fato, agora, da variância ser ***desconhecida***.

- Como a variância é desconhecida, torna-se necessária a hipótese adicional da variável aleatória ser normalmente distribuída.

- A hipótese de normalidade é necessária para desenvolver formalmente a estatística de teste, mas desvios moderados da normalidade não afetarão seriamente os resultados.

Inferência para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

Teste de Hipóteses

- Como σ^2 é desconhecida, temos que estimá-la por S^2. Ao substituirmos σ por S, obtemos a seguinte estatística de teste:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

- A hipótese nula $H_0: \mu = \mu_0$ será rejeitada se $|t_0| > t_{\alpha/2, n-1}$, onde $t_{\alpha/2, n-1}$ denota o valor crítico $\alpha/2$ superior da distribuição *t* com *n* – 1 graus de liberdade.

Inferência para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

Teste de Hipóteses

- As regiões críticas para as hipóteses alternativas unilaterais são:

  Se H_1: $\mu > \mu_0$, rejeita-se H_0 se $t_0 > t_{\alpha,n-1}$ e
  Se H_1: $\mu < \mu_0$, rejeita-se H_0 se $t_0 < -t_{\alpha,n-1}$

- Pode-se também calcular o valor *P* para o teste *t*. Muitos pacotes computacionais apresentam o valor *P* junto com o valor calculado de t_0.

Inferência Estatística para Uma Amostra

Exemplo

- A força média de resistência de uma fibra sintética é uma importante característica da qualidade de interesse do fabricante, que deseja testar a hipótese de que a força média é 50 psi, usando α = 0,05. Da experiência passada, o fabricante está propenso a assumir que a força de resistência é distribuída aproximadamente segundo uma normal; no entanto a média e o desvio-padrão da força de resistência são ambos desconhecidos. Uma amostra aleatória de 16 espécimes de fibra é selecionada e as forças de resistência são determinadas. Os dados amostrais estão exibidos na Tabela.

Espécime	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Força (psi)	48,89	52,07	49,29	51,66	52,16	49,72	48,00	49,96	49,20	48,10	47,90	46,94	51,76	50,75	49,86	51,57

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 53-91

Inferência Estatística para Uma Amostra

Exemplo (continuação)

- Podemos calcular a média amostral e o desvio-padrão amostral a partir das seguintes equações:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (Xi - \overline{X})^2}{(n-1)}}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} Xi^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Xi\right)^2}{n}}{(n-1)}}$$

Inferência para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal Variância Desconhecida

- Suponha que *x* seja uma variável aleatória normal com média μ desconhecida.
- A partir de uma amostra aleatória de *n* observações, calculam-se a média amostral $\bar{x}$ e a variância amostral S^2.

Inferência para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal Variância Desconhecida

- Então, um intervalo de confiança bilateral de nível 100*(1 – α)% para a verdadeira média é:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \times \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

- Onde $t_{\alpha/2, n-1}$ denota a abscissa da distribuição t com n – 1 graus de liberdade tal que $P\{t_{n-1} \geq t_{\alpha/2, n-1}\} = \alpha/2$.

Inferência para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal Variância Desconhecida

- Os intervalos de confiança superior e inferior de nível 100*(1 – α)% correspondentes são, respectivamente:

$$\mu \leq \bar{x} + t_{\alpha,n-1} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} - t_{\alpha,n-1} \times \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu$$

Exemplo

- Reconsidere os dados do exemplo anterior relativos à força de resistência de uma fibra. Determine o intervalo de confiança com nível 95% para a força média.
  a) Determine se será usado um intervalo de confiança bilateral ou unilateral, inferior ou superior, Explique.
  b) Calcule o intervalo de confiança.

Inferência sobre a Qualidade do Processo

INFERÊNCIA ESTATÍSTICA PARA UMA AMOSTRA

(CONTINUAÇÃO)

Inferência para a Variância de uma Distribuição Normal

Inferência para a Variância de uma Distribuição Normal

Teste de Hipótese

- Este teste é muito utilizado nas aplicações para a melhoria da qualidade.

