Tópico 02 – Métodos Estatísticos para a Melhoria da Qualidade

Disciplina: SEP-280

Controle da Qualidade de Processos de Fabricação

Research Group Leaders:
Luiz C. R. Carpinetti, Professor
Mateus C. Gerolamo, Assistant Professor

Métodos Estatísticos para a Qualidade

- Estatística é um conjunto de técnicas úteis para a tomada de decisão sobre um processo ou população.

- Estatística é a língua na qual engenheiros, operários, compradores, administradores e outros integrantes da empresa se comunicam sobre qualidade.

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 25

Parte I: Modelando a Qualidade do Processo

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE INTRODUÇÃO

Distribuições de Probabilidade

- O histograma (ou ramo-e-folhas ou diagrama de caixa) é usado para descrever os dados de uma **amostra**.
- Uma **amostra** é um conjunto de medidas selecionado de uma **população** maior.
- Com o uso de *métodos estatísticos*, podemos analisar **amostras** e tirar conclusões sobre a **população**.

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 27-52

Distribuições de Probabilidade (continuação)

- Uma **distribuição de probabilidade** é um modelo matemático que relaciona o valor da variável com a probabilidade de ocorrência daquele valor na população.

- Em outras palavras, podemos visualizar os resultados do parâmetro de um processo como uma **variável aleatória**, porque ele (parâmetro) assume diferentes valores na população de acordo com algum mecanismo aleatório e, assim, a distribuição de probabilidade desse parâmetro do processo descreve a probabilidade de ocorrência de qualquer valor de tal parâmetro na população.

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 27-52

Distribuições de Probabilidade (continuação)

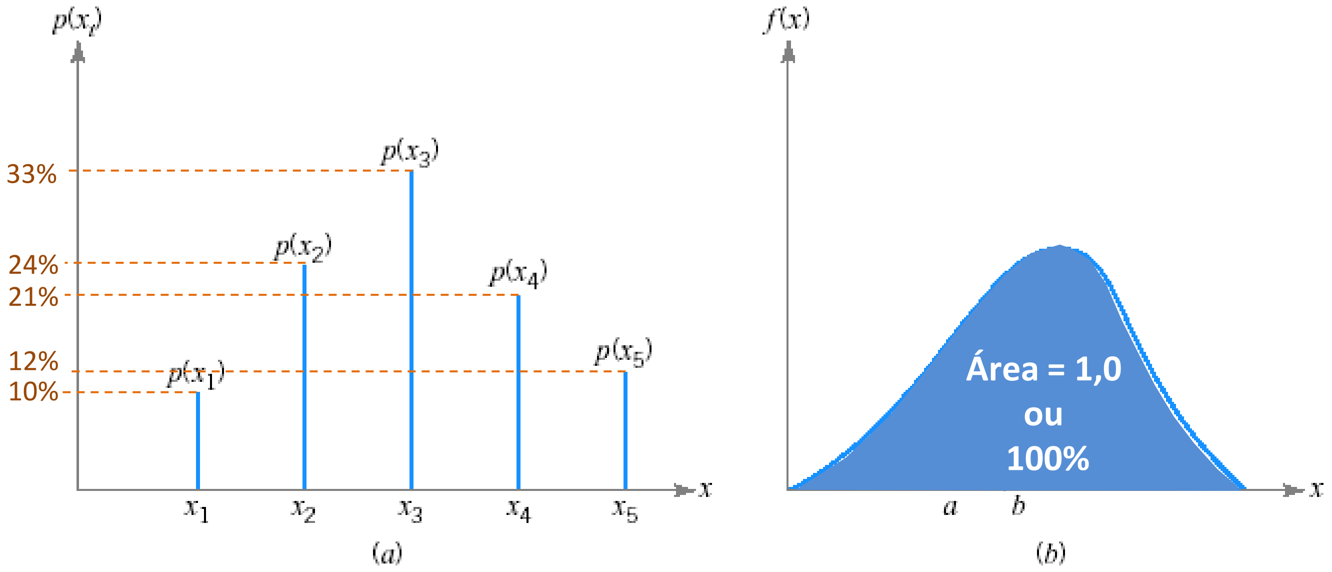
- Há dois tipos de distribuição de probabilidade:
  - **Distribuições contínuas** – quando a variável sendo medida é expressa em uma escala contínua, sua distribuição de probabilidade é chamada *distribuição contínua*. Ex. medida do diâmetro de uma peça.
  - **Distribuições discretas** – quando o parâmetro sendo medido só pode assumir certos valores, tais como os inteiros 0, 1, 2, ..., a distribuição de probabilidade é chamada *distribuição discreta*. Ex. número de defeitos em um produto.

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 27-52

Descrevendo a Variação

Distribuições de Probabilidade (continuação)

- Exemplos de distribuições discreta e contínua são apresentadas nos gráficos a seguir, respectivamente.



Gráficos: Distribuições de Probabilidade: (a) Caso Discreto e (b) Caso Contínuo

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, Cap. 02, p. 34

Descrevendo a Variação

Distribuições de Probabilidade (continuação)

- A **média μ** de uma distribuição de probabilidade é uma medida da **tendência central** da distribuição, ou da sua **posição**. A média é o ponto no qual a distribuição se "equilibra" perfeitamente. Então, a média é simplesmente o centro de massa da distribuição de probabilidade.

- A média <u>não</u> é necessariamente o quinquagésimo percentil da distribuição (a **mediana**) e também não é necessariamente o valor mais provável da variável (o qual é chamado de **moda**). A média simplesmente determina a **posição** da distribuição.

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 27-52

Descrevendo a Variação

Distribuições de Probabilidade (continuação)

Dados: {2; 4; 2; 2; 4; 6; 10; 20; 8; 2}

Calcule a média?

Calcule a mediana?

Calcule a moda?

- A **média** μ de uma distribuição de probabilidade é uma medida da **tendência central** da distribuição, ou da sua **posição**. A média é o ponto no qual a distribuição se "equilibra" perfeitamente. Então, a média é simplesmente o centro de massa da distribuição de probabilidade.

