

PSI3483

Ondas Eletromagnéticas em Meios Guiados

GUIA DE ONDAS

Prof.^a Fatima Salete Correra

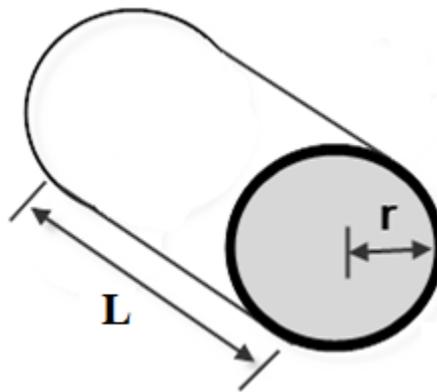
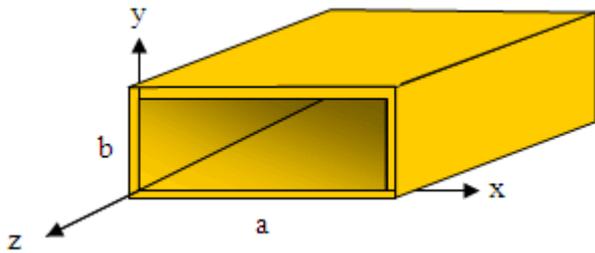
Sumário

- Guia de Ondas - Conceito
- Guia de Ondas Retangular
- Guia de Ondas Cilíndrico
- Métodos de alimentação de guias de ondas

Guias de Ondas

■ Guias de ondas

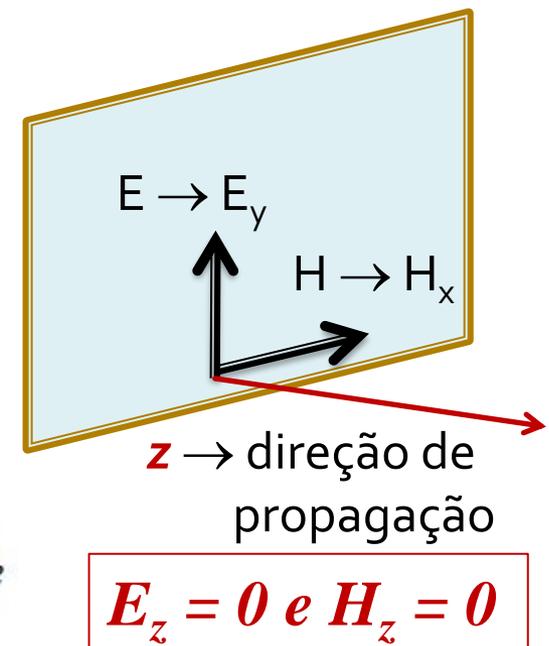
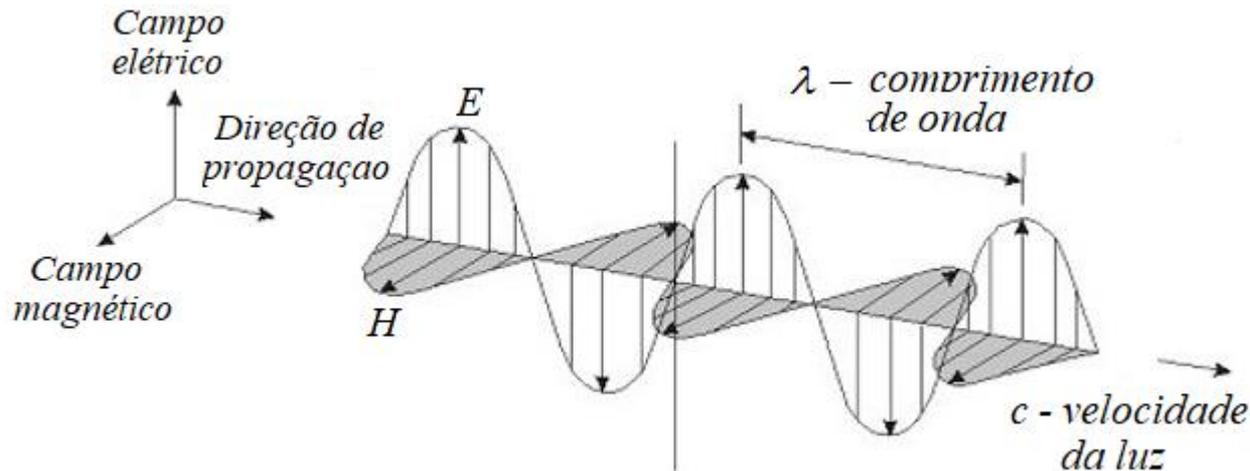
- Estruturas ocas
- De material condutor
- Com seção transversal constante
 - Retangular, circular, elíptica ou outras
- Preenchidas por dielétrico (em geral ar)



Guias de Ondas

Propagação de campos EM no **espaço livre** e em **cabos coaxiais**

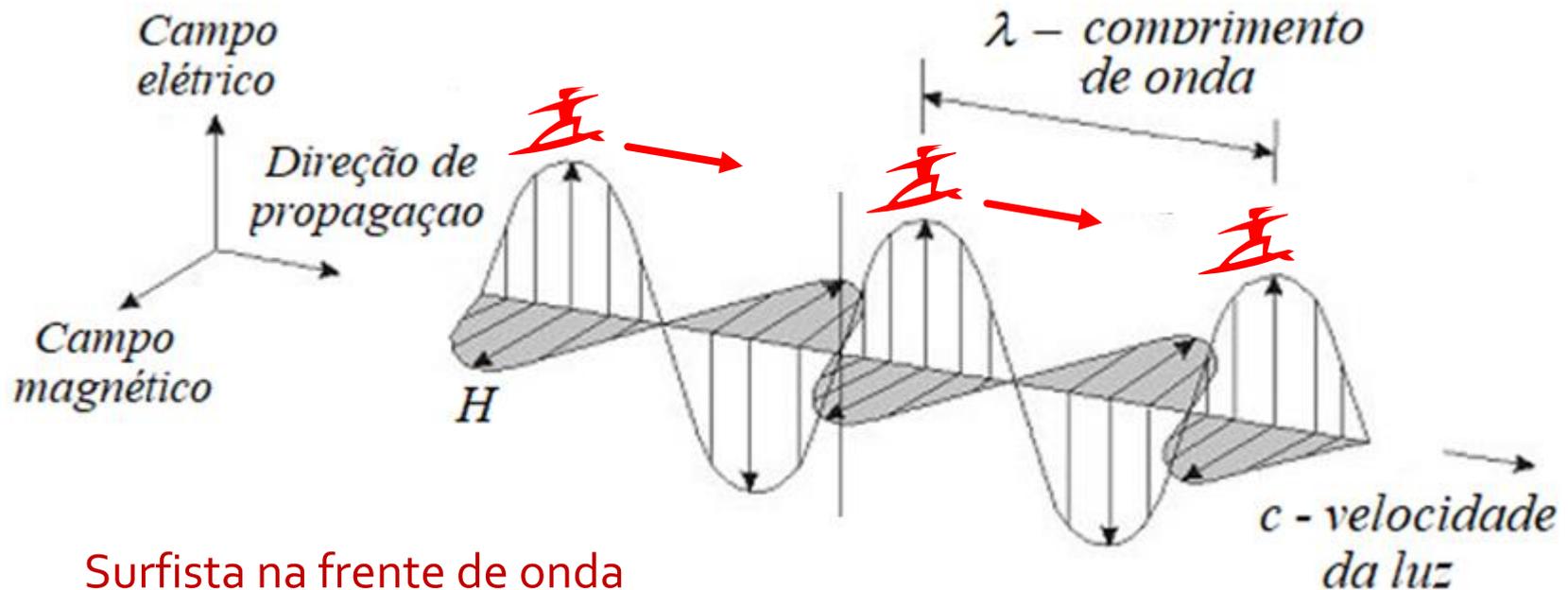
- Onda **TEM** ou onda **T**ransversal **E**letró **M**agnética
- Vetores de campos E e H perpendiculares entre si e perpendiculares à direção de propagação
- Ilustração de onda TEM propagando-se no ar



Guias de Ondas

Propagação de campos EM no espaço livre e em cabos coaxiais

- Onda **TEM** ou onda **T**ransversal **E**letró **M**agnética



Surfista na frente de onda

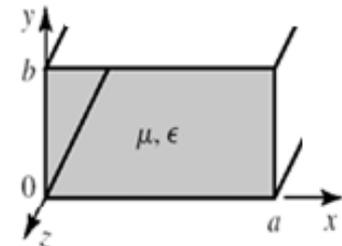
Desloca-se na direção de propagação da onda

Perpendicular aos vetores de E e H

Guias de Ondas

■ Propagação da onda EM no guia de ondas

- Modo **TEM não é suportado** em guias de ondas
 - Modo TEM requer meios guiados com dois ou mais condutores
 - O guia de ondas é formado por um único condutor
- No interior dos guias de ondas propagam-se



■ **Modos TM** → **T**ransversal **M**agnético
Campo magnético é perpendicular
à direção de propagação z



$$H_z = 0 \quad e \quad E_z \neq 0$$

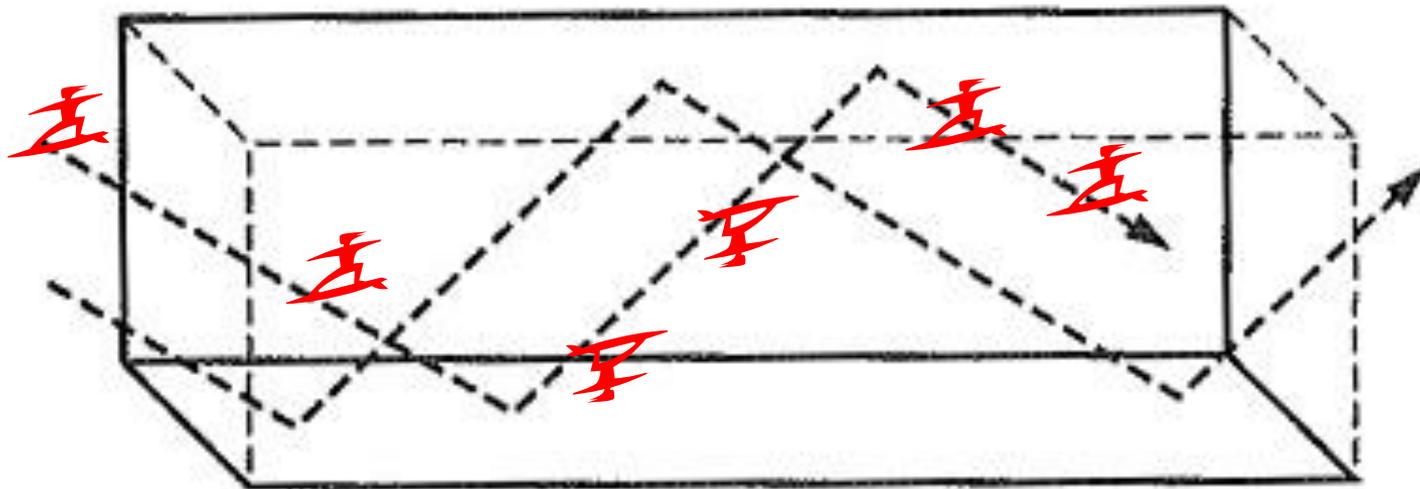
■ **Modos TE** → **T**ransversal **E**létrico
Campo Elétrico é perpendicular
à direção de propagação z



$$E_z = 0 \quad e \quad H_z \neq 0$$

Equações de Maxwell

- Propagação de ondas EM no guia de ondas retangular
 - Como a onda se propaga no interior do guia de ondas?

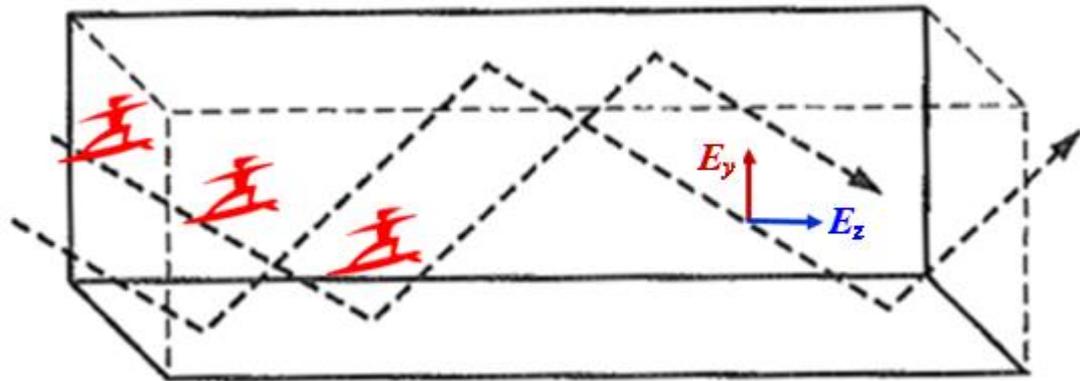
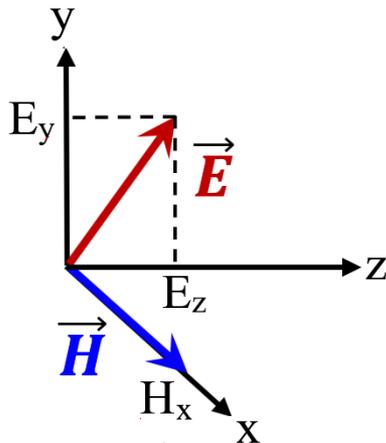