- Por exemplo, considere uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2. Se σ^2 é menor ou igual a um determinado valor, digamos σ_0^2, então a dispersão natural inerente ao processo estará dentro dos requerimentos do projeto e, consequentemente, a maior parte da produção estará dentro das especificações.

Inferência para a Variância de uma Distribuição Normal

Teste de Hipótese

- Por outro lado, se σ^2 excede σ_0^2, então a dispersão natural no processo excederá os limites de especificação, resultando em altas porcentagens de itens fora de especificações. Em outras palavras, a **qualidade ou a capacidade do processo** está diretamente relacionada à **variabilidade do processo**.

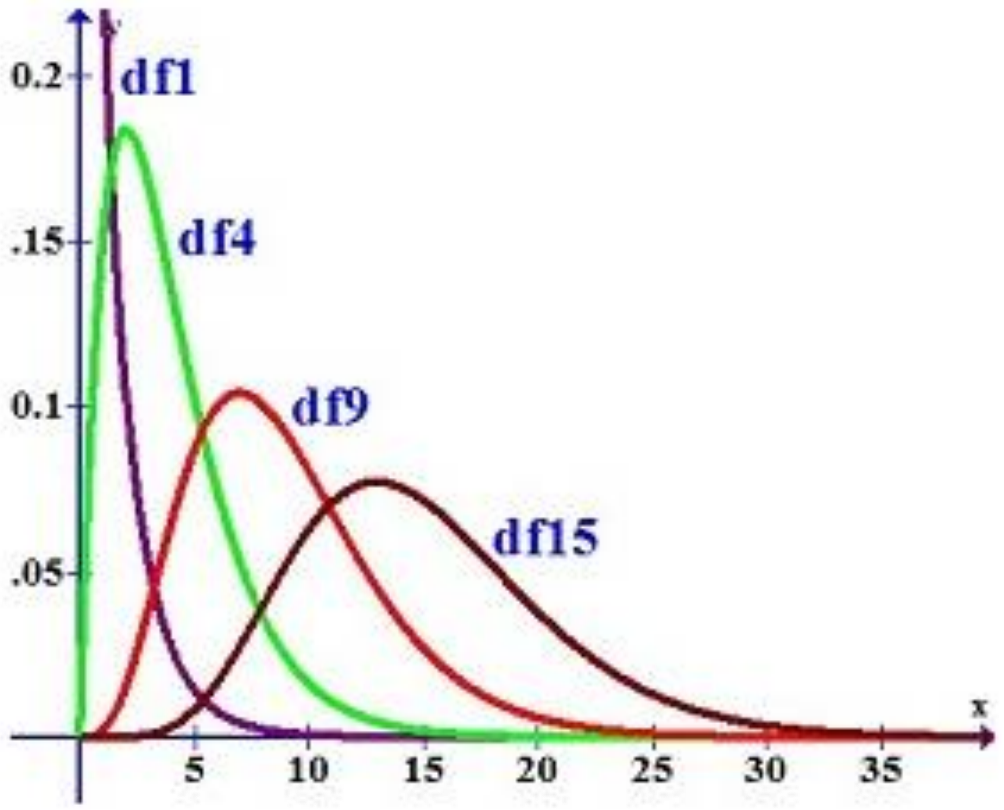
- Esse tipo de teste de hipótese relacionado à variância de uma distribuição normal e suas equações formam a base para o procedimento de controle ou monitoramento da variabilidade do processo.

Inferência para a Variância de uma Distribuição Normal

Teste de Hipótese

- Vamos agora rever o teste de hipótese, mas nesse caso sobre a **variância** de uma distribuição normal.
- Enquanto os testes para as médias são pouco sensitivos à hipótese de normalidade, os procedimentos de teste para a variância não o são.