Dados: {2; 2; 2; 2; 4; 4; 6; 8; 10; 20} → ordenados

Média: 6

Mediana: 4 = [(4+4)/2]

Moda: 2

- A média <u>não</u> é necessariamente o quinquagésimo percentil da distribuição (a **mediana**) e também não é necessariamente o valor mais provável da variável (o qual é chamado de **moda**). A média simplesmente determina a **posição** da distribuição.

Descrevendo a Variação

Distribuições de Probabilidade (continuação)

- A dispersão, espalhamento, ou variabilidade na distribuição é expressa pela **variância σ^2**.
- A variância é a média dos quadrados das distâncias de cada elemento da população em relação à média.
- Se $\sigma^2 = 0$, não há variabilidade na população. À medida que a variabilidade aumenta, a variância σ^2 também aumenta.
- A variância é expressa no quadrado da unidade da variável original.

Distribuições de Probabilidade (continuação)

- É costume utilizar a raiz quadrada da variância, chamada **desvio-padrão σ**.

- **O desvio-padrão é uma medida de dispersão ou espalhamento da população expressa na unidade original**. Populações com mesma média podem ter diferentes desvios-padrão.

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 27-52

Distribuições de Probabilidade (continuação)

Gráficos

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, Cap. 02, p. 36

Parte I: Modelando a Qualidade do Processo

PRINCIPAIS DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

Distribuições Contínuas

- Várias **distribuições contínuas** são importantes no controle estatístico da qualidade.

- Estão incluídas:
  - Distribuição Normal;
  - Distribuição Exponencial;
  - Distribuição Gama; e
  - Distribuição de Weibull.

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 27-52

Distribuições Contínuas

- Várias **distribuições contínuas** são importantes no controle estatístico da qualidade.

- Estão incluídas:
  - **Distribuição Normal;**
  - Distribuição Exponencial;
  - Distribuição Gama; e
  - Distribuição de Weibull.

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 27-52

Distribuições de Probabilidade

A DISTRIBUIÇÃO NORMAL

A Distribuição Normal

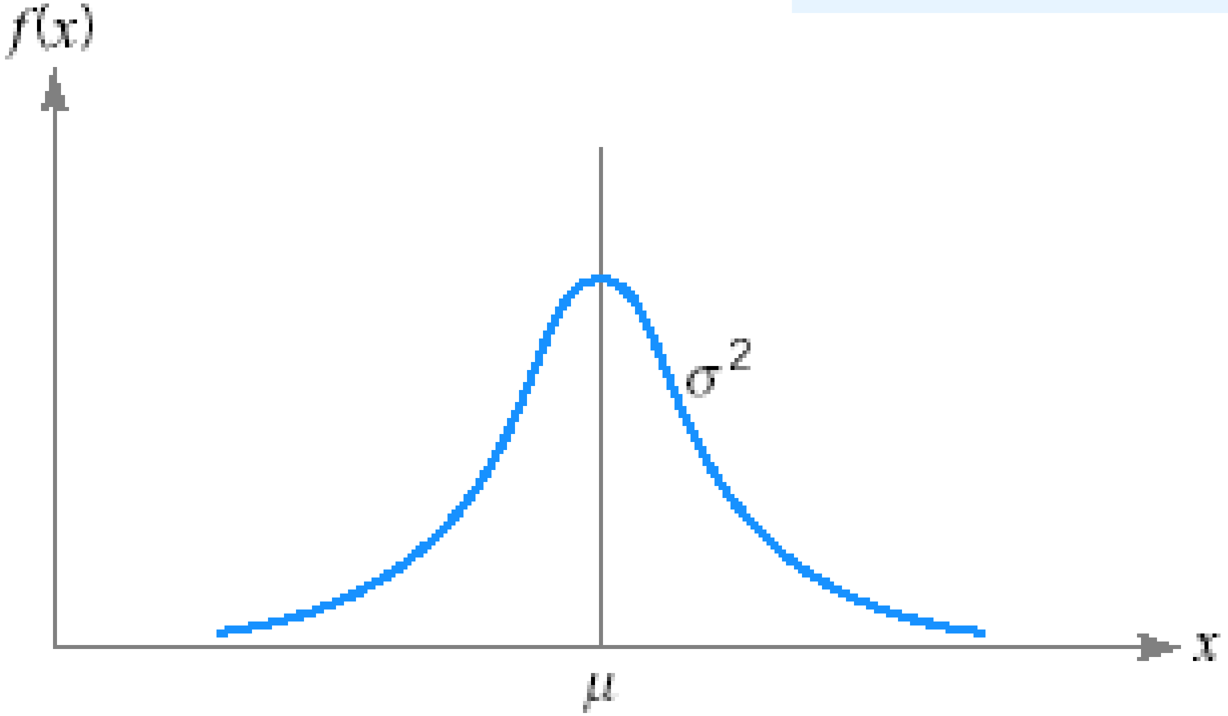
- A **distribuição normal** é, provavelmente, a mais importante distribuição, tanto na teoria quanto na prática da estatística.

A Distribuição Normal (continuação)

- A **distribuição normal** é tão usada que frequentemente usamos uma notação especial, $x \sim N(\mu; \sigma^2)$, para indicar que *x* é normalmente distribuída com média μ e variância σ^2.
- A aparência visual de uma **distribuição normal** é a de uma curva simétrica, unimodal, em **forma de sino**, e é exibida na figura a seguir.