Equações de Maxwell

- Propagação de ondas EM no guia de ondas retangular

Exemplo de Modo TM: $\vec{E} = E_y \cdot \hat{y} + E_z \cdot \hat{z}$

$$\vec{H} = H_x \cdot \hat{x} \quad (H_z = 0)$$

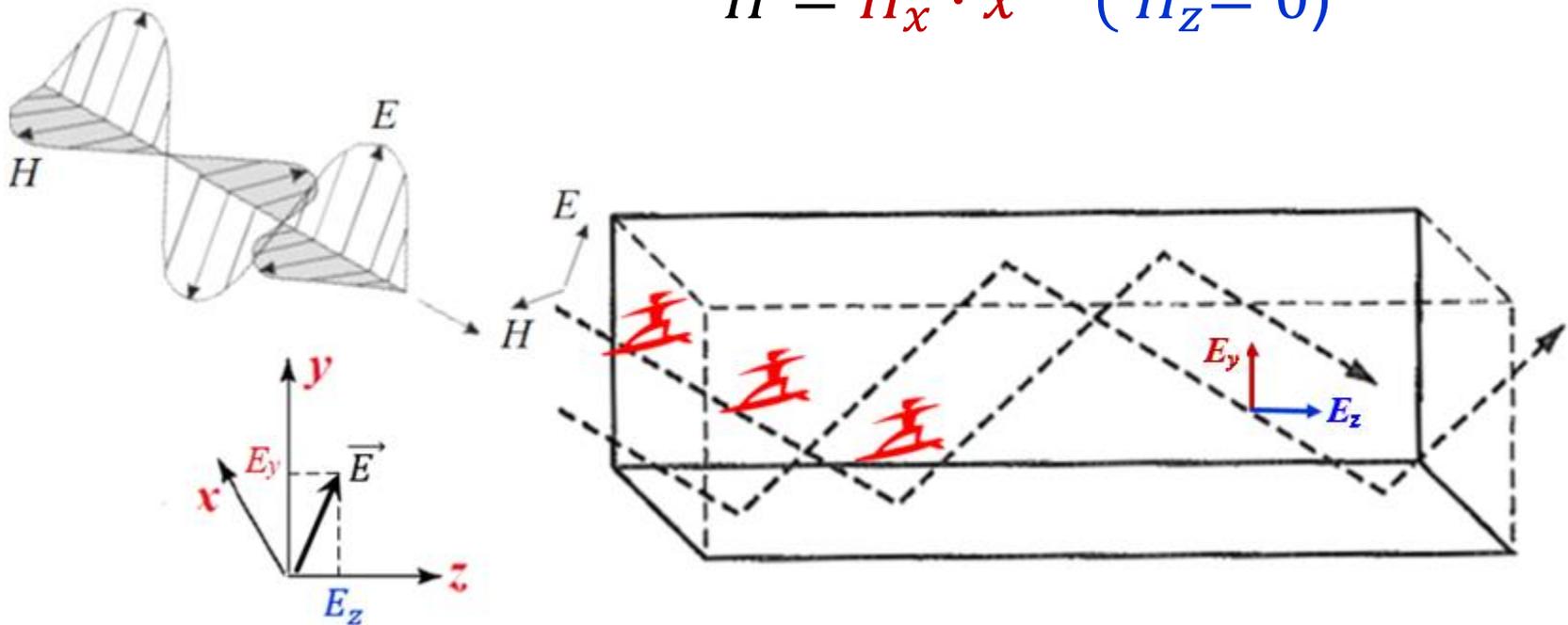


Equações de Maxwell

- Propagação de ondas EM no guia de ondas retangular

Exemplo de Modo TM: $\vec{E} = E_y \cdot \hat{y} + E_z \cdot \hat{z}$

$$\vec{H} = H_x \cdot \hat{x} \quad (H_z = 0)$$



Guias de Ondas

■ Modos de propagação TM

■ **Modos TM** – Modos Transversais Magnéticos

- **H** é perpendicular à direção de propagação (**z**)
- **E** tem componente na direção de propagação
- Adotando a propagação da onda no guia segundo a **direção z**

$$H_z = 0 \quad \text{e} \quad E_z \neq 0$$

■ Possibilidades das demais componentes dos campos **E** e **H**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = 0 \quad \text{e} \quad E_y = 0 \\ H_y \neq 0 \quad \text{e} \quad E_x \neq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x \neq 0 \quad \text{e} \quad E_y \neq 0 \\ H_y = 0 \quad \text{e} \quad E_x = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x \neq 0 \quad \text{e} \quad E_y \neq 0 \\ H_y \neq 0 \quad \text{e} \quad E_x \neq 0 \end{array} \right.$$

Guias de Ondas

- **Modos de propagação TE**
 - **Modos TE** – Transversais Elétricos
 - **E** é perpendicular à direção de propagação (**z**)
 - **H** tem componente na direção de propagação
 - Adotando a propagação da onda no guia segundo a **direção z**

$$E_z = 0 \quad \text{e} \quad H_z \neq 0$$

- Possibilidades das demais componentes dos campos **E** e **H**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = 0 \quad \text{e} \quad E_y = 0 \\ H_y \neq 0 \quad \text{e} \quad E_x \neq 0 \end{array} \right.$$

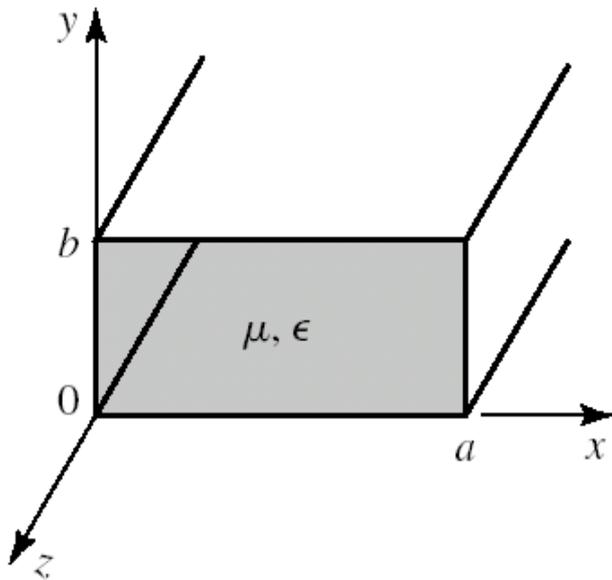
$$\left\{ \begin{array}{l} H_x \neq 0 \quad \text{e} \quad E_y \neq 0 \\ H_y = 0 \quad \text{e} \quad E_x = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x \neq 0 \quad \text{e} \quad E_y \neq 0 \\ H_y \neq 0 \quad \text{e} \quad E_x \neq 0 \end{array} \right.$$

Guias de Ondas

Guia de Ondas Retangular

Guia de Ondas Retangular



- Direção de propagação: **z**
- **a**: maior dimensão da seção transversal
- **b**: menor dimensão da seção transversal
- Em geral $b \approx \frac{a}{2}$
- Meio dielétrico que preenche o guia de ondas

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_r \cdot \mu_0 \quad \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

- Velocidade da onda no meio sem fronteiras com

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mu} = \mu_r \cdot \mu_0$$



$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}}$$

c : velocidade da luz no vácuo

Guia de Ondas Retangular

- Exemplo **Waveguide Rectangular**

- Guia de ondas WR-90

- $a = 0,9$ polegada e $b = 0,4$ polegada

- $a = 2,286$ cm e $b = 1,016$ cm

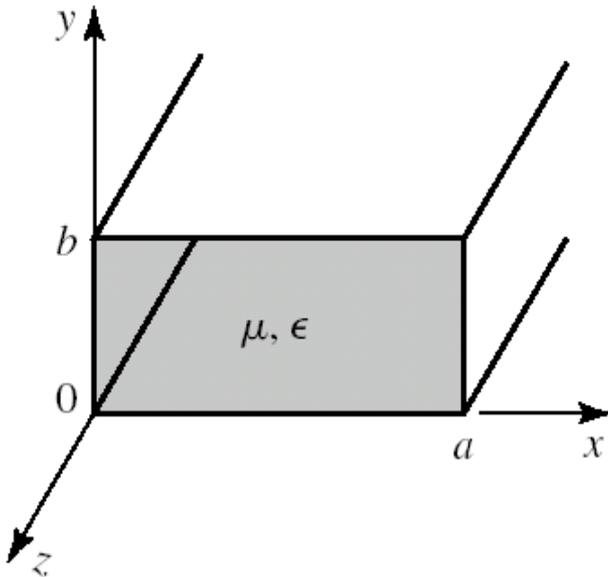
- Preenchido com ar

- $\mu = \mu_0$ e $\epsilon = \epsilon_0$

- $v = c$ (no meio sem fronteiras)

- Aplicação: banda X

- 8,2 a 12,4 GHz



Guia de Ondas Retangular

Exemplo de guias de onda retangulares padrão Interior do guia: preenchido com ar

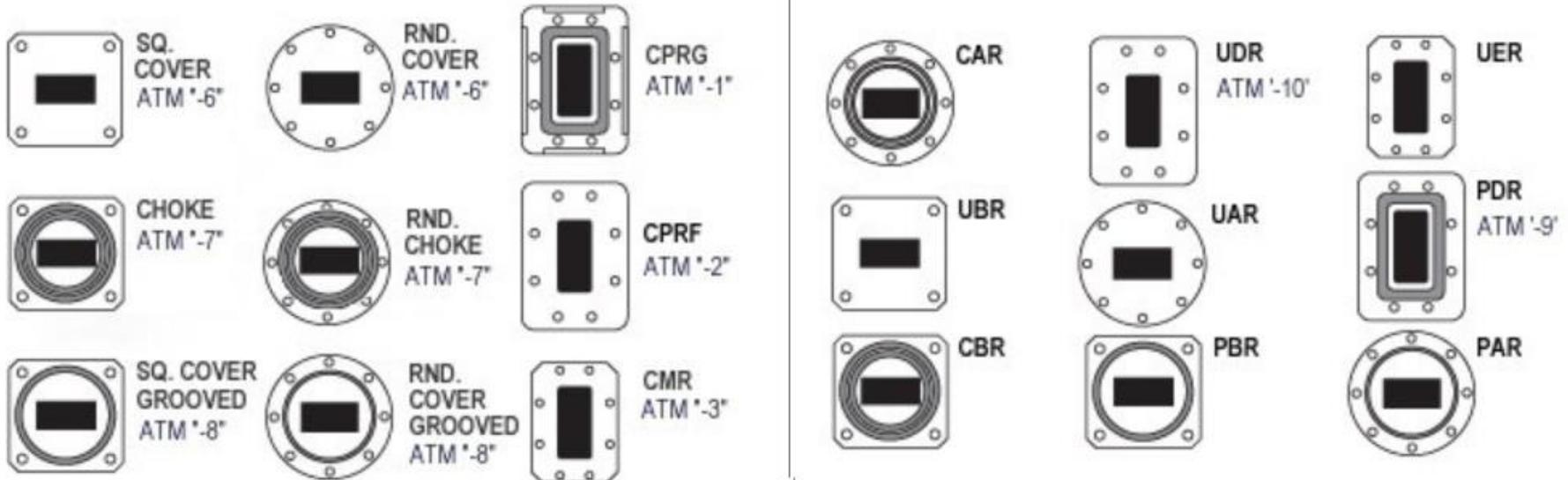
Guide	Size (inch)	Rec. (GHz)	f_c (GHz)	Band	(GHz)
WR650	6.500×3.250	1.12 - 1.70	0.91	<i>L</i>	(1.0 - 2.0)
WR284	2.840×1.340	2.60 - 3.95	2.08	<i>S</i>	(2.0 - 4.0)
WR187	1.872×0.872	3.95 - 5.85	3.15	<i>C</i>	(4.0 - 8.0)
WR90	0.900×0.400	8.20 - 12.40	6.56	<i>X</i>	(8.0 - 12.0)
WR62	0.622×0.311	12.40 - 18.00	9.49	<i>K_u</i>	(12.0 - 18.0)
WR42	0.420×0.170	18.00 - 26.50	14.05	<i>K</i>	(18.0 - 27.0)
WR28	0.280×0.140	26.50 - 40.00	21.08	<i>K_a</i>	(27.0 - 40.0)

Tipo de guia	Dimensões em polegadas	Faixa recomendada	Frequência de corte	Banda larga de classificação do guia
--------------	------------------------	-------------------	---------------------	--------------------------------------

Guia de Ondas Retangular

Flanges padrão de guias de onda retangulares

WAVEGUIDE FLANGE TYPES - EIA AND IEC STANDARD FLANGES



North American EIA Standard Flanges

European IEC Standard Flanges

Padrão norte-americano

Padrão europeu

Equações de Maxwell

■ Propagação de ondas EM no guia de ondas retangular

- Resolução das equações de Maxwell no interior do guia de ondas
- Equações de Maxwell na forma diferencial

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- E: intensidade de campo elétrico (V/m)
- H: intensidade de campo magnético (A/m)
- D: densidade de fluxo elétrico (Coulomb/m)
- B: densidade de fluxo magnético (Weber/m)
- J: densidade de corrente elétrica (A/m²)
- ρ: densidade de carga elétrica (Coulomb/m³)

Equações de Maxwell → { Quatro equações
Cinco incógnitas → $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$ e t

Equações de Maxwell

■ Resolução das equações de Maxwell no guia de ondas

- Considerando o interior do guia de ondas

- Dielétrico ideal
- Sem cargas ou correntes

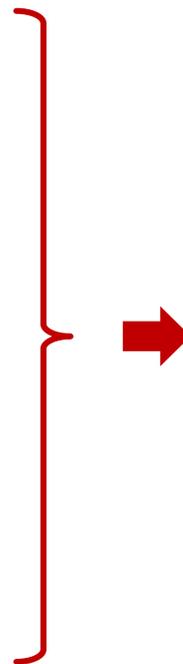
$$\rho = 0$$

$$J = 0$$

- Equações de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$



$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Equações de Maxwell

■ Resolução das equações de Maxwell no guia de ondas

- Considerando adicionalmente o interior do guia preenchido por meio

- Linear → não depende da amplitude do campo EM
- Isotrópico → não depende da direção do campo EM
- Homogêneo → mesma composição em cada ponto
- Invariante no tempo

- Tem-se como relações constitutivas do meio

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

ϵ : permissividade elétrica do meio (F/m)

μ : permeabilidade magnética do meio (H/m)

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

Equação de Onda ou de Helmholtz

■ Resolução das equações de Maxwell no guia de ondas

- Equações de Maxwell nesse caso particular reduzem-se a

$$\underbrace{\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}} \quad \underbrace{\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

\vec{E} é função de \vec{H} e t \vec{H} é função de \vec{E} e t

- Manipulação matemática das equações de Maxwell
 - Objetivo: obter equações com uma única variável de campo
 - Uma equação do campo elétrico em função de \vec{E} e t
 - Uma equação do campo magnético em função de \vec{H} e t
 - **Equações de Onda ou Equações de Helmholtz**

Equação de Onda ou de Helmholtz

- Consideremos a equação $\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$
- Aplicando o rotacional nos dois termos da equação, temos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial (\nabla \times \vec{H})}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{pois } \rho = 0)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$-\mu \frac{\partial \nabla \times \vec{H}}{\partial t} = -\mu \cdot \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Equação de Onda ou de Helmholtz

- De forma análoga obtém-se $\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}$

- Equações de Onda no domínio do tempo

Função de
 \vec{E} e t

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Função de
 \vec{H} e t

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

- Válidas para meios
 - Lineares
 - Isotrópicos
 - Homogêneos
 - Invariantes no tempo
 - $\rho = 0$ e $J = 0$

- Eliminar a variável $t \rightarrow$ Equações de Onda na forma fasorial

Guia de Ondas Retangular

- Campos \vec{E} e \vec{H} são funções do ponto no espaço e do tempo


$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$$
$$\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$$

- Se \vec{E} e \vec{H} campos harmônicos ou senoidais, pode-se definir **fasores** de \vec{E} e $\vec{H} \rightarrow$ vetores que não dependem do tempo
- Sendo \bar{E} e \bar{H} os **fasores** dos campos \vec{E} e \vec{H}


$$\bar{E} = \bar{E}(x, y, z)$$
$$\bar{H} = \bar{H}(x, y, z)$$

Guia de Ondas Retangular

- Considerando \vec{E} e \vec{H} campos harmônicos ou senoidais

Fórmula de Euler $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \text{sen}(\omega t)$ 

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re}[\bar{E}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}]$$
$$\vec{H}(x, y, z, t) = \text{Re}[\bar{H}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}]$$

- $\bar{E}(x, y, z)$ e $\bar{H}(x, y, z)$ são os **fasores** dos campos \vec{E} e \vec{H}
- Em coordenadas cartesianas

$$\bar{E} = E_x \cdot \hat{a}_x + E_y \cdot \hat{a}_y + E_z \cdot \hat{a}_z$$

$$\bar{H} = H_x \cdot \hat{a}_x + H_y \cdot \hat{a}_y + H_z \cdot \hat{a}_z$$

Guia de Ondas Retangular

■ Equação de onda na forma fasorial

- Em meio dielétrico sem perdas, linear, homogêneo e isotrópico, sem fontes de campo (ρ e J)

$$\nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \bar{E} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \bar{H} + \omega^2 \mu \varepsilon \bar{H} = \vec{0}$$

Mas,
 $\omega^2 \mu \varepsilon = k^2$



$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} &= \vec{0} \\ \nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$: constante de propagação

ω : frequência angular, $\omega = 2\pi f$

μ : permeabilidade magnética do meio

ε : permissividade elétrica do meio

$$\bar{E} = E_x \cdot \hat{a}_x + E_y \cdot \hat{a}_y + E_z \cdot \hat{a}_z \quad \bar{H} = H_x \cdot \hat{a}_x + H_y \cdot \hat{a}_y + H_z \cdot \hat{a}_z$$