Inferência Estatística para Uma Amostra



Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 53-91

Inferência para a Variância de uma Distribuição Normal

Teste de Hipótese

- Suponha que queiramos testar a hipótese de que a variância de uma distribuição normal seja igual a uma certa constante, digamos, ${\sigma_0}^2$. As hipóteses são:

$$H_0\colon \sigma^2 = {\sigma_0}^2$$
$$H_1\colon \sigma^2 \neq {\sigma_0}^2$$

- A estatística de teste para esta hipótese é:

$${\chi_0}^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{{\sigma_0}^2}$$

- Onde S^2 é a variância amostral calculada a partir de uma amostra aleatória de *n* observações.

Tabela χ^2

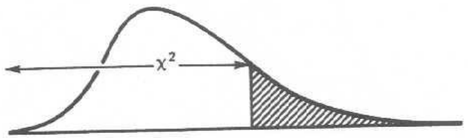


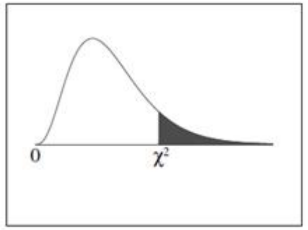
TABLE C. Probability points of the χ^2 distribution with v degrees of freedom

v	tail area probability													
	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	—	—	—	—	0.016	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7

Tabela χ^2

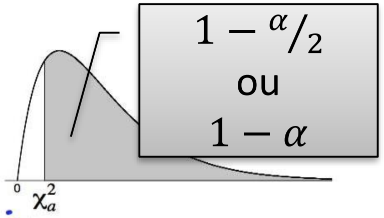
Tabela χ^2

Chi-Square Distribution Table



The shaded area is equal to α for $\chi^2 = \chi^2_\alpha$.

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
			0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
			1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
			1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
			2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955



df	$\chi^2_{0.9995}$	$\chi^2_{0.999}$	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.990}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.85}$	$\chi^2_{0.80}$
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.036	0.064
2	0.001	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.325	0.446
3	0.015	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	0.798	1.005
4	0.064	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.366	1.649
5	0.158	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	1.994	2.343
6	0.299	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	2.661	3.070
7	0.485	0.598	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	3.358	3.822
8	0.710	0.857	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	4.078	4.594
9	0.972	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	4.817	5.380
10	1.265	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	5.570	6.179
11	1.587	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	6.336	6.989
12	1.934	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	7.114	7.807
13	2.305	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	7.901	8.634
14	2.697	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	8.696	9.467

Inferência para a Variância de uma Distribuição Normal

<u>Teste de Hipótese</u>

- A hipótese nula é rejeitada se:

$$\chi_0{}^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1} \qquad \text{ou} \qquad \chi_0{}^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$$

- Onde $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ e $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ são valores críticos $\alpha/2$ superior e $1-(\alpha/2)$ inferior da distribuição qui-quadrado com *n – 1* graus de liberdade.

Inferência Estatística para Uma Amostra

Inferência para a Variância de uma Distribuição Normal

<u>Teste de Hipótese</u>

- A hipótese nula é rejeitada se:

$$\chi_0{}^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$$

ou

$$\chi_0{}^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$$

- Onde $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ e $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ são valores críticos $\alpha/2$ superior e $1-(\alpha/2)$ inferior da distribuição qui-quadrado com *n – 1* graus de liberdade.