A Distribuição Normal (continuação)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$



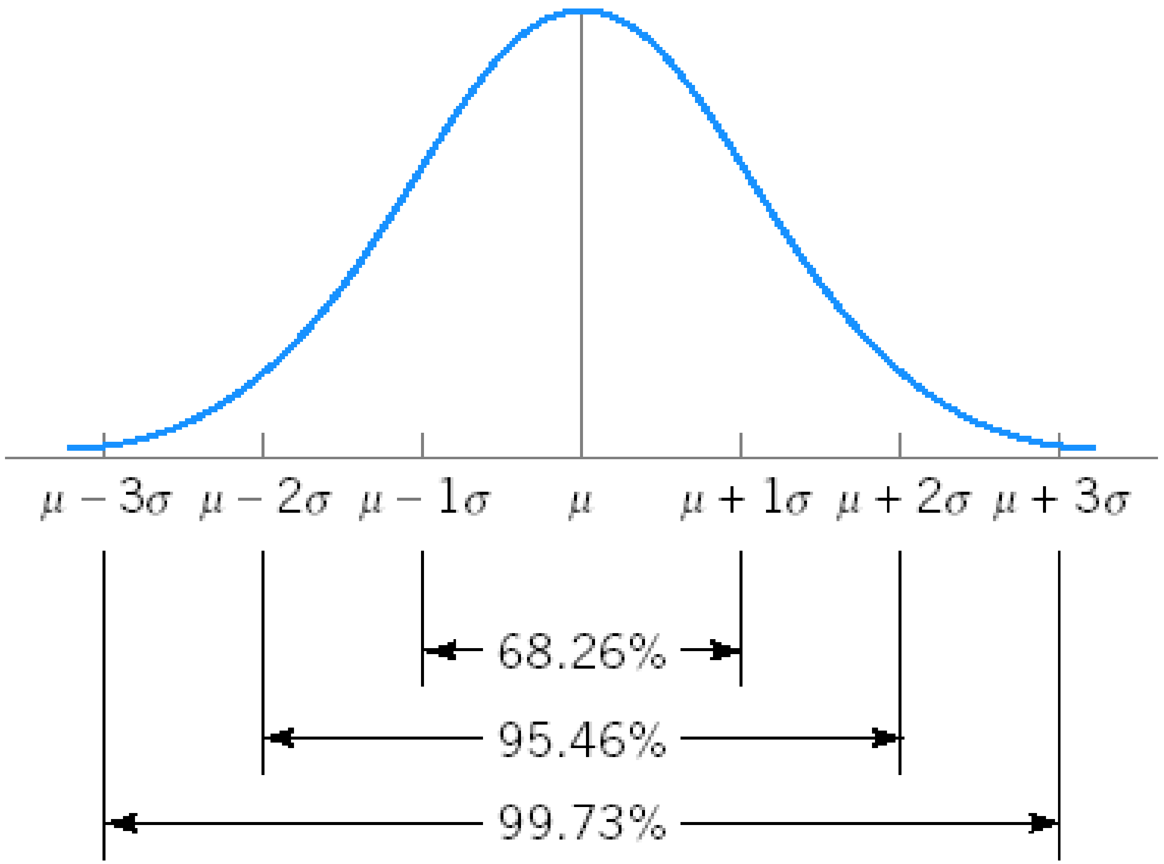
Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 27-52

A Distribuição Normal (continuação)

- Há uma interpretação simples do desvio-padrão (σ) de uma distribuição normal.
  - 68,26% dos valores populacionais caem entre os limites definidos pela média mais ou menos <u>um</u> desvio-padrão ($\mu \pm 1.\sigma$)
  - 95,46% dos valores populacionais caem entre os limites definidos pela média mais ou menos <u>dois</u> desvios-padrão ($\mu \pm 2.\sigma$);
  - 99,73% dos valores populacionais caem entre os limites definidos pela média mais ou menos <u>três</u> desvios-padrão ($\mu \pm 3.\sigma$);

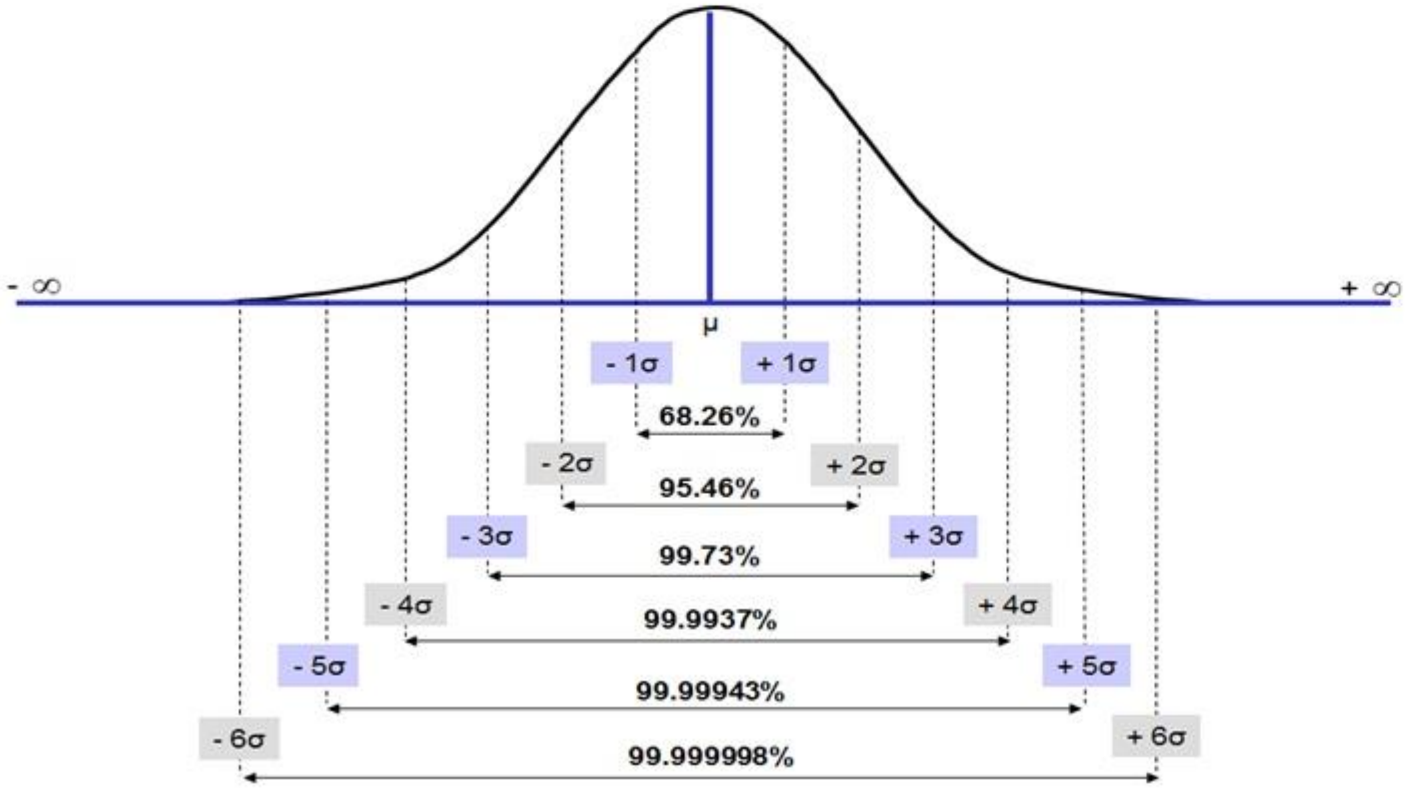
Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 27-52