Guia de Ondas Retangular

- **Equação de onda fasorial**

- Em função das componentes do fasor do Campo Elétrico: E_x , E_y e E_z

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = \vec{0} \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \quad \text{em } \hat{a}_x \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0 \quad \text{em } \hat{a}_y \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0 \quad \text{em } \hat{a}_z \end{array} \right.$$

Sendo $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

Guia de Ondas Retangular

- **Equação de onda fasorial**

- Em função das componentes do fasor do Campo Magnético H_x , H_y e H_z

$$\nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = \vec{0} \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0 \quad \text{em } \hat{a}_x \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k^2 H_y = 0 \quad \text{em } \hat{a}_y \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0 \quad \text{em } \hat{a}_z \end{array} \right.$$

Sendo $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM

Guia de Ondas Retangular

■ Solução dos Modos TM

- Em modos TM existe componente de campo elétrico não-nula na direção de propagação z

$$E_z \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{a ser determinado}$$

- Campo harmônico ou senoidal

$$E_z(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \neq 0$$

- Cálculo de $E_z \Rightarrow$ equação de onda na direção z

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0$$

Guia de Ondas Retangular

- **Modos TM** – Na direção z: $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0$

$$\frac{\partial^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)]}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)]}{\partial z^2} + k^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)] = 0$$

Sendo: $X''(x) = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$ $Y''(y) = \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$ $Z''(z) = \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$

Tem-se:

$$X''(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) + X(x) \cdot Y''(y) \cdot Z(z) + X(x) \cdot Y(y) \cdot Z''(z) + k^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)] = 0$$

Guia de Ondas Retangular

- **Modos TM**

- Dividindo-se ambos os termos de

$$X''(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) + X(x) \cdot Y''(y) \cdot Z(z) + X(x) \cdot Y(y) \cdot Z''(z) + k^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)] = 0$$

por $E_z(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \neq 0$

Obtém-se
$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2 = 0$$

Guia de Ondas Retangular

■ Modos TM

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}} + \underbrace{\frac{Y''(y)}{Y(y)}} + \underbrace{\frac{Z''(z)}{Z(z)}} + k^2 = 0$$

Ou

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k^2 = 0$$

onde

$$-k_x^2 = \frac{X''}{X} \quad -k_y^2 = \frac{Y''}{Y} \quad -k_z^2 = \frac{Z''}{Z} = \gamma^2$$

$$k_x \text{ e } k_y : \text{ constantes} \quad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad \gamma = \alpha + j \cdot \beta$$

γ : fator de propagação da onda EM ao longo da direção de propagação z , em geral é um número complexo

Guia de Ondas Retangular

- **Modos TM**

- Soluções particulares de equações diferenciais

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2 \rightarrow X(x): \cos(k_x \cdot x) \text{ e } \sin(k_x \cdot x)$$

$$\frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \rightarrow Y(y): \cos(k_y \cdot y) \text{ e } \sin(k_y \cdot y)$$

$$\frac{Z''}{Z} = \gamma^2 \rightarrow Z(z): e^{-\gamma \cdot z} \text{ e } e^{+\gamma \cdot z}$$

- Soluções genéricas de equações diferenciais
 - Combinação linear das soluções particulares

Guia de Ondas Retangular

■ Modos TM

Soluções genéricas de equações diferenciais

Determinar

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2 \rightarrow X(x) = A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x) \rightarrow A, B, k_x$$

$$\frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \rightarrow Y(y) = C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y) \rightarrow C, D, k_y$$

$$\frac{Z''}{Z} = \gamma^2 \rightarrow Z(z) = F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z}$$
$$-k_x^2 - k_y^2 + \gamma^2 + k^2 = 0 \quad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \rightarrow F, G e \gamma$$

Guia de Ondas Retangular

- **Modos TM**

- Solução geral de $E_z = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$

$$E_z = [A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x)] \cdot \\ [C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y)] \cdot \\ [F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z}]$$

sendo A, B, C, D, F e G constantes reais

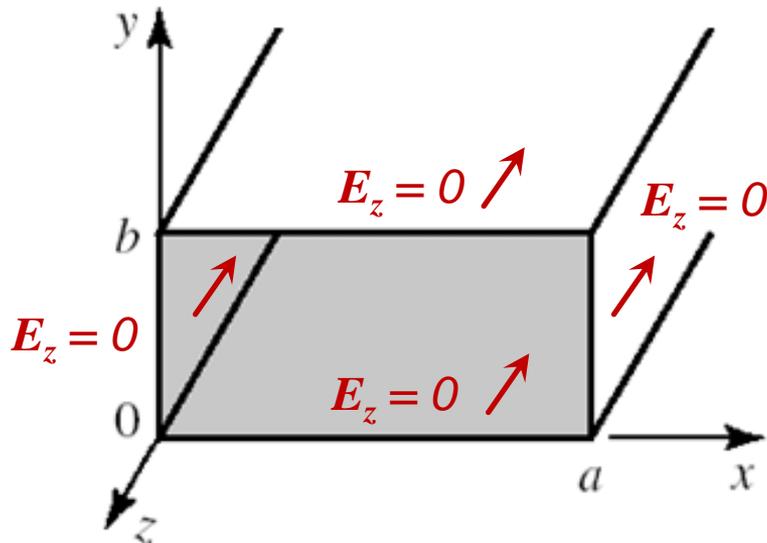
- Determinação das constantes A, B, C, D, F e G
 - Aplicação das condições de contorno do guia de ondas

Guia de Ondas Retangular

■ Modos TM

■ Condições de contorno

- Campo elétrico tangencial ao metal é nulo
- Logo E_z é nulo nas paredes metálicas do guia de ondas



■ $E_z = 0$

- Paredes verticais do guia
 - $x = 0$ e $x = a$
- Paredes horizontais do guia
 - $y = 0$ e $y = b$

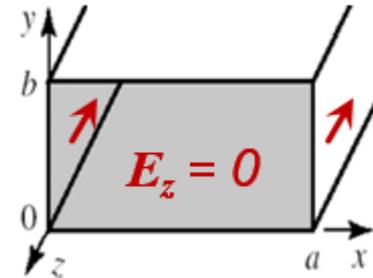
Guia de Ondas Retangular

Modos TM

$$E_z(x, y, z) = [A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x)] \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

- *Condição de contorno:*

$$E_z = 0 \text{ em } x = 0, \text{ para qualquer } y \text{ e } z$$



$$E_z(0, y, z) = \underbrace{[A \cdot \cos(0)]}_A + \underbrace{[B \cdot \text{sen}(0)]}_0 \cdot Y(y) \cdot Z(z) = 0$$

$$E_z(0, y, z) = [A] \cdot Y(y) \cdot Z(z) = 0, \quad \forall y \text{ e } \forall z \rightarrow A = 0$$

- Logo

$$E_z(x, y, z) = [B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x)] \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM

$$E_z(x, y, z) = [B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x)] \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

- *Condição de contorno:*

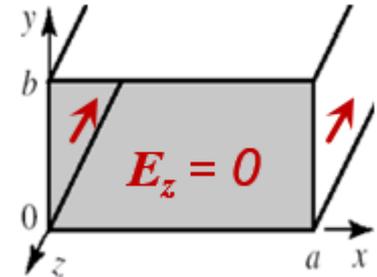
$E_z = 0$ em $x = a$, para qualquer y e z

$$E_z(a, y, z) = [B \cdot \text{sen}(k_x \cdot a)] \cdot Y(y) \cdot Z(z) = 0$$

$$\text{sen}(k_x \cdot a) = 0 \rightarrow k_x \cdot a = m \cdot \pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\therefore k_x = \frac{m \cdot \pi}{a} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$E_z(x, y, z) = \left[B \cdot \text{sen} \left(\frac{m \cdot \pi}{a} \cdot x \right) \right] \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad m = 1, 2, 3, \dots$$



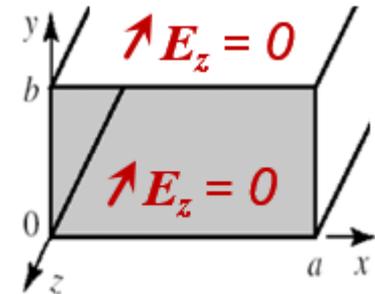
Guia de Ondas Retangular

Modos TM

$$E_z(x, y, z) = X(x) [C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y)] \cdot Z(z)$$

- *Condição de contorno:*

$$E_z = 0 \text{ em } y = 0, \text{ para qualquer } x \text{ e } z$$



$$E_z(x, 0, z) = X(x) \cdot \left[\frac{C \cdot \cos(0)}{C} + \frac{D \cdot \text{sen}(0)}{0} \right] \cdot Z(z) = 0$$

$$E_z(x, 0, z) = X(x) \cdot [C] \cdot Z(z) = 0, \quad \forall y \text{ e } \forall z \rightarrow C = 0$$

- Logo

$$E_z(x, y, z) = X(x) \cdot [D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y)] \cdot Z(z)$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM

$$E_z(x, y, z) = X(x) \cdot [D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y)] \cdot Z(z)$$

- *Condição de contorno:*

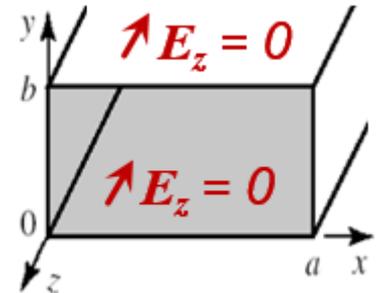
$E_z = 0$ em $y = b$, para qualquer x e z

$$E_z(x, b, z) = X(x) \cdot [D \cdot \text{sen}(k_y \cdot b)] \cdot Z(z) = 0$$

$$\text{sen}(k_y \cdot b) = 0 \rightarrow k_y \cdot b = n \cdot \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\therefore k_y = \frac{n \cdot \pi}{b} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$E_z(x, y, z) = X(x) \cdot \left[D \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{b} \cdot y \right) \right] \cdot Z(z) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Guia de Ondas Retangular

Modos TM

$$E_z(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot [F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z}]$$

- Sendo $\gamma = \alpha + j\beta \rightarrow G \cdot e^{+\gamma \cdot z} = G \cdot e^{+\alpha \cdot z} \cdot e^{+i\beta \cdot z}$
- Para onda EM propagando-se na direção de z positivo
 - Se $G \neq 0$ amplitude da onda EM cresce a medida que se propaga
 - Não tem sentido físico $\rightarrow G \neq 0$

$$E_z(x, y, z) = \underbrace{B \cdot D \cdot F}_{E_0} \cdot \text{sen} \left(\frac{m \cdot \pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

sendo $m = 1, 2, 3 \dots$ $n = 1, 2, 3 \dots$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM

$$E_z(x, y, z) = E_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{m \cdot \pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

sendo $m = 1, 2, 3 \dots$ $n = 1, 2, 3 \dots$

- γ é o fator de propagação
 - Tem-se que

$$-k_x^2 - k_y^2 + \gamma^2 + k^2 = 0$$

- Logo

$$\gamma = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM

Fator de propagação: $\gamma = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, m = 1, 2, 3...$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, n = 1, 2, 3...$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

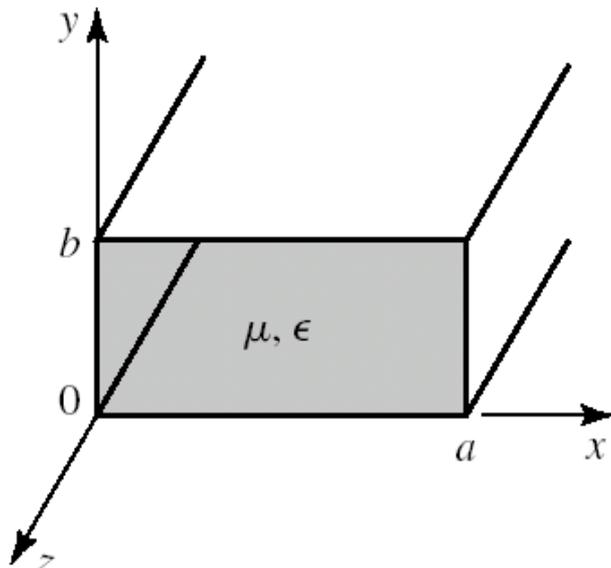
$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

Analisaremos esta equação mais a frente

Guia de Ondas Retangular

- **Modos TM** – propagação segundo o eixo z positivo

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z} \quad H_z = 0$$



- **Modo TM_{mn}**

onde

- $m = 1, 2, 3, \dots$
- $n = 1, 2, 3, \dots$

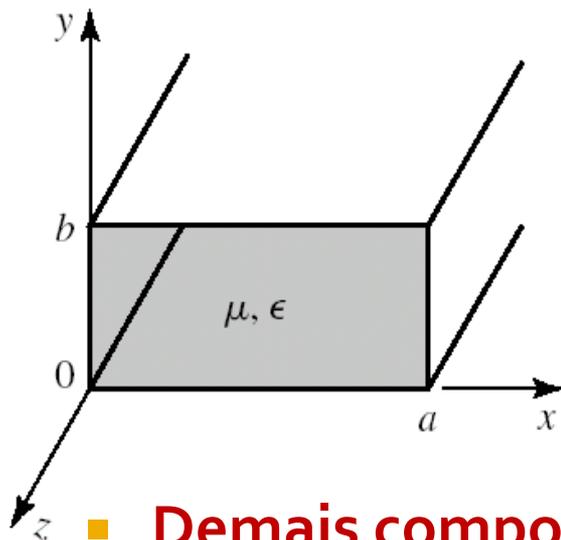
Importante: $m \neq 0$ e $n \neq 0$

(se m ou $n = 0 \Rightarrow E_z = 0 \Rightarrow$ não é modo TM!)