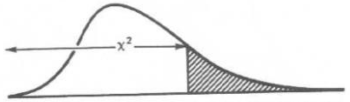


TABLE C. Probability points of the χ^2 distribution with v degrees of freedom

	tail area probability												
v	**0.995**	**0.99**	**0.975**	**0.95**	**0.9**	**0.75**	**0.5**	**0.25**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.001**
1	—	—	—	—	0.016	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 53-91

Inferência para a Variância de uma Distribuição Normal

<u>Teste de Hipótese</u>

- Se uma alternativa <u>unilateral</u> (superior) é especificada:

$$H_1\colon\ \sigma^2 < {\sigma_0}^2$$

  - Então rejeitaríamos H_0 se: ${\chi_0}^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$

- Para outra alternativa <u>unilateral</u> (inferior) especificada:

$$H_1\colon\ \sigma^2 > {\sigma_0}^2$$

  - Então rejeitaríamos H_0 se: ${\chi_0}^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$

Exemplo

- Do exemplo anterior da força média de resistência de uma fibra sintética, faça o teste para verificar se $\sigma < 1{,}50$ com confiança de nível 95%.

Exemplo

- Agora refaça o teste para verificar se $\sigma < 2{,}50$ com confiança de nível 95%.

Inferência para a Variância de uma Distribuição Normal

Intervalo de Confiança p/ a Variância de uma Distribuição Normal

- Suponha que *x* seja uma variável aleatória normal com média desconhecida com média μ e variância σ^2.

- Seja S^2 a variância amostral calculada a partir de uma amostra aleatória de *n* observações.

Inferência para a Variância de uma Distribuição Normal

Intervalo de Confiança p/ a Variância de uma Distribuição Normal

- Então, um intervalo de confiança bilateral de nível 100*(1 – α)% para a variância é:

$$\frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

- Onde $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ é a abscissa da distribuição qui-quadrado com *n* – 1 graus de liberdade tal que $P\{\chi^2_{n-1} \geq \chi^2_{\alpha/2,n-1}\} = \alpha/2$.

Inferência para a Variância de uma Distribuição Normal

Intervalo de Confiança p/ a Variância de uma Distribuição Normal

- Se intervalos de confiança unilaterais são necessários, eles podem ser obtidos por meio da equação anterior usando apenas o limite superior (ou inferior) com o nível de probabilidade aumentando de $^{\alpha}/_{2}$ para α.

- Isto é, os intervalos de confiança superior e inferior de nível 100*(1 – α)% são, respectivamente:

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}} \qquad \text{e} \qquad \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}} \leq \sigma^2$$

Exemplo

- Vamos usar os dados do exemplo anterior da força média de resistência de uma fibra sintética. Calcule o intervalo de confiança de nível (digamos) 95% para σ^2. Determine se será utilizado um intervalo de confiança bilateral ou unilateral, inferior ou superior, Explique.

Exemplo (Extra)

- Você trabalha para uma empresa fabricante de artigos esportivos. Sua especificação afirma aos seus clientes que a variância da força em uma certa linha de pesca (produto para pescadores profissionais) é de 15,9. Uma amostra aleatória de 15 carretéis de linha tem uma variância de 21,8. Com um nível de confiança de 95%, há evidência suficiente para rejeitar a afirmação do fabricante? Suponha que a população seja normalmente distribuída.

Instruções: usando o teste χ^2 para uma variância ou desvio-padrão

Em palavras	Em símbolos
1. Determine a afirmação verbal e matematicamente. Identifique a hipótese nula e a hipótese alternativa	Determine H_0 e H_1
2. Especifique o nível de significância	Identifique α
3. Determine os graus de liberdade e esboce a distribuição de amostragem	g.l. = $n - 1$
4. Determine quaisquer valores críticos	Use a tabela de distribuição χ^2
5. Determine quaisquer regiões de rejeição	$\chi^2_{\alpha/2,n-1}$; $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$
6. Encontre a estatística de teste padronizado	$\chi_0{}^2 = \dfrac{(n-1) \times S^2}{\sigma_0{}^2}$
7. Decida entre rejeitar ou não a hipótese nula	Se χ^2 está na região de rejeição, rejeite H_0. Caso contrário, não rejeite H_0.
8. Interprete a decisão no contexto da afirmação original	Qual sua decisão? Quais evidências?

Fonte: Larson e Farber (2010). Estatística Aplicada, 4ª Edição, p. 333-343