A Distribuição Normal (continuação)



Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 27-52

A Distribuição Normal (continuação)



Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 27-52

A Distribuição Normal (continuação)

- Assim, o desvio-padrão mede a dispersão, ou seja, a distância na escala horizontal associada com os limites de abrangência de 68,26%, 95,46%, e 99,73%.

- É prática comum arredondar essas porcentagens para 68,3%, 95,5% e 99,7%.

A Distribuição Normal (continuação)

- A distribuição normal acumulada é definida como a probabilidade de uma variável aleatória normal *x* ser menor ou igual a algum valor *a*, ou:

$$P\{x \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

- Esta integral não pode ser calculada em forma fechada.

A Distribuição Normal (continuação)

- Podemos usar uma mudança de variável:

$$\boxed{z = \frac{x - \mu}{\sigma}}$$

- O cálculo pode ser feito independentemente de μ e σ^2, isto é:

$$P\{x \leq a\} = P\left\{z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right\} \equiv \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Função de Distribuição Acumulada

A Distribuição Normal (continuação)

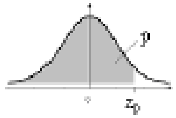
- $\Phi(\cdot)$ é a <u>função de distribuição acumulada</u> da **distribuição normal** (média = 0, desvio-padrão = 1).
- A tabela da distribuição acumulada da normal padrão é dada na Tabela II do Apêndice (livro Montgomery).

Distribuições Contínuas

Veja a Tabela 6.1 (Áreas sob a curva normal padrão), página 112 da Apostila de Estatística da Disciplina SEM0555 e compare as tabelas.

- **São iguais?**
- **Se não, no que diferem?**

Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada



Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$, para todo z, de 0,01 em 0,01, desde z = 0,00 até z = 3,59
A distribuição de Z é Normal(0;1)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Obs.: Se z < 0, então $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z) = 1 - \Phi(-z)$.

Fonte: http://www.im.ufrj.br/probest/Tabelas_de_probabilidade.pdf

A Distribuição Normal (continuação)

- A transformação da fórmula

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

é usualmente chamada de **padronização**, porque ela converte uma variável aleatória $N(\mu; \sigma^2)$ em uma variável aleatória $N(0;1)$.

A Distribuição Normal (continuação)

Exemplo

- A força de tensão do papel usado na confecção de sacos para supermercados é uma característica importante de qualidade. Sabe-se que a força, digamos *x*, é normalmente distribuída com média $\mu = 40$ lb/in^2 e desvio-padrão $\sigma = 2$ lb/in^2, denotada por $x \sim N(40;2^2)$. Um comprador dos sacos exige que eles tenham pelo menos 35 lb/in^2. A probabilidade de que um saco confeccionado com este papel atenda tal especificação é $P = \{x \geq 35\}$. Calcule esta probabilidade!

A Distribuição Normal (continuação)

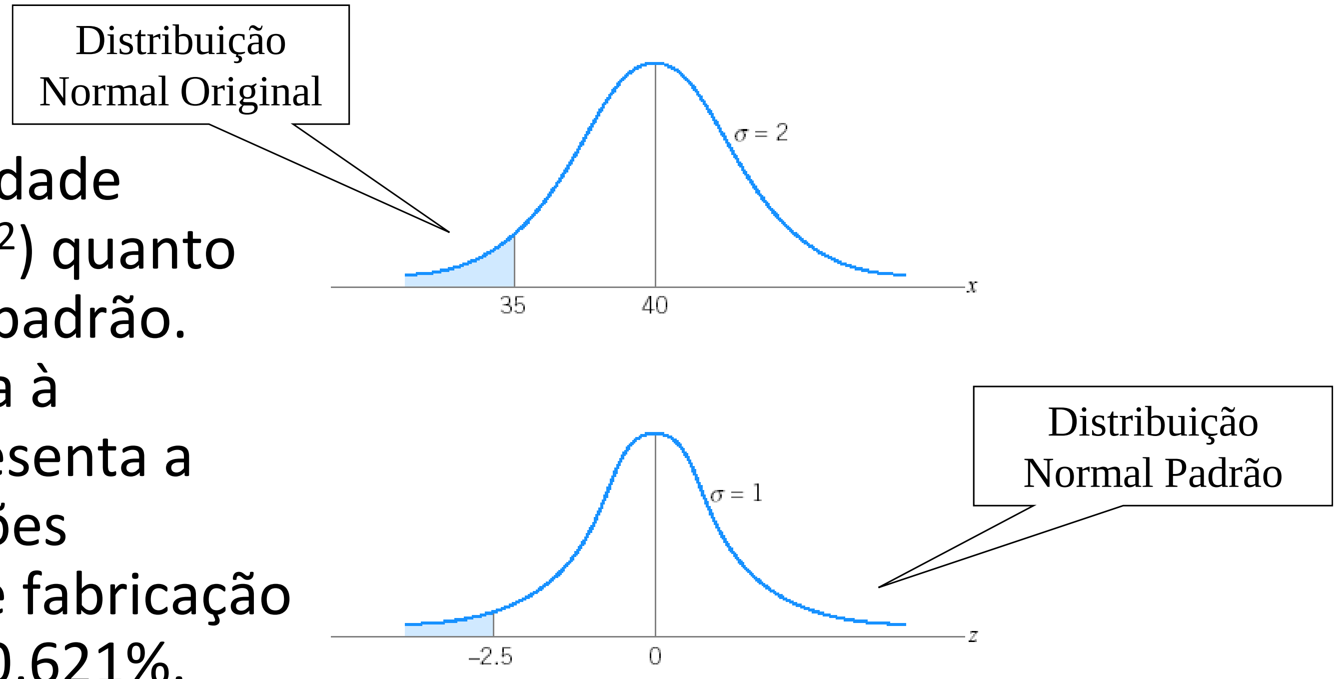
Exemplo (continuação)