- **Modos TM_{11} TM_{12} TM_{21} TM_{22} TM_{13} TM_{31} TM_{23} **

Guia de Ondas Retangular

- **Modos TM** – propagação segundo o eixo z positivo



$$H_z = 0$$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- **Demais componentes dos modos TM?**

$$H_x = ? \quad H_y = ?$$

$$E_x = ? \quad E_y = ?$$

Guia de Ondas Retangular

Campos E e H dependentes de $e^{-\gamma \cdot z}$

- Equações de Maxwell na forma fasorial
- Meio linear, isotrópico e homogêneo
- Sem correntes ($J = 0$) ou cargas ($\rho = 0$)

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\gamma E_y &= -j\omega\mu H_x \\ -j\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu H_z\end{aligned}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\gamma H_y &= j\omega\epsilon E_x \\ -j\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\epsilon E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\epsilon E_z\end{aligned}$$

Guia de Ondas Retangular

Campos E e H dependentes de $e^{-\gamma \cdot z}$

- Resolvendo-se o sistema de 6 equações, do slide anterior
- Obtém-se E_x , E_y , H_x e H_y em função de $\frac{\partial E_z}{\partial x}$, $\frac{\partial E_z}{\partial y}$, $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ e $\frac{\partial H_z}{\partial y}$

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$k_c^2 = k^2 - \gamma^2$$

$$k^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon$$

Guia de Ondas Retangular

Modo TM

- Tem-se $H_z = 0$ e $E_z \neq 0$
- As equações de E_x , E_y , H_x e H_y resultam

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$
$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$
$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

$$k_c^2 = k^2 - \gamma^2$$

$$k^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM_{mn} $\Rightarrow H_z = 0$ e $E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$

$$E_x = \frac{-j\gamma m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\gamma n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Guia de Ondas Retangular

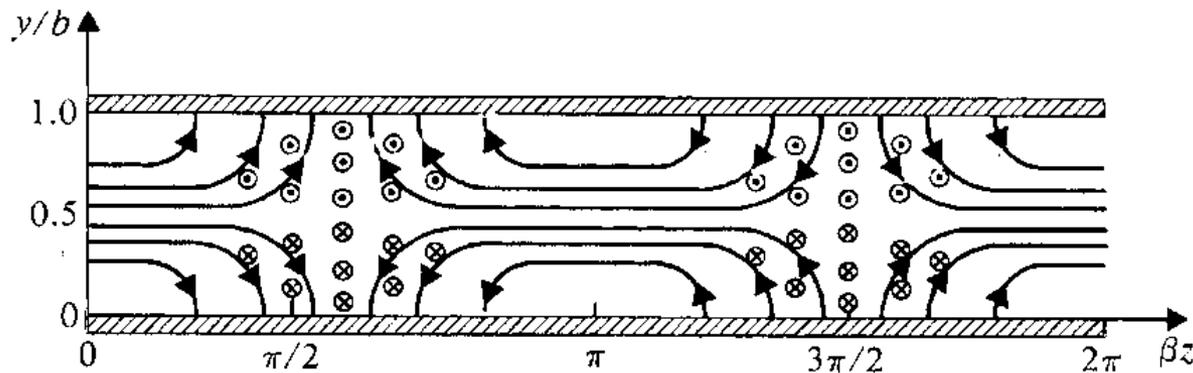
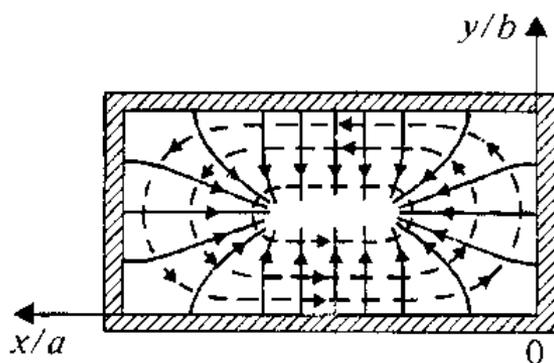
Modo TM_{11}

- $m = 1$
- $n = 1$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_x = \frac{-j\gamma\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\gamma\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$



—— Campo E - - - - Campo H

Guia de Ondas Retangular

Modo TM_{21}

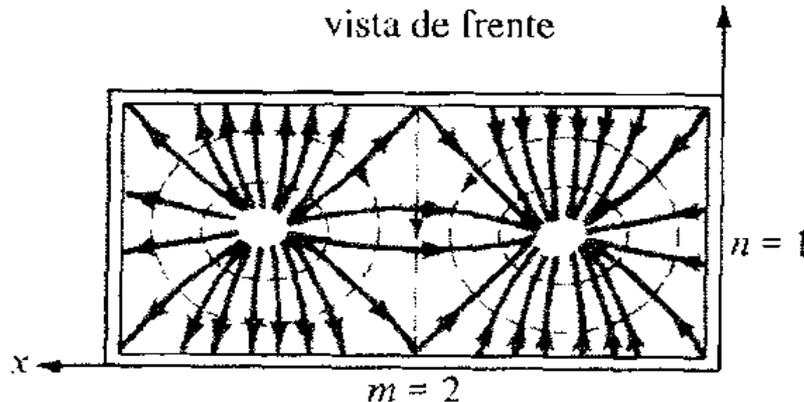
- $m=2$
- $n=1$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

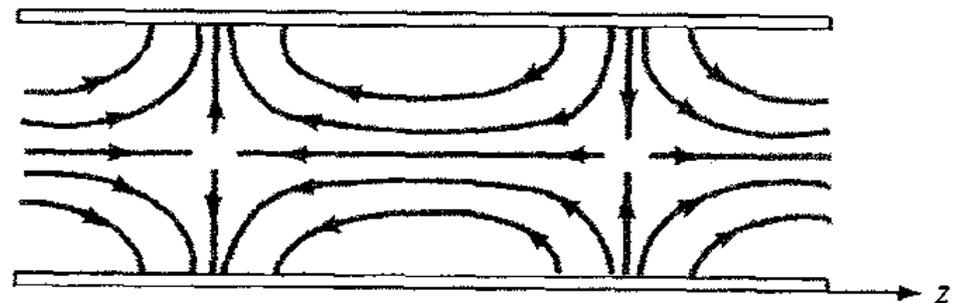
$$E_x = \frac{-j\gamma\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\gamma\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

vista de frente



vista de lado



— Campo E

- - - Campo H

Guia de Ondas Retangular

Comparando os modos TM_{11} e TM_{21}

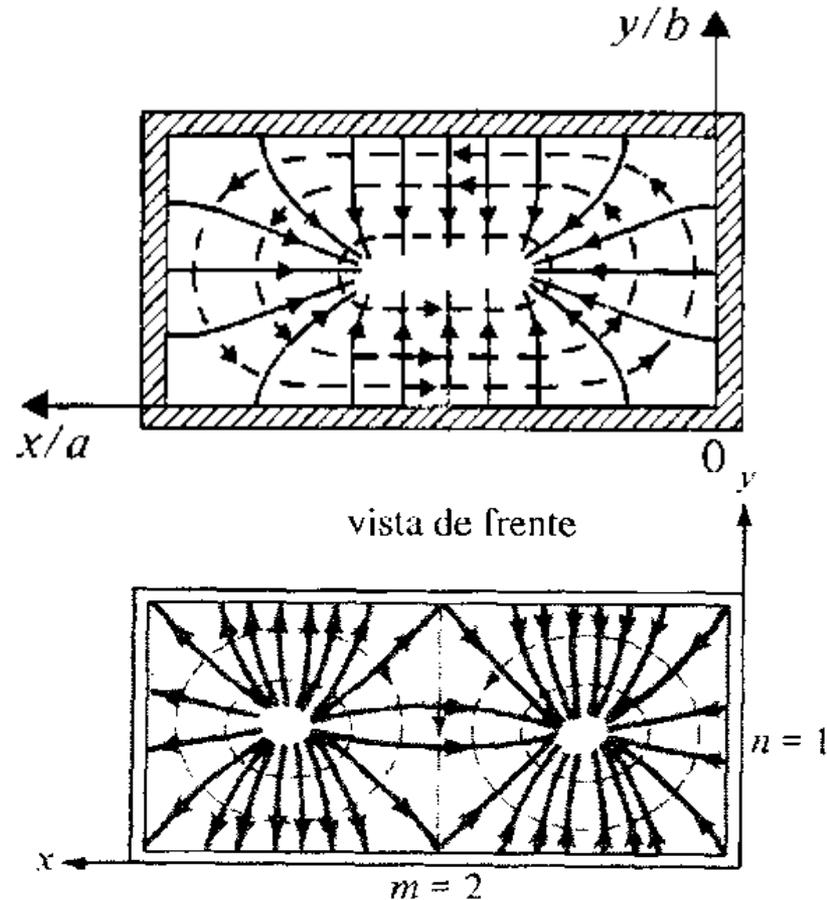
- Modo TM_{11}

- $m = 1$
- $n = 1$

- Modo TM_{21}

- $m = 2$
- $n = 1$

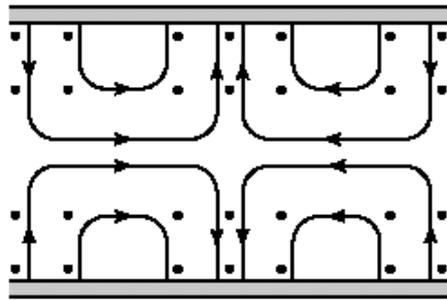
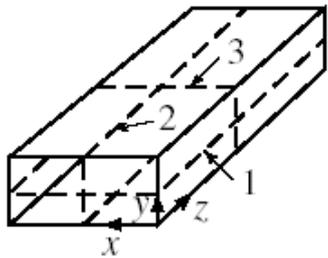
—— Campo E
- - - - Campo H



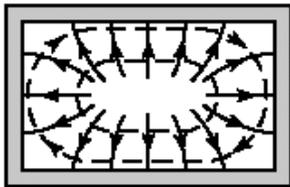
Guia de Ondas Retangular

Comparando os modos TM_{11} e TM_{21}

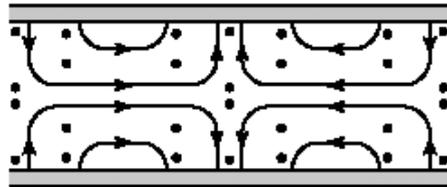
TM_{11}



1

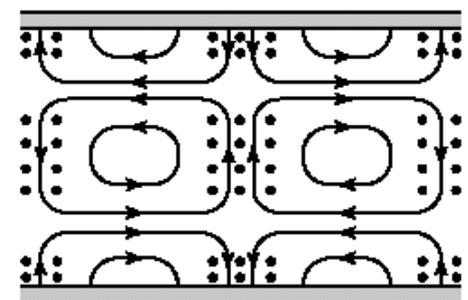
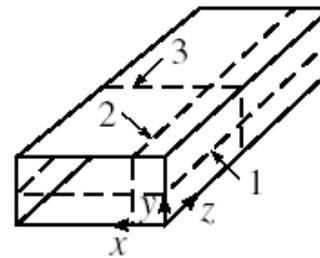


3

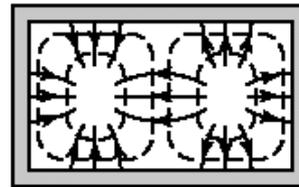


2

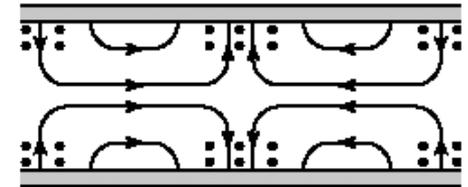
TM_{21}



1



3



2

Guia de Ondas Retangular

γ - Fator de propagação do modo TM_{mn}

$$-k_x^2 - k_y^2 + \gamma^2 + k^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$$

- Modos TM

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

Guia de Ondas Retangular

Fator de propagação do modo TM_{mn}

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

- γ é função
 - Características do guia de ondas
 - Secção transversal: a e b
 - Dielétrico no interior do guia: μ e ϵ
 - Do modo de propagação: m e n
 - Da frequência f da onda EM: $\omega = 2\pi f$

Guia de Ondas Retangular

Fator de propagação do modo TM_{mn}

- Dependendo da frequência, tem-se três condições

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

$$\omega \text{ tal que } \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon > 0 \rightarrow \gamma = \alpha, \text{ número real}$$

$$\omega \text{ tal que } \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon = 0 \rightarrow \gamma = 0$$

$$\omega \text{ tal que } \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon < 0 \rightarrow \gamma = j\beta, \text{ número imaginário}$$

Guia de Ondas Retangular

Fator de propagação do modo TM_{mn}

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

- γ é função da frequência $\rightarrow \omega = 2\pi f$
- Operação do guia de ondas, dependendo da frequência

$$\gamma = \alpha$$



Modos
evanescentes

$$\gamma = 0$$



Corte

$$\gamma = j \cdot \beta$$



Modos
propagantes

Guia de Ondas Retangular

Modos evanescentes

- Para ω tal que
$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon > 0$$
- Fator de propagação do modo TM_{mn} é um número real e positivo

$$\rightarrow \gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = \alpha, \text{ número real e positivo}$$

O campo EM é **evanescente** \rightarrow decresce exponencialmente com z ,
direção de propagação

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \overbrace{e^{-\alpha \cdot z}}$$

Guia de Ondas Retangular

Modos propagantes

- Para ω tal que $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon < 0$
- Fator de propagação do modo TM_{mn} é um número puramente imaginário

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = j \cdot \beta$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

O campo EM **propaga-se** ao longo de **z**, com constante de propagação β

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \overbrace{e^{-j \cdot \beta \cdot z}}$$

Guia de Ondas Retangular

Corte

Frequência angular de corte do modo TM_{mn} - ω_c (rad/s)

- ω_c é a frequência angular limite entre modos evanescentes e propagantes
- Na frequência angular de corte - ω_c

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega_c^2 \mu\epsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega_c^2 \mu\epsilon = 0$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \omega_c = v \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$: velocidade da onda no meio sem fronteiras

Guia de Ondas Retangular

Corte

Frequência de corte do modo TM_{mn} - f_c (Hz)

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \longrightarrow f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- A frequência de corte é função de
 - a e b - dimensões da seção transversal do guia
 - m e n – índices do modo de propagação
 - μ e ϵ do meio dielétrico que preenche o guia de ondas
- Modos $TM_{mn} \rightarrow m = 1, 2, 3, \dots$ e $n = 1, 2, 3, \dots$
 - TM_{11} TM_{12} TM_{21} TM_{22} TM_{13} TM_{31} TM_{23} ...

Guia de Ondas Retangular

Corte

Frequência de corte do modo TM_{mn} - f_c

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- Guias de ondas comportam-se como **filtros passa-alta**
- Somente sinais com frequência $f > f_c$ propagam-se no guia
 - $f < f_c \rightarrow$ *modos evanescentes* \rightarrow *a onda EM é exponencialmente atenuada no interior do guia de onda*
 - $f = f_c \rightarrow$ *corte* \rightarrow *frequência limite entre atenuação ou propagação*
 - $f > f_c \rightarrow$ *a onda EM propaga-se no interior do guia de ondas*

Guia de Ondas Retangular

Exercício – Modos TM_{mn}

- Considere um guia de ondas retangular, sem perdas
 - Dimensões da seção transversal: $a = 40 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$
 - Preenchido por ar $\rightarrow \epsilon_r = 1 \rightarrow v = c = 3 \cdot 10^{11} \text{ mm/s}$
- Calcule a frequência de corte dos modos TM_{11} , TM_{21} , e TM_{12} e TM_{22}

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \Rightarrow f_c = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2}$$

$$f_c = 1,5 \cdot 10^{11} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2} \text{ (Hz)} \quad \text{ou} \quad f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2} \text{ (GHz)}$$

Guia de Ondas Retangular

Exercício – Modos TM_{mn}

- Frequência de corte dos modos TM_{11} , TM_{21} , e TM_{12} e TM_{22}

$$TM_{11} \rightarrow m=1 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = 8,38 \text{ GHz}$$

$$TM_{21} \rightarrow m=2 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = 10,61 \text{ GHz}$$