- Note que $P = \{x \geq 35\}$ pode ser calculada pela Tabela da normal padrão com a área complementar $1 - P = \{x \leq 35\}$
- Para calcular esta probabilidade a partir da tabela da normal padrão, temos que padronizar o ponto 35 e achar:
- $P\left\{z \leq \frac{35-40}{2}\right\} = P\{z \leq -2{,}5\} = \Phi(-2{,}5) = 0{,}0062$
- Consequentemente, a probabilidade desejada é:
- $P\{x \geq 35\} = 1 - P\{x \leq 35\} = 1 - 0{,}0062 = 0{,}9938$
- Ou seja, 99,38% dos resultados serão iguais ou maiores do que 35 lb/in^2.

A Distribuição Normal (continuação)

Exemplo (continuação)

- A Figura mostra a probabilidade tabulada tanto para $N(40;2^2)$ quanto para a distribuição normal padrão. Note que a área sombreada à esquerda de 35 lb/in² representa a fração fora das especificações produzida pelo processo de fabricação de sacos de papel, ou seja 0,621%.

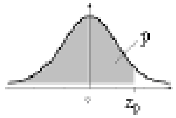


A Distribuição Normal

(continuação)

- Esta Tabela dá apenas as probabilidades à esquerda de valores positivos de *z*.
- Portanto, teremos que usar a propriedade de simetria da distribuição normal para calcular a probabilidade.

Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada



Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$, para todo z, de 0,01 em 0,01, desde z = 0,00 até z = 3,59
A distribuição de Z é Normal(0;1)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Obs.: Se z < 0, então $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z) = 1 - \Phi(-z)$.

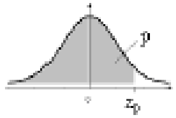
Fonte: http://www.im.ufrj.br/probest/Tabelas_de_probabilidade.pdf

A Distribuição Normal (continuação)

- Especificamente, note que:
- $P\{x \geq a\} = 1 - P\{x \leq a\}$
- $P\{x \leq -a\} = P\{x \geq a\}$
- $P\{x \geq -a\} = P\{x \leq a\}$

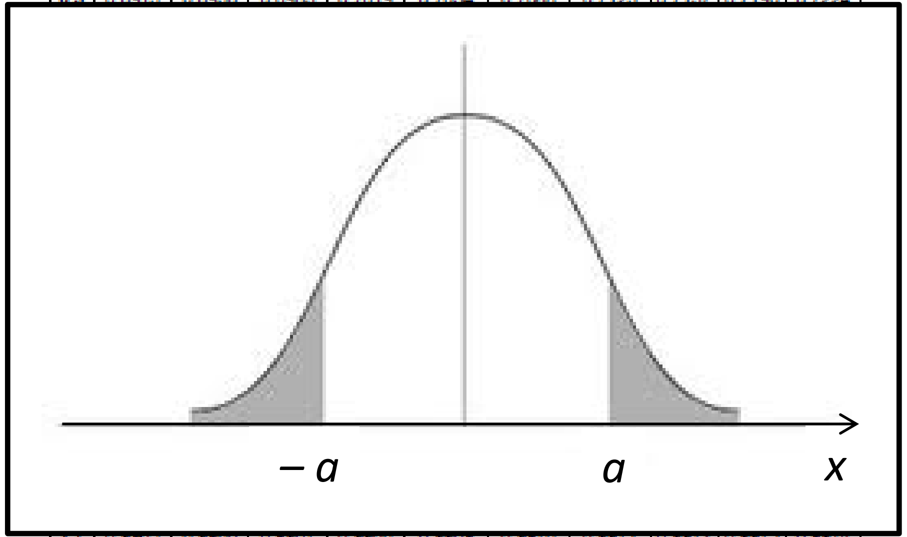
- É recomendável, na solução de problemas, desenhar um gráfico da distribuição.

Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada



Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$, para todo z, de 0,01 em 0,01, desde z = 0,00 até z = 3,59
A distribuição de Z é Normal(0;1)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998



Obs.: Se z < 0, então $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z) = 1 - \Phi(-z)$.

Fonte: http://www.im.ufrj.br/probest/Tabelas_de_probabilidade.pdf

A Distribuição Normal (continuação)

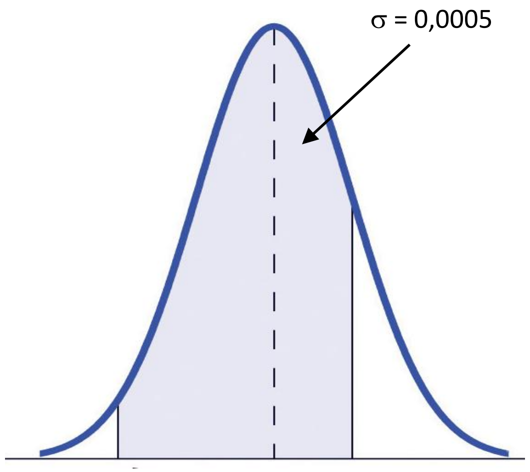
<u>Exemplo</u>

- O diâmetro da haste de metal usada em uma unidade de disco é normalmente distribuído com média 0,2508 cm e desvio padrão 0,0005 cm. As especificações sobre a haste foram estabelecidas como 0,2500 $\pm$ 0,0015 cm. Deseja-se saber qual a fração das hastes produzidas que satisfaz as especificações.