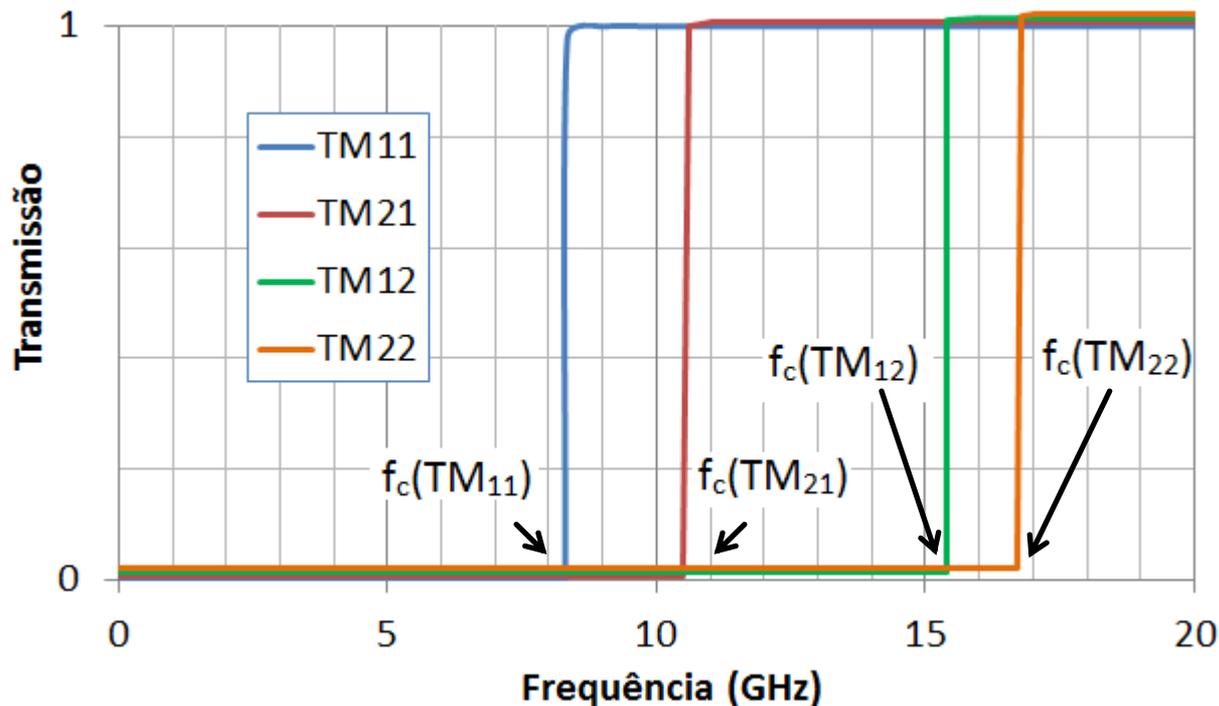
$$TM_{12} \rightarrow m=1 \text{ e } n=2 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{2}{20}\right)^2} = 15,46 \text{ GHz}$$

$$TM_{22} \rightarrow m=2 \text{ e } n=2 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{40}\right)^2 + \left(\frac{2}{20}\right)^2} = 16,77 \text{ GHz}$$

Guia de Ondas Retangular

Exercício – Modos TM_{mn}

Frequência de corte dos modos TM_{11} , TM_{21} , e TM_{12} e TM_{22}



Guia de Ondas Retangular

Exercício – Modos TM_{mn}

- Guia WR90, sem perdas
 - Dimensões da seção transversal
 - $a = 22,86 \text{ mm}$
 - $b = 10,16 \text{ mm}$
 - Preenchido por ar
 - Calcule a frequência de corte dos modos TM_{11} , TM_{21}

$$TM_{11} \rightarrow m=1 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 16,16 \text{ GHz}$$

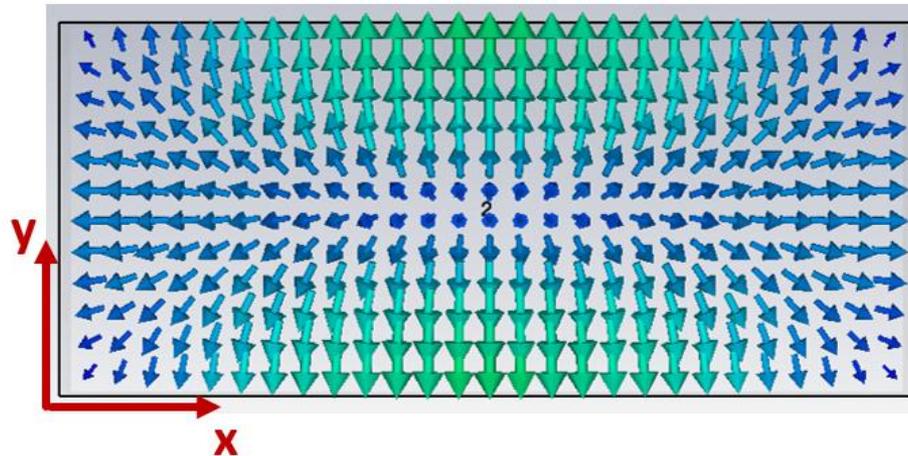
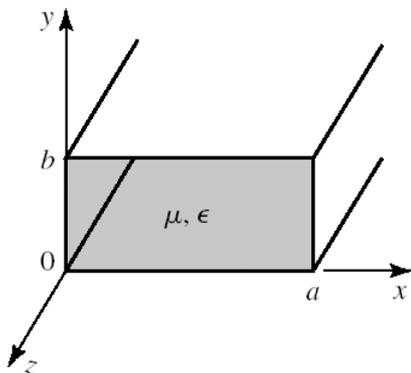
$$TM_{21} \rightarrow m=2 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 19,75 \text{ GHz}$$

Guia de Ondas Retangular

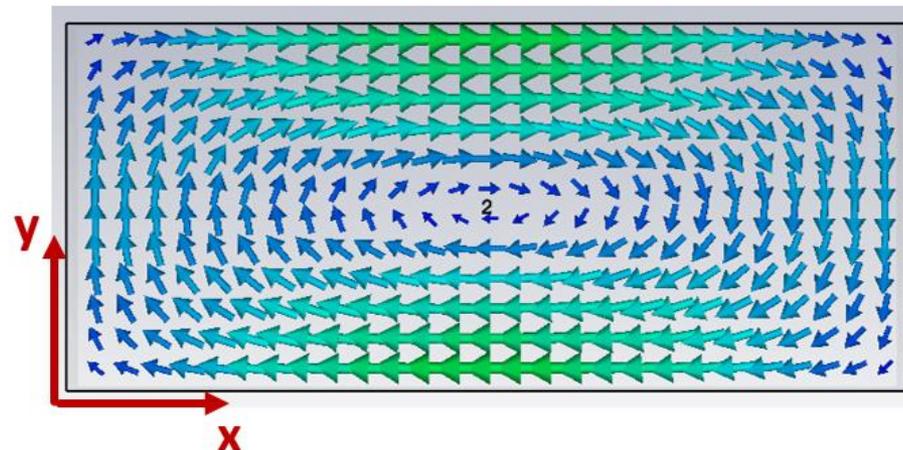
Guia WR90

Simulação no CST
Microwave Studio

Modo TM_{11}
 $f=18$ GHz



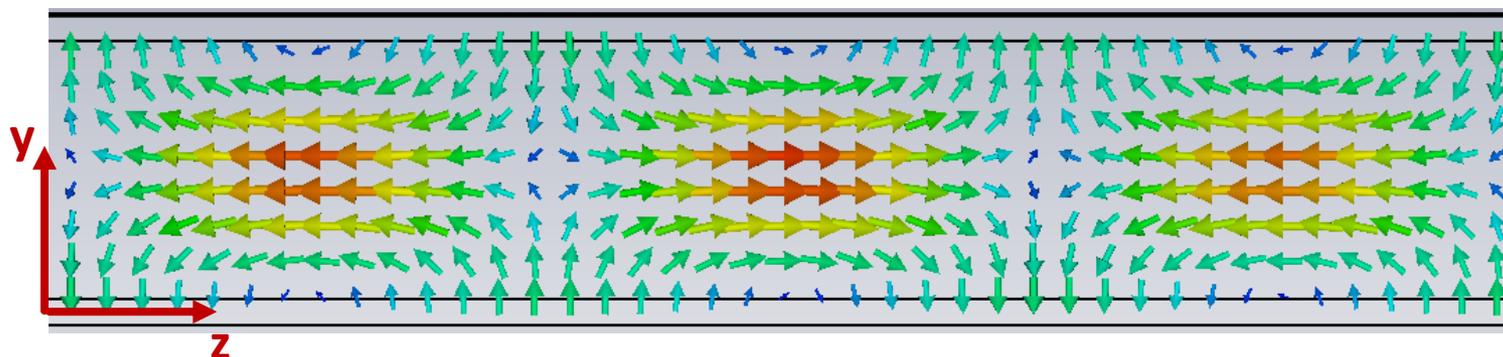
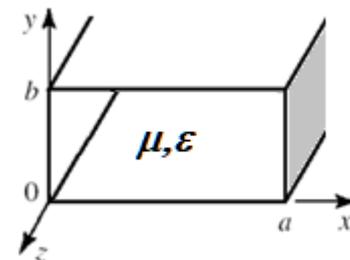
Campo
Elétrico
 $E_z \neq 0$



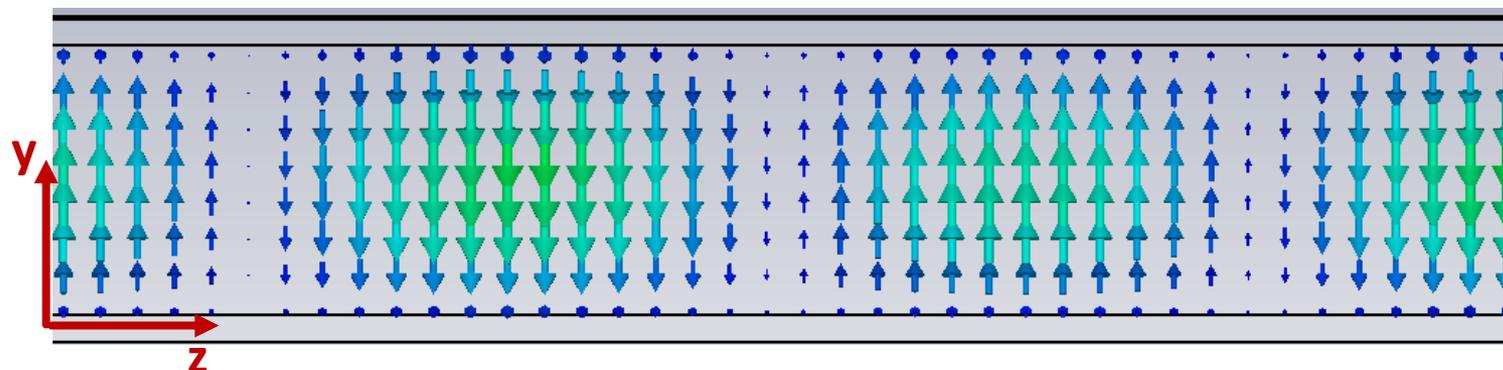
Campo
Magnético
 $H_z = 0$

Guia de Ondas Retangular

Guia WR90 - Simulação no CST Microwave Studio
Modo TM_{11} - $f=18$ GHz, na direção de propagação



Campo Elétrico
 $E_z \neq 0$



Campo Magnético
 $H_z = 0$

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo

- Uma vez conhecidos os **fasores de campo** elétrico e magnético

$$\begin{aligned}\bar{E} &= E_x \cdot \hat{a}_x + E_y \cdot \hat{a}_y + E_z \cdot \hat{a}_z \\ \bar{H} &= H_x \cdot \hat{a}_x + H_y \cdot \hat{a}_y + H_z \cdot \hat{a}_z\end{aligned}$$

Não dependem do tempo

- Obtém-se os **vetores de campo** elétrico magnético

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \text{Re}[\bar{E}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}] \\ \vec{H}(x, y, z, t) &= \text{Re}[\bar{H}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}]\end{aligned}$$

Onda EM propagando-se

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo

- Fasor do campo elétrico: $\bar{E}(x, y, z) = E_x \cdot \hat{a}_x + E_y \cdot \hat{a}_y + E_z \cdot \hat{a}_z$
- Modo TM

$$E_x = \frac{-j\gamma m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\gamma n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo – Modo TM

- Acima da frequência de corte → modos propagantes
- Guia de ondas sem perdas: $\gamma = j \cdot \beta$

$$E_x = \frac{-j\gamma m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\gamma n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z}$$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z}$$

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo – Modo TM

Campo Elétrico em função de x, y, z e $t \rightarrow \vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re}[\bar{E}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}]$

$$\begin{aligned}\vec{E} = & \text{Re} \left[\frac{-j\gamma m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z} \cdot e^{j\omega t} \right] \cdot \hat{a}_x \\ & + \text{Re} \left[\frac{-j\gamma n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z} \cdot e^{j\omega t} \right] \cdot \hat{a}_y \\ & + \text{Re} \left[E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z} \cdot e^{j\omega t} \right] \cdot \hat{a}_z\end{aligned}$$

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo – Modo TM

- Campo Elétrico $\vec{E}(x, y, z, t)$

$$\begin{aligned}\vec{E} = & \operatorname{Re} \left[-j \cdot E_x \cdot \cos \left(\frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{j \cdot (\omega t - \beta \cdot z)} \right] \cdot \hat{a}_x \\ & + \operatorname{Re} \left[-j \cdot E_y \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \cos \left(\frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{j \cdot (\omega t - \beta \cdot z)} \right] \cdot \hat{a}_y \\ & + \operatorname{Re} \left[E_z \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{j \cdot (\omega t - \beta \cdot z)} \right] \cdot \hat{a}_z\end{aligned}$$

- Sendo $e^{j(\omega t - \beta z)} = \cos(\omega t - \beta z) + j \cdot \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo – Modo TM

- Campo Elétrico

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) = & \left[E_x \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \underline{\text{sen}(\omega \cdot t - \beta \cdot z)} \right] \cdot \hat{a}_x \\ & + \left[E_y \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \underline{\text{sen}(\omega \cdot t - \beta \cdot z)} \right] \cdot \hat{a}_y \\ & + \left[E_z \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \underline{\cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z)} \right] \cdot \hat{a}_z\end{aligned}$$

↑
Onda propagando-se na direção z

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo – Modo TM

- De forma similar obtém-se o Campo Magnético

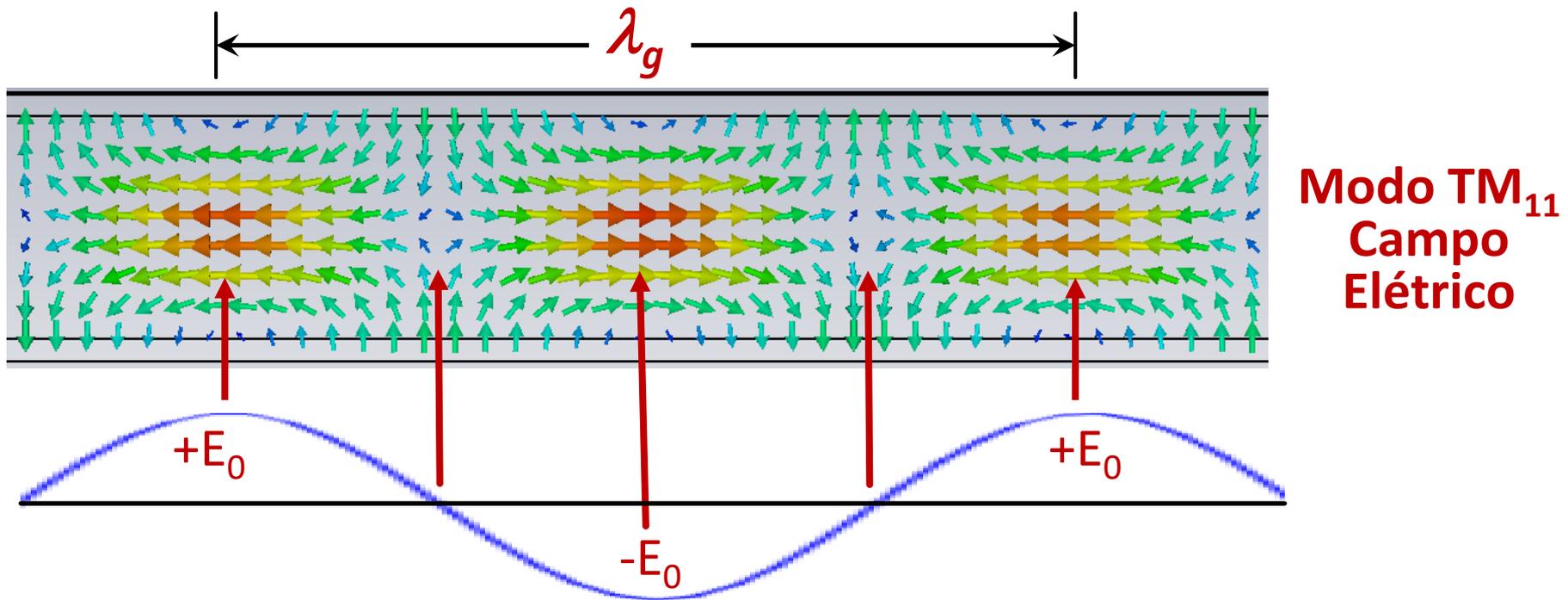
$$\begin{aligned}\vec{H}(x, y, z, t) = & \left[-H_x \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \underline{\text{sen}(\omega \cdot t - \beta \cdot z)} \right] \cdot \hat{a}_x \\ & + \left[H_y \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \underline{\text{sen}(\omega \cdot t - \beta \cdot z)} \right] \cdot \hat{a}_y \\ & + [0] \cdot \hat{a}_z\end{aligned}$$