A Distribuição Normal (continuação)

<u>Exemplo</u> (continuação)

- A distribuição normal do processo é exibida no gráfico.
- Note que:
  - $P = \{0{,}2485 \leq x \leq 0{,}2515\}$
  - $= \Phi\left(\frac{0{,}2515 - 0{,}2508}{0{,}0005}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}2485 - 0{,}2508}{0{,}0005}\right)$
  - $= \Phi(1{,}40) - \Phi(-4{,}60)$
  - $= 0{,}9192 - 0{,}0000$
  - $= 0{,}9192$

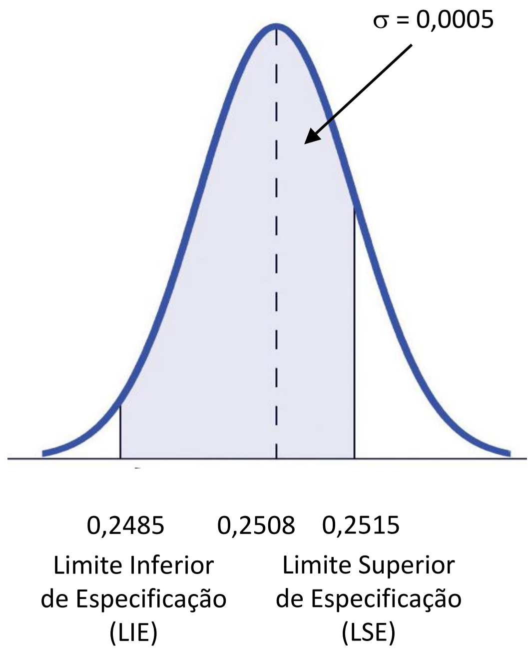


A Distribuição Normal **(continuação)**

Exemplo (continuação)

- Então, podemos esperar que o aproveitamento do processo seja de aproximadamente 91,92%, isto é, cerca de 91,92% das hastes são produzidas de acordo com as especificações.

- Note que quase todas as hastes fora de especificações são muito grandes, porque a média do processo está muito próxima do limite superior de especificação.

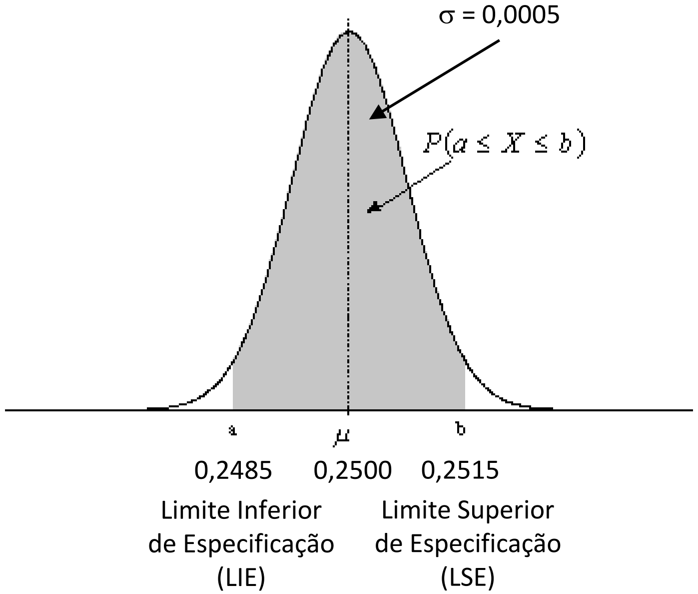


Distribuições Contínuas

A Distribuição Normal (continuação)

<u>Exemplo</u> (continuação)

- Suponha que o processo possa ser centralizado, talvez com um ajuste na máquina, de modo que a média do processo seja exatamente igual ao valor nominal de 0,2500. Deseja-se saber novamente qual a fração das hastes produzidas que satisfaz as especificações.

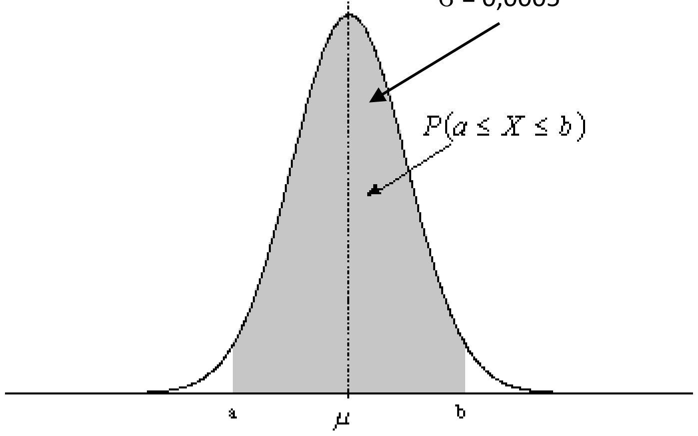


A Distribuição Normal (continuação)

<u>Exemplo</u> (continuação)

- Note que:
  - $P = \{0{,}2485 \leq x \leq 0{,}2515\}$
  - $= \Phi\left(\frac{0{,}2515 - 0{,}2500}{0{,}0005}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}2485 - 0{,}2500}{0{,}0005}\right)$
  - $= \Phi(3{,}00) - \Phi(-3{,}00)$
  - = 0,99865 – 0,00135
  - = 0,9973

- Com a centralização do processo, o aproveitamento aumenta para aproximadamente 99,73%



A Distribuição Normal (continuação)

- Algumas vezes, em vez de calcular a probabilidade associada a um determinado valor de uma variável aleatória normal, é necessário fazer o oposto – achar um valor particular de uma variável aleatória normal que resulta em uma dada probabilidade.

A Distribuição Normal (continuação)

Exemplo

- Suponha que $x \sim N(10;9)$. Queremos achar o valor de x, digamos a, tal que $P\{x > a\} = 0{,}05$.