Onda propagando-se na direção z

Guia de Ondas Retangular

λ_g - Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

- λ_g - distância entre dois máximos sucessivos de campo no interior do guia de ondas



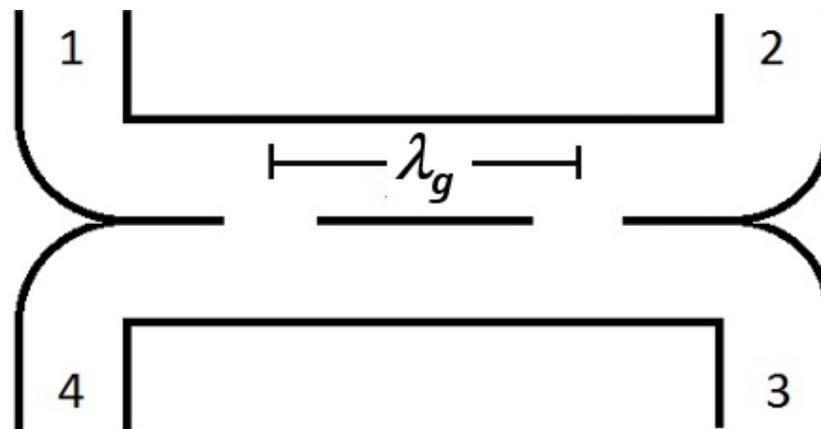
Guia de Ondas Retangular

λ_g - Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

- λ_g - parâmetro importante no projeto de circuitos em tecnologia de guia de ondas



Exemplo: acopladores em guia de ondas



Guia de Ondas Retangular

λ_g - Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} \quad \text{sendo} \quad \beta_{mn} = \sqrt{\underbrace{\omega^2 \mu \epsilon}_{k^2} - \left[\underbrace{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}_{k_c^2 = \omega_c^2 \mu \epsilon} \right]}$$

Logo:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \omega_c^2 \mu \epsilon} = 2\pi \sqrt{\underbrace{f^2 \mu \epsilon}_v - \underbrace{f_c^2 \mu \epsilon}_v} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{f}{v}\right)^2 - \left(\frac{f_c}{v}\right)^2}$$
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \rightarrow \mu \epsilon = \frac{1}{v^2}$$

Guia de Ondas Retangular

Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

Logo:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{2\pi}{2\pi \sqrt{\left(\frac{f}{v}\right)^2 - \left(\frac{f_c}{v}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{f^2 - f_c^2}}$$

Dividindo os dois termos por f

$$\lambda_g = \frac{\frac{v}{f}}{\sqrt{\left(\frac{f}{f}\right)^2 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \rightarrow$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

sendo $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \cdot f}$ ou

$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} \cdot f}$ para $\mu_r = 1$

Guia de Ondas Retangular

Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

sendo $\lambda = \frac{v}{f}$ ou $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$ e $\lambda_0 = \frac{c}{f}$

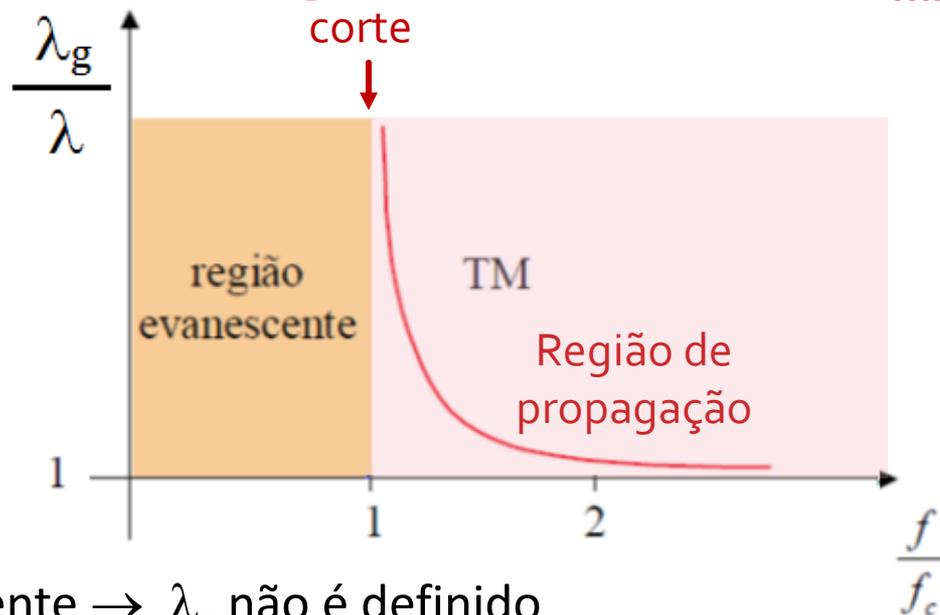
- λ : comprimento da onda que se propagaria no meio dielétrico que preenche o guia, **sem fronteiras**
- λ_g : comprimento de onda guiado (no **interior do guia de ondas**)
- f_c : frequência de corte do modo guiado

- Vale apenas para $f > f_c$
- Depende do modo de propagação TM_{mn} dentro do guia de ondas

Guia de Ondas Retangular

Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$



Para $f < f_c \rightarrow$ região evanescente $\rightarrow \lambda_g$ não é definido

Para $f = f_c \rightarrow$ corte $\rightarrow \lambda_g$ tende a infinito

Para $f > f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow \lambda_g$ decresce cresce com a frequência

Para $f \gg f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow \lambda_g$ tende a λ , comprimento de onda do meio

Guia de Ondas Retangular

Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

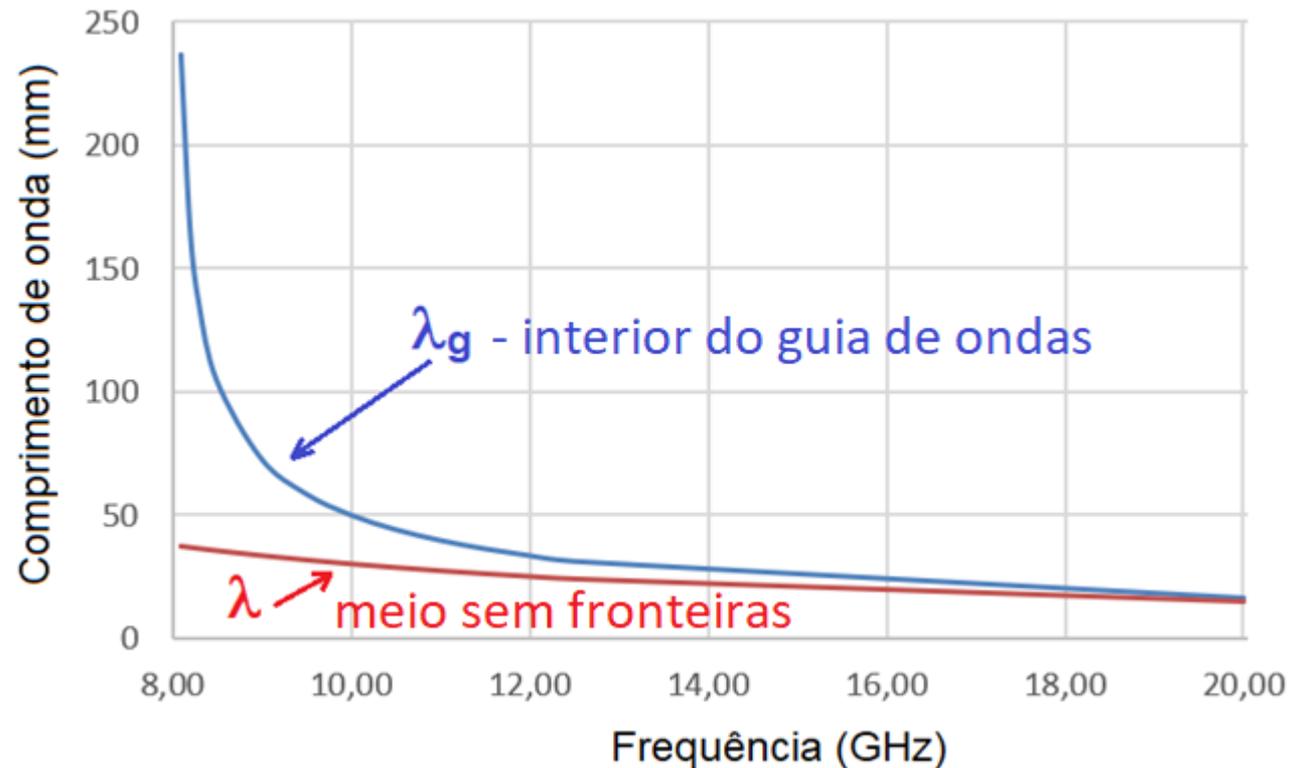
Exemplo

- Guia retangular
- Preenchido por ar
- Modo TM
- $f_c = 8 \text{ GHz}$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\epsilon_r}}$$

Comprimento de onda x frequência



Guia de Ondas Retangular

Z_{TM} - Impedância de onda do guia de ondas no modo TM_{mn}

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x}$$

- Na região de propagação, com $f > f_c$

$$E_x = \frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z}$$

- Logo $Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega\epsilon}$ sendo $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$

Guia de Ondas Retangular

Impedância de onda do guia de ondas no modo TM_{mn}

- Lembrando que

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \sqrt{k^2 - k_c^2} \\ k_c^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \omega_c^2 \mu \varepsilon \end{aligned} \right\} \rightarrow \beta = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \omega_c^2 \mu \varepsilon}$$

Logo
$$Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega \varepsilon} = \frac{\sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \omega_c^2 \mu \varepsilon}}{\omega \varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega^2}} = \eta \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

$$Z_{TM} = \eta \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad \text{sendo} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad \text{e} \quad \eta_0 = 377 \, \Omega$$

Guia de Ondas Retangular

- Impedância de onda do guia de ondas no modo TM_{mn}

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} \Rightarrow Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

η : impedância de onda intrínseca do meio que preenche o guia de ondas

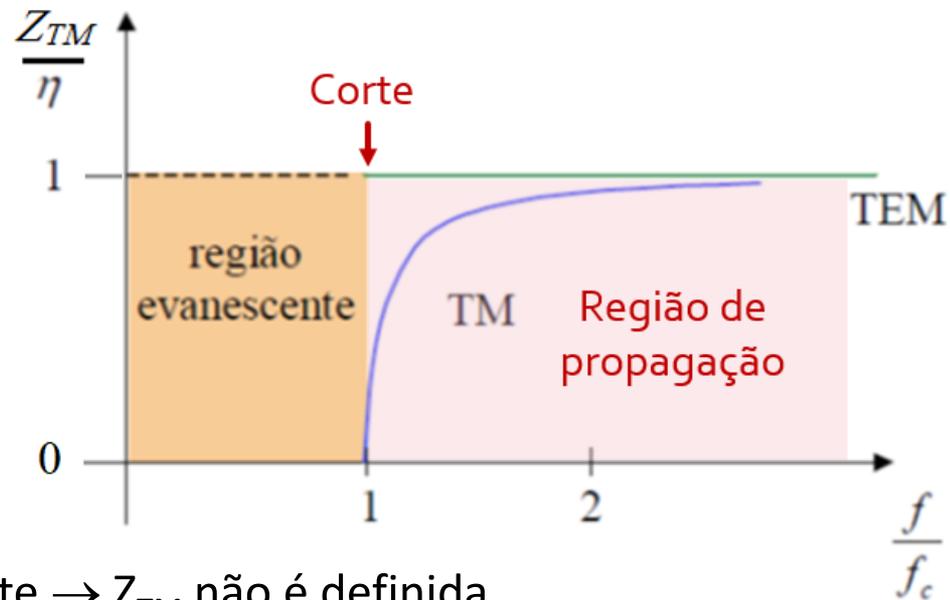
f_c : frequência de corte do modo guiado

- Equação válida somente para $f > f_c$
- Z_{TM} depende
 - da frequência do sinal
 - da frequência de corte do modo
- Z_{TM} é função de frequência \Rightarrow **dispersão**

Guia de Ondas Retangular

Impedância de onda do guia de ondas no modo TM_{mn}

$$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$



Para $f < f_c \rightarrow$ região evanescente $\rightarrow Z_{TM}$ não é definida

Para $f = f_c \rightarrow$ corte $\rightarrow Z_{TM}$ é nula \rightarrow curto-circuito

Para $f > f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow Z_{TM}$ cresce com a frequência de operação

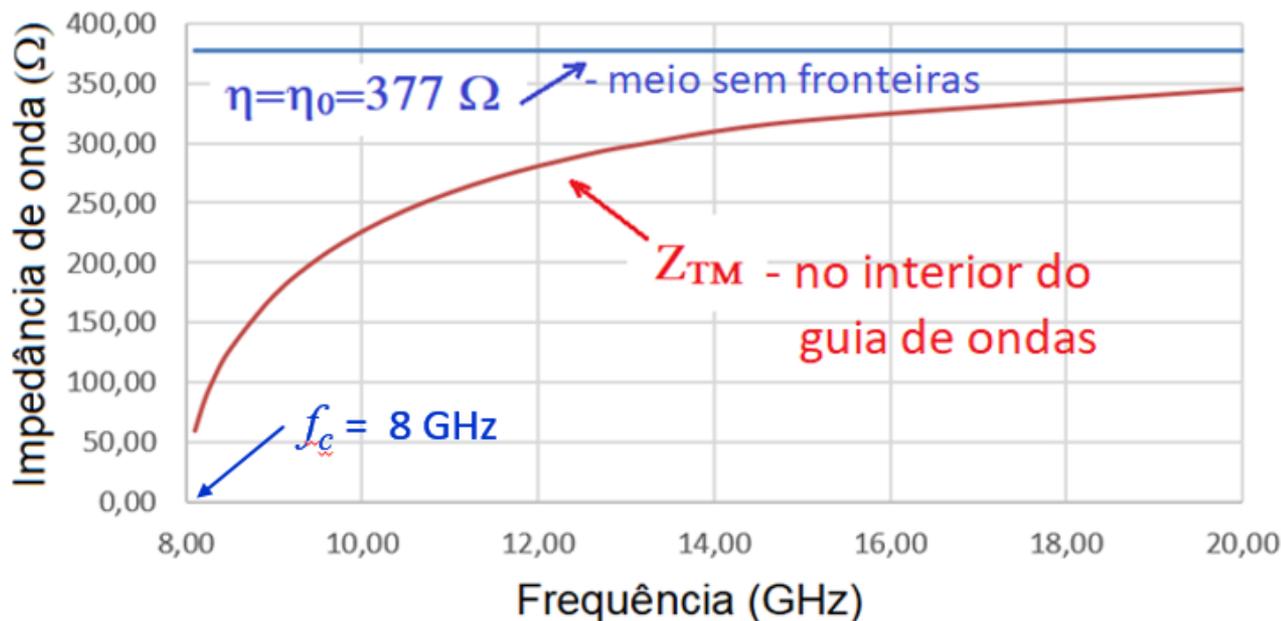
Para $f \gg f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow Z_{TM}$ tende a η , impedância intrínseca do meio

Guia de Ondas Retangular

Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

Exemplo: Guia retangular, preenchido por ar, modo TM , $f_c = 8$ GHz

Impedância de onda x frequência



$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y}$$

$$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Guia de Ondas Retangular

Modo TM_{mn} propagando-se na direção z – $E_z \neq 0$ e $H_z = 0$

**Campo
Elétrico**

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) = & \left[E_x \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \right] \cdot \hat{a}_x \\ & + \left[E_y \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \right] \cdot \hat{a}_y \\ & + \left[E_z \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \right] \cdot \hat{a}_z\end{aligned}$$

**Campo
Magnético**

$$\begin{aligned}\vec{H}(x, y, z, t) = & \left[-H_x \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \right] \cdot \hat{a}_x \\ & + \left[H_y \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \right] \cdot \hat{a}_y \\ & + [0] \cdot \hat{a}_z\end{aligned}$$

Guia de Ondas Retangular

Modo TM_{mn} propagando-se na direção $z - E_z \neq 0$ e $H_z = 0$

Frequência de corte $f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$, $m = 1, 2, 3\dots$ $n = 1, 2, 3\dots$

Comprimento de onda $\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$ $\lambda = \frac{v}{f}$ $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$

Impedância de onda $Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$ $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$ $\eta_0 = 377 \Omega$

Guia de Ondas Retangular

Modos TE

Guia de Ondas Retangular

Solução dos Modos TE

$$E_z = 0 \quad e \quad H_z \neq 0$$

- Componente do fasor de campo magnético não nulo na direção de propagação z

$$H_z \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{a ser determinado}$$

- Assumindo: $H_z \rightarrow$ Campo harmônico ou senoidal

$$H_z(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \neq 0$$

- Equação de onda da componente H_z

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0$$

Guia de Ondas Retangular

■ Solução dos Modos TE – cálculo de H_z

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z &= 0 \\ H_z(x, y, z) &= X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \neq 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2 &= 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & \\ -k_x^2 \quad -k_y^2 \quad -k_z^2 + k^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$-k_x^2 = \frac{X''}{X} \quad \rightarrow \quad X(x) = A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x)$$

$$-k_y^2 = \frac{Y''}{Y} \quad \rightarrow \quad Y(y) = C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y)$$

$$-k_z^2 = \frac{Z''}{Z} = \gamma^2 \quad \rightarrow \quad H_z = F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z}$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TE

- Solução geral de H_z do modo TE
 - Similar a obtida para E_z no modo TM

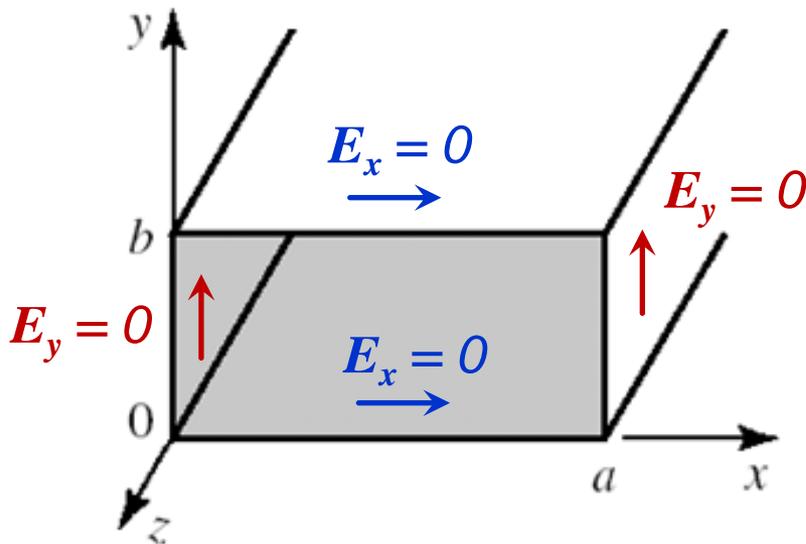
$$H_z = \left[A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x) \right] \cdot \left[C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y) \right] \cdot \left[F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z} \right]$$

- Obtenção de A, B, C, D, F e G, e de k_x , k_y e γ
 - Aplicação das condições de contorno do guia de ondas
 - $H_z \rightarrow$ *campo magnético*
 - Pode-se ter $H_z \neq 0$ nas paredes condutoras do guia de ondas

Guia de Ondas Retangular

Modos TE

- Condições de contorno
 - H_z não é nulo nas paredes do guia, mas temos
 - Campo elétrico tangencial ao metal é nulo



- $E_y = 0$ nas paredes verticais do guia
 - $x = 0$ e $x = a$
- $E_x = 0$ nas paredes horizontais do guia
 - $y = 0$ e $y = b$

Guia de Ondas Retangular

Modos TE

- No modo TE $\rightarrow E_z=0$, e os campos E_x e E_y são funções de derivadas de H_z

$$E_x = -j \frac{\gamma \omega \mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad e \quad E_y = -j \frac{\gamma \omega \mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

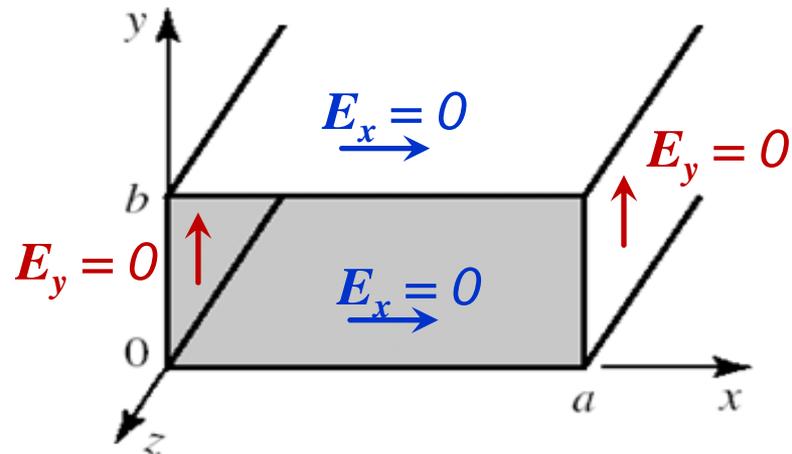
- Condições de contorno

- $E_y = 0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$

em $x = 0$ e $x = a$

- $E_x = 0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$

em $y = 0$ e $y = b$



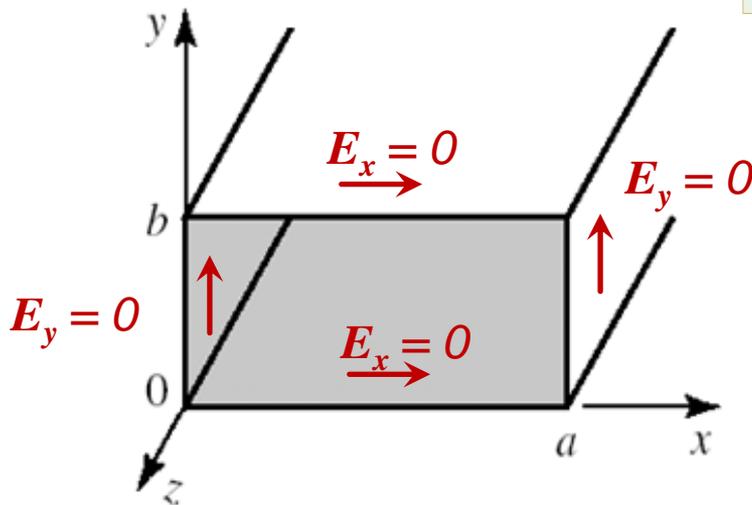
Guia de Ondas Retangular

Modos TE

- Aplicando-se as condições de contorno de E_x e E_y nas paredes do guia de ondas, obtém-se

$$E_z = 0$$

$$H_z = H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$



onde

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$m + n \neq 0$$



Se $m + n = 0 \Rightarrow H_z = H_0 = \text{cte}$

\Rightarrow não é modo TE

Guia de Ondas Retangular

Comparando Modos TE e TM....

Modos TE $E_z = 0$

$$H_z = H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

onde

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$m + n \neq 0$$

$$TE_{10}, TE_{01}, TE_{20}, TE_{02}, \dots$$

$$TE_{11}, TE_{12}, TE_{21}, TE_{22}, \dots$$

Modos TM $H_z = 0$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

onde

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$m \cdot n \neq 0$$

$$TM_{11}, TM_{12}, TM_{21}, TM_{22}, \dots$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TE

- A partir de H_z calcula-se

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_x = \frac{j\gamma m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_y = \frac{j\gamma n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Guia de Ondas Retangular

■ Modos TE_{mn}

- $m = 0, 1, 2, 3$ $n = 0, 1, 2, 3$ e $m + n \neq 0$

Modos TE_{01} TE_{10} TE_{11} TE_{02} TE_{20} TE_{21} TE_{22} TE_{03}

■ Frequência de corte do modo TE_{mn}

- Impondo $\gamma = 0$, obtém-se

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

(Mesma fórmula que a de modos TM)

$f < f_c$: modos evanescentes

$f = f_c$: corte

$f > f_c$: modos propagantes

Guia de Ondas Retangular

■ Modo TE₁₀

- **Modo dominante** → menor frequência de corte
- Frequência de corte para $m = 1$ e $n = 0$

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} \rightarrow f_c = \frac{v}{2 \cdot a}$$

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z} \rightarrow E_x = 0$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z} \rightarrow E_y \propto \text{sen}\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right)$$

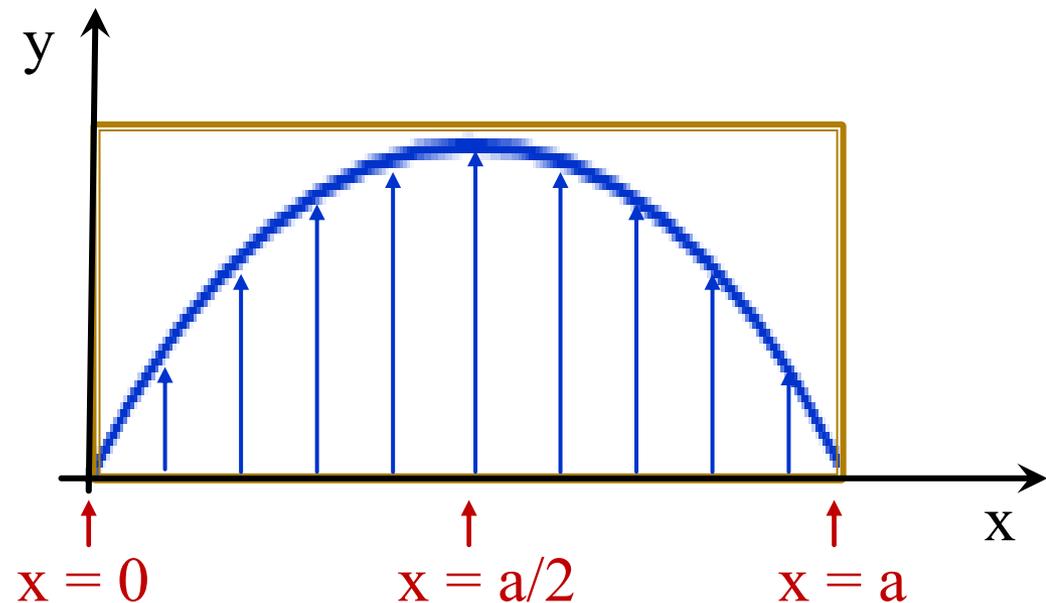
Guia de Ondas Retangular

■ Modo TE_{10}

- **Modo dominante** → menor frequência de corte
- Frequência de corte para $m = 1$ e $n = 0$

$$E_x = 0$$

$$E_y \propto \text{sen}\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right)$$



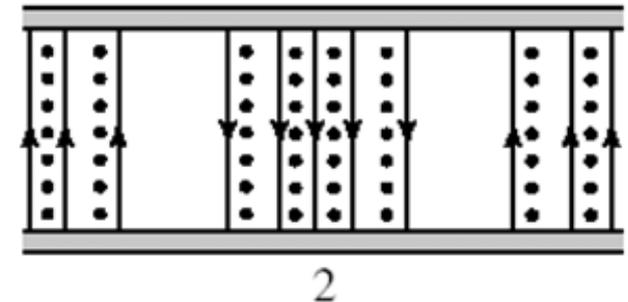
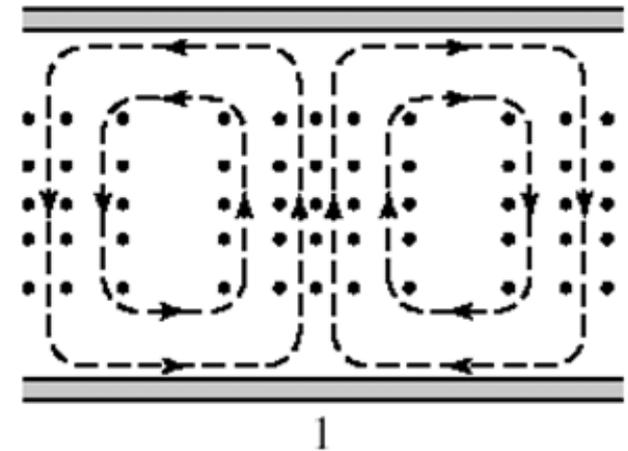
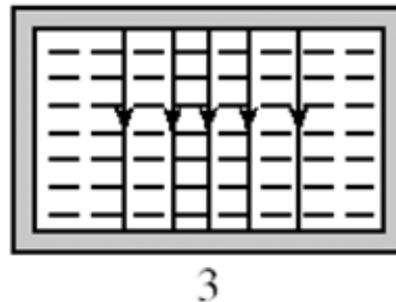
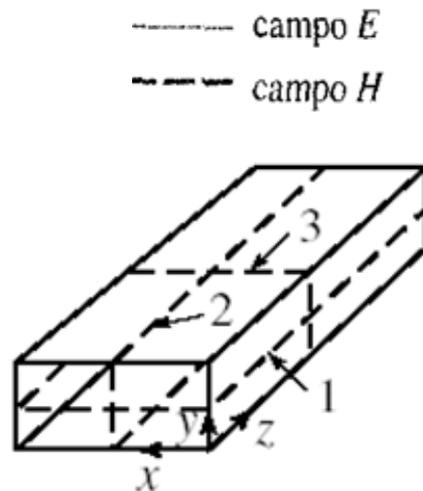
Guia de Ondas Retangular

- **Modo TE₁₀**
- Dominante
- Menor frequência de corte

$$f_c = \frac{v}{2 \cdot a}$$

$$E_x = 0$$

$$E_y \propto \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} \cdot x \right)$$