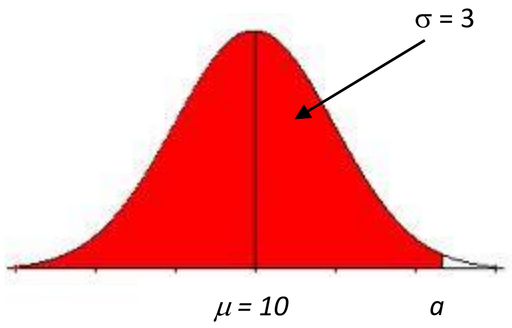
A Distribuição Normal (continuação)

Exemplo (continuação)

- Suponha que $x \sim N(10;9)$. Queremos achar o valor de x, digamos a, tal que $P\,\{x > a\} = 0{,}05$.
- Como, a distribuição normal é representada por $N(\mu;\ \sigma^2)$, então temos que $\mu = 10$ e $\sigma = 3$. Então...

$$P\,\{x > a\} = P\left\{z > \frac{a-10}{3}\right\} = 0{,}05$$

ou $P\left\{z \leq \frac{a-10}{3}\right\} = 0{,}95$



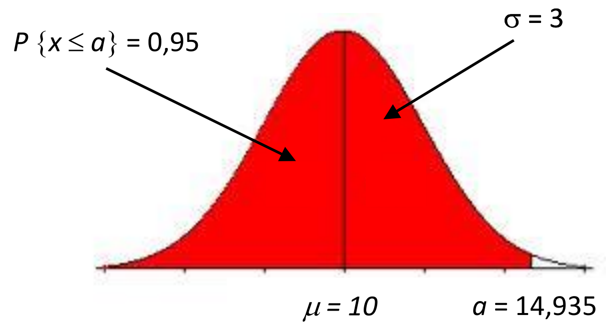
A Distribuição Normal (continuação)

Exemplo (continuação)

- Suponha que $x \sim N(10;9)$. Queremos achar o valor de x, digamos a, tal que $P\{x > a\} = 0{,}05$.
- Da tabela, podemos verificar que $P\{z \leq 1{,}645\} = 0{,}95$. Assim:

$$\frac{a-10}{3} = 1{,}645$$ ou

$$a = 10 + 3 \times (1{,}645) = 14{,}935$$



Parte I: Modelando a Qualidade do Processo

TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

Quiz

Responda

- O que é o Teorema Central do Limite ou Teorema do Limite Central?

- Qual a sua utilidade?

A Distribuição Normal – O Teorema Central do Limite (Teoria do Limite Central)

- A distribuição normal é considerada, com frequência, como o modelo probabilístico apropriado para uma variável aleatória.
- O **teorema central do limite** é muitas vezes a justificativa para tal aproximação.
- O **teorema central do limite** estabelece que a distribuição <u>da soma</u> de *n* variáveis aleatórias independentes é aproximadamente normal, independentemente das distribuições individuais das variáveis.
- A aproximação melhora à medida que *n* aumenta.

Fonte: Montgomery (2004). Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, p. 27-52

A Distribuição Normal – O Teorema Central do Limite (Teoria do Limite Central)

- Em muitos casos, a aproximação será boa, mesmo com valores pequenos de *n*, por exemplo, $n < 10$, enquanto que, em outras situações, pode ser necessário *n* grande, digamos $n > 100$, para se obter uma boa aproximação.
- Em geral, se as x_i são identicamente distribuídas e a distribuição de cada x_i não se afasta dramaticamente da distribuição normal, então o teorema central do limite funciona bastante bem para $n \geq 3$ ou 4.
- Tais condições são frequentemente encontradas em problemas de controle da qualidade.

A Distribuição Normal – O Teorema Central do Limite (Teoria do Limite Central)

- Uma razão para a distribuição Normal ser considerada tão importante é porque qualquer que seja a distribuição da variável de interesse para grandes amostras, as médias amostrais serão aproximadamente normalmente distribuídas, e tenderão a uma distribuição normal à medida que o tamanho de amostra crescer.
- Então podemos ter uma variável original com uma distribuição muito diferente da Normal (pode até mesmo ser discreta), mas se tomarmos várias amostras grandes desta distribuição, e então fizermos um histograma das médias amostrais, a forma se parecerá como uma curva Normal.

> A distribuição da média amostral $\bar{X}$ é aproximadamente Normal com média μ e desvio padrão $\sigma/\sqrt{n}$.

Fonte: http://leg.ufpr.br/~shimakur/CE001/node38.html

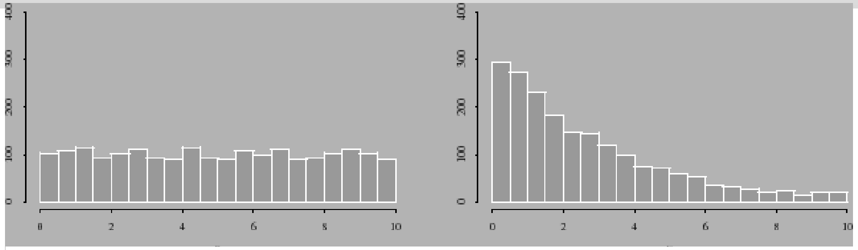
A Distribuição Normal – O Teorema Central do Limite (Teoria do Limite Central)

- O desvio-padrão geralmente refere-se à distância média de uma observação em relação à média da população.
- Mas quando pegamos a média de *n* observações (média amostral), o desvio-padrão das médias das amostras será menor do que o desvio-padrão da população.
- A média amostral deveria variar menos de amostra para amostra.
- Na medida em que o tamanho (*n* observações) da amostra é maior, teremos aproximadamente a mesma média amostral todas as vezes.
- Assim, **a variância (o desvio-padrão) para uma distribuição das médias amostrais será dividido por *n* (raiz de *n*)**.

A distribuição da média amostral $\bar{X}$ é aproximadamente Normal com média μ e desvio padrão $\sigma/\sqrt{n}$.

Fonte: http://www.talkstats.com/showthread.php/5654-Standard-error-why-sqrt-of-n

Distribuições Contínuas



A Distribuição Normal – O Teorema Central do Limite (Teoria do Limite Central)

Exemplo simulado:

- O diagrama ao lado sumariza os resultados de um experimento no qual foi utilizado um computador para gerar 2000 observações de duas distribuições bem diferentes (linha superior) – uniforme e exponencial, p.e.
- Foi gerada uma amostra de tamanho 2 de cada distribuição e calculada a média.
- Este procedimento foi repetido 1999 vezes e a segunda linha mostra os histogramas das médias resultantes das amostras de tamanho dois.
- Isto foi repetido com média amostrais onde as amostras são de tamanhos 5 (terceira linha) e 10 (quarta linha).

Fonte: http://leg.ufpr.br/~shimakur/CE001/node38.html

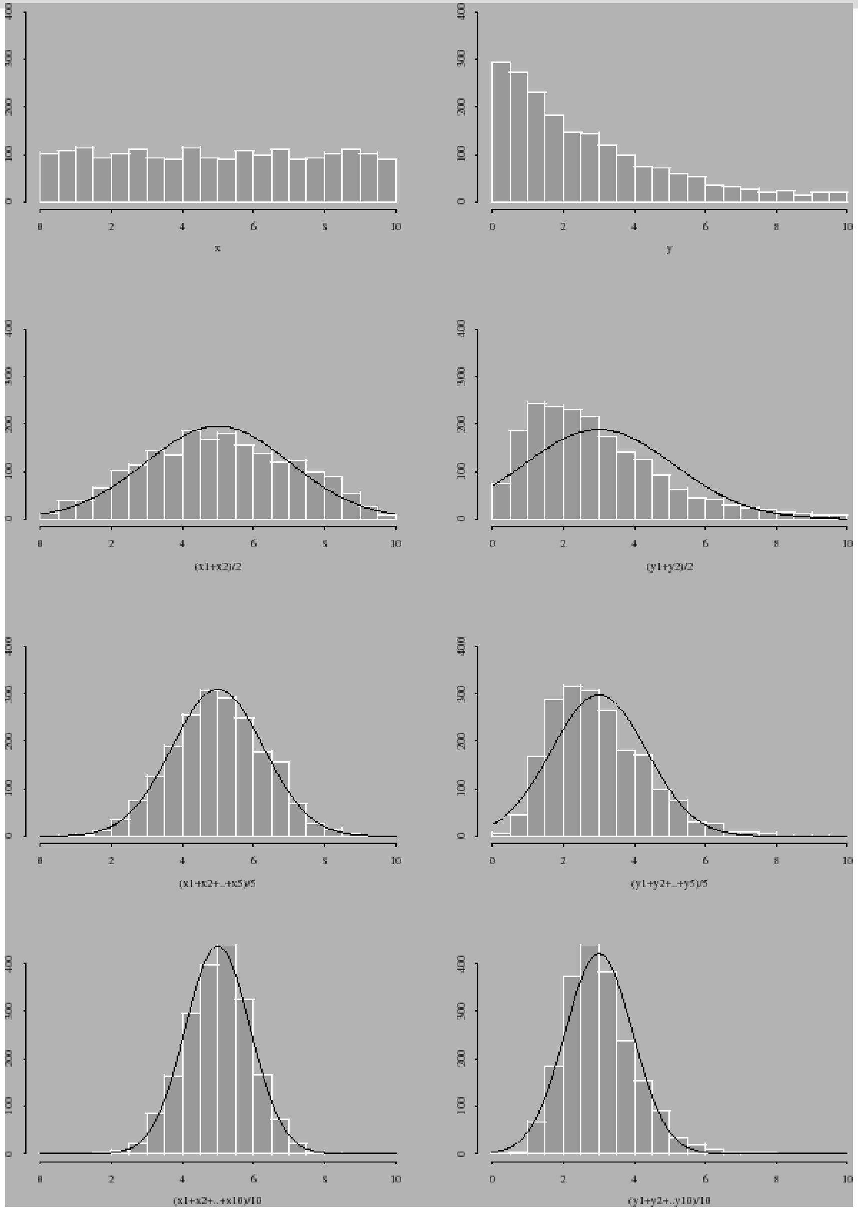
Distribuições Contínuas

A Distribuição Normal – O Teorema Central do Limite (Teoria do Limite Central)

<u>Exemplo simulado</u>:

- Note como a forma da distribuição muda à medida que se muda de uma linha para a próxima, e como as duas distribuições em cada linha tornam-se mais similares nas suas formas à medida que o tamanho das amostras aumenta. Ainda mais, cada distribuição parece mais e mais com uma distribuição Normal. Não é necessário uma amostra de tamanho muito grande para ver uma forma Normal.

- As médias populacionais para as duas distribuições são 5 e 3 respectivamente. Note como, quanto maior o tamanho de amostra mais perto as médias amostrais tendem a estar da média populacional.



Fonte: http://leg.ufpr.br/~shimakur/CE001/node38.html

A Distribuição Normal – O Teorema Central do Limite (Teoria do Limite Central)

- Trabalho em grupos (usar mesmo grupo já cadastrado).
- Escolher um dado: cada grupo deve lançar o dado centenas de vezes (dividir os lançamentos entre os membros do grupo)
- Agrupar resultados individuais em amostras (com n=2, n=5, n=10, etc...);
- Calcular médias de cada amostra e plotar gráfico de distribuição de cada resultado; plotar gráfico de distribuição das médias para diferentes valores de n;
- Montar planilha Excel para suporte!
- Concluir e Redigir Relatório (**Explique o que é o Teorema do Limite Central**)

- Forma de entrega: sistema Google Classroom
- Relatório com capa incluindo nr. do grupo e nome dos alunos presentes e nr. USP.
- Tipo de arquivo: Entregar em arquivo PDF ou WORD.

- **Entregar até o final da aula de 19/09/2019 (quinta-feira), 15:50h.**