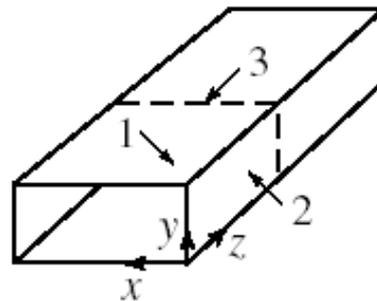


Guia de Ondas Retangular

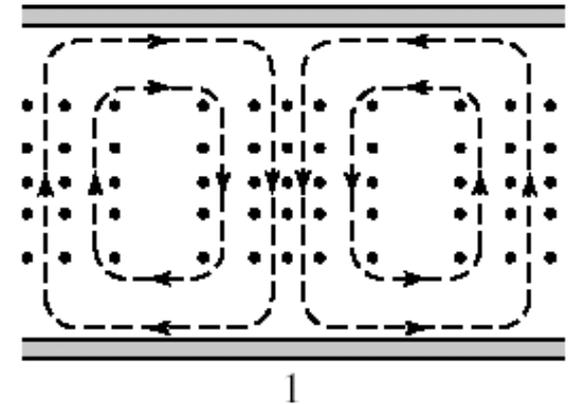
■ Modo TE₁₁

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}$$

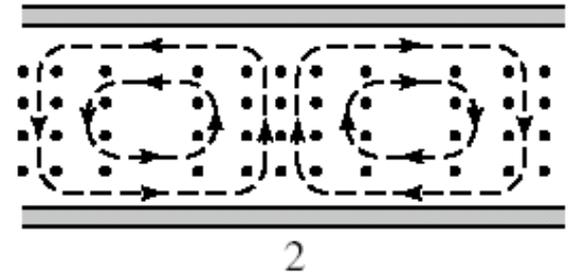
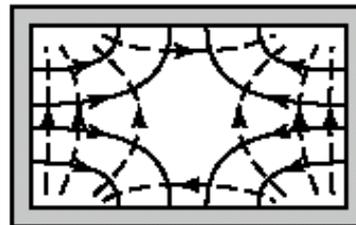
$$E_x(x, y) \propto \cos\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{b} \cdot y\right)$$



----- campo E
 - - - - - campo H



$$E_y(x, y) \propto \text{sen}\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b} \cdot y\right)$$



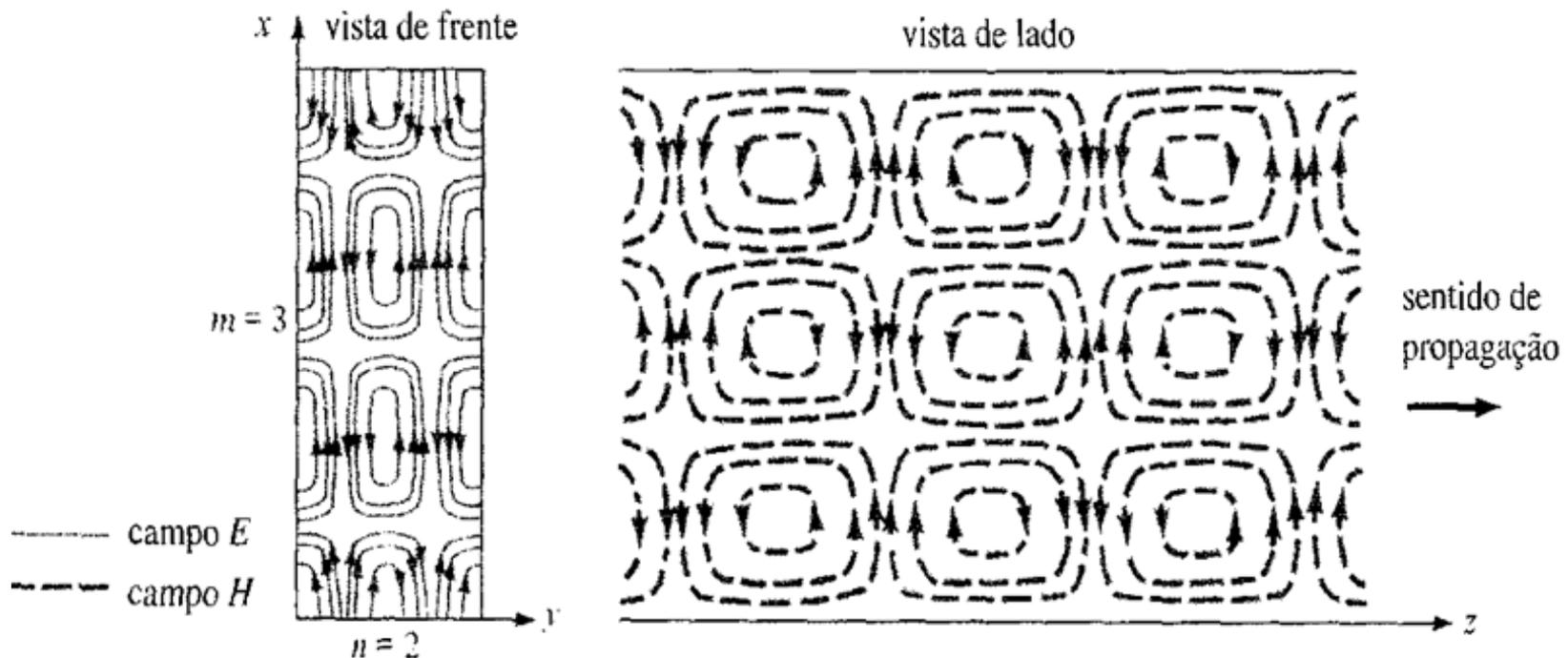
Guia de Ondas Retangular

■ Modo TE₃₂

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2}$$

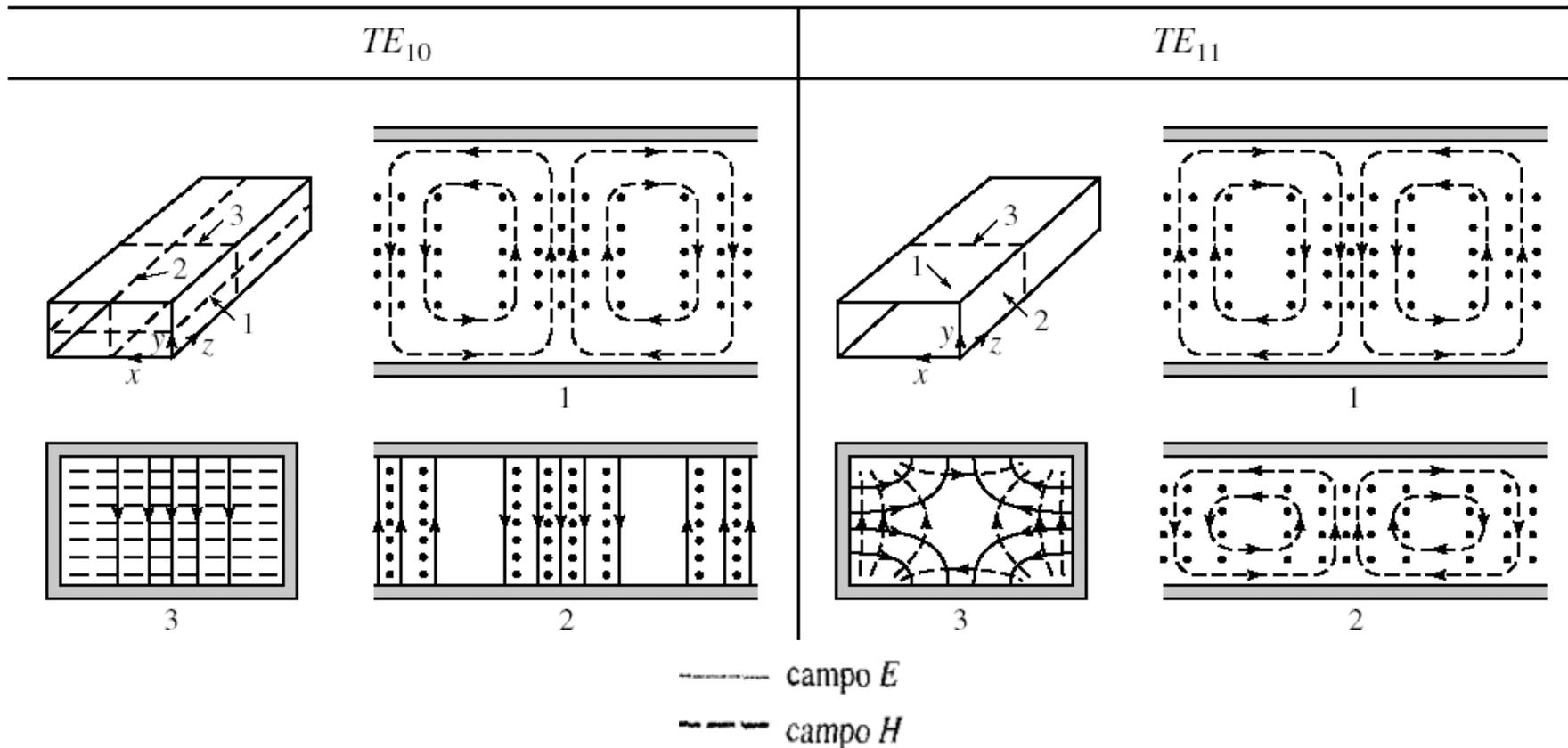
$$E_x(x,y) \propto \cos\left(\frac{3\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{b} \cdot y\right)$$

$$E_y(x,y) \propto \text{sen}\left(\frac{3\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{cos}\left(\frac{2\pi}{b} \cdot y\right)$$



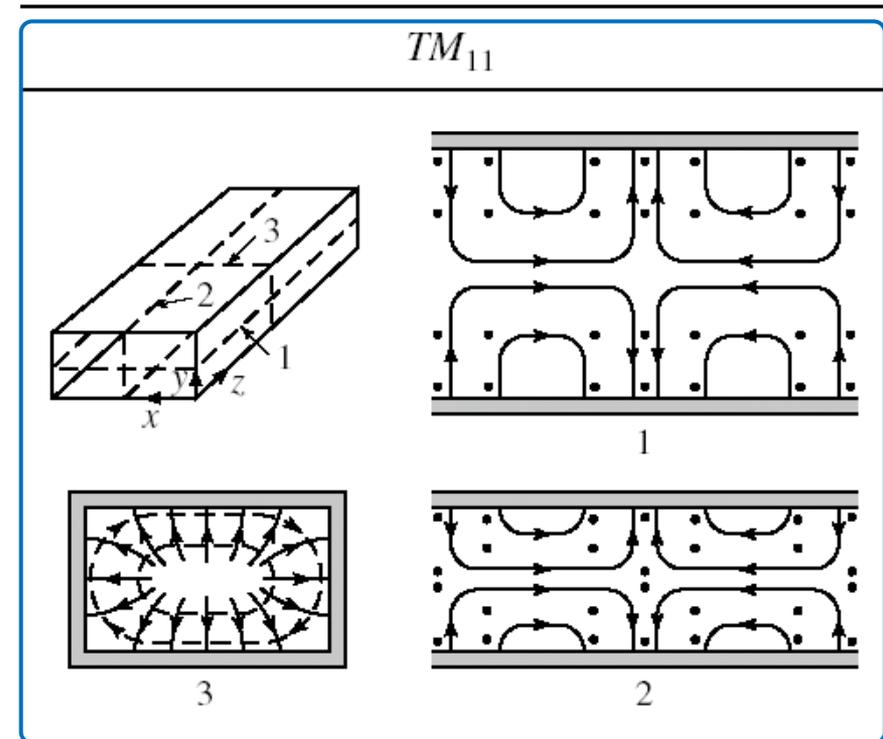
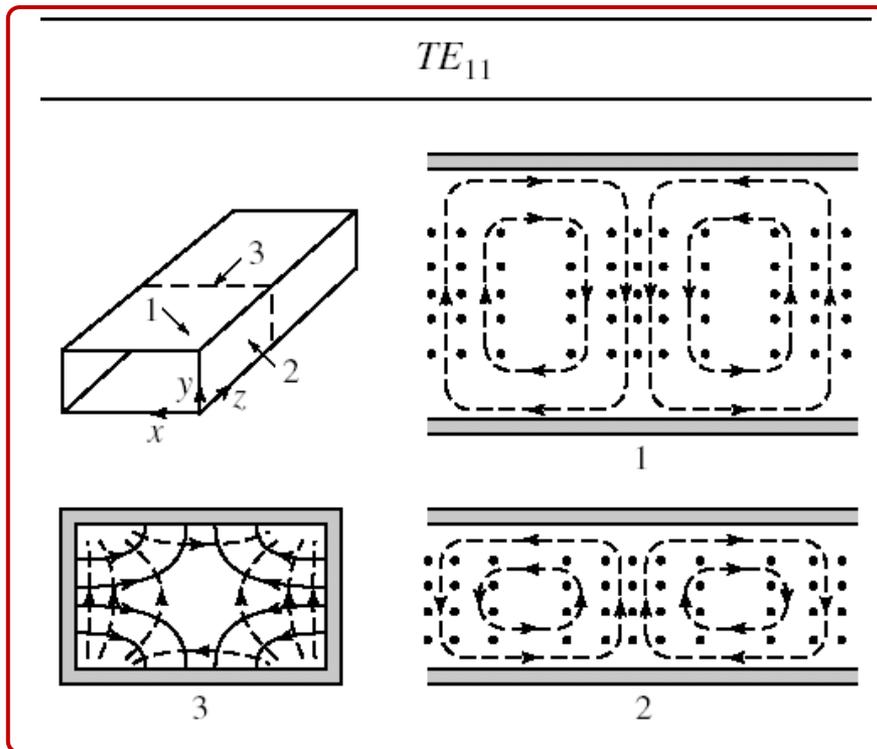
Guia de Ondas Retangular

■ Modos TE_{10} e TE_{11}



Guia de Ondas Retangular

- Comparando os modos TE_{11} e TM_{11} - mesma f_c



----- campo E
 - - - - - campo H

Guia de Ondas Retangular

Exercício – Modos TE_{mn}

- Considere um guia de ondas retangular, sem perdas
 - Dimensões da seção transversal: $a = 40 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$
 - Preenchido por ar $\rightarrow \epsilon_r = 1 \rightarrow v = c = 3 \cdot 10^{11} \text{ mm/s}$
- Calcule a frequência de corte dos modos TE_{10} , TE_{01} , e TE_{20} e TE_{11}

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \Rightarrow f_c = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2}$$

$$f_c = 1,5 \cdot 10^{11} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2} \text{ (Hz)} \quad \text{ou} \quad f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2} \text{ (GHz)}$$

Guia de Ondas Retangular

Exercício – Modos TE_{mn}

- Frequência de corte dos modos TE_{10} , TE_{01} , TE_{20} e TE_{11}

$$TE_{10} \rightarrow m=1 \text{ e } n=0 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{0}{20}\right)^2} = 3,75 \text{ GHz}$$

$$TE_{01} \rightarrow m=0 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{0}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = 7,5 \text{ GHz}$$

$$TE_{20} \rightarrow m=2 \text{ e } n=0 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{40}\right)^2 + \left(\frac{0}{20}\right)^2} = 7,5 \text{ GHz}$$

$$TE_{11} \rightarrow m=1 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = 8,38 \text{ GHz}$$

(e TM_{11})

Guia de Ondas Retangular

Modo fundamental

- Modo com menor frequência de corte
- Frequência de corte

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- Modo fundamental → Modo TE_{10}
 - Como $m=1$ e $n=0$ e $a > b$

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} \rightarrow f_c^{(TE_{10})} = \frac{v}{2 \cdot a}$$

Guia de Ondas Retangular

Modos degenerados

- Modos com a **mesma frequência de corte**
- Frequência de corte para modos TM_{mn} e TE_{mn}

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- Modos TE e TM com mesmos índices (m e n) têm a mesma frequência de corte → são modos degenerados

TE₁₁ e TM₁₁

TE₁₃ e TM₁₃

TE₂₁ e TM₂₁

TE₄₄ e TM₄₄

TE₃₁ e TM₃₁

.....

Guia de Ondas Retangular

Modos degenerados

- Quando **a** é um **múltiplo inteiro** de **b**, têm-se outros modos degenerados

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- Exemplo: **$a = 2 \cdot b$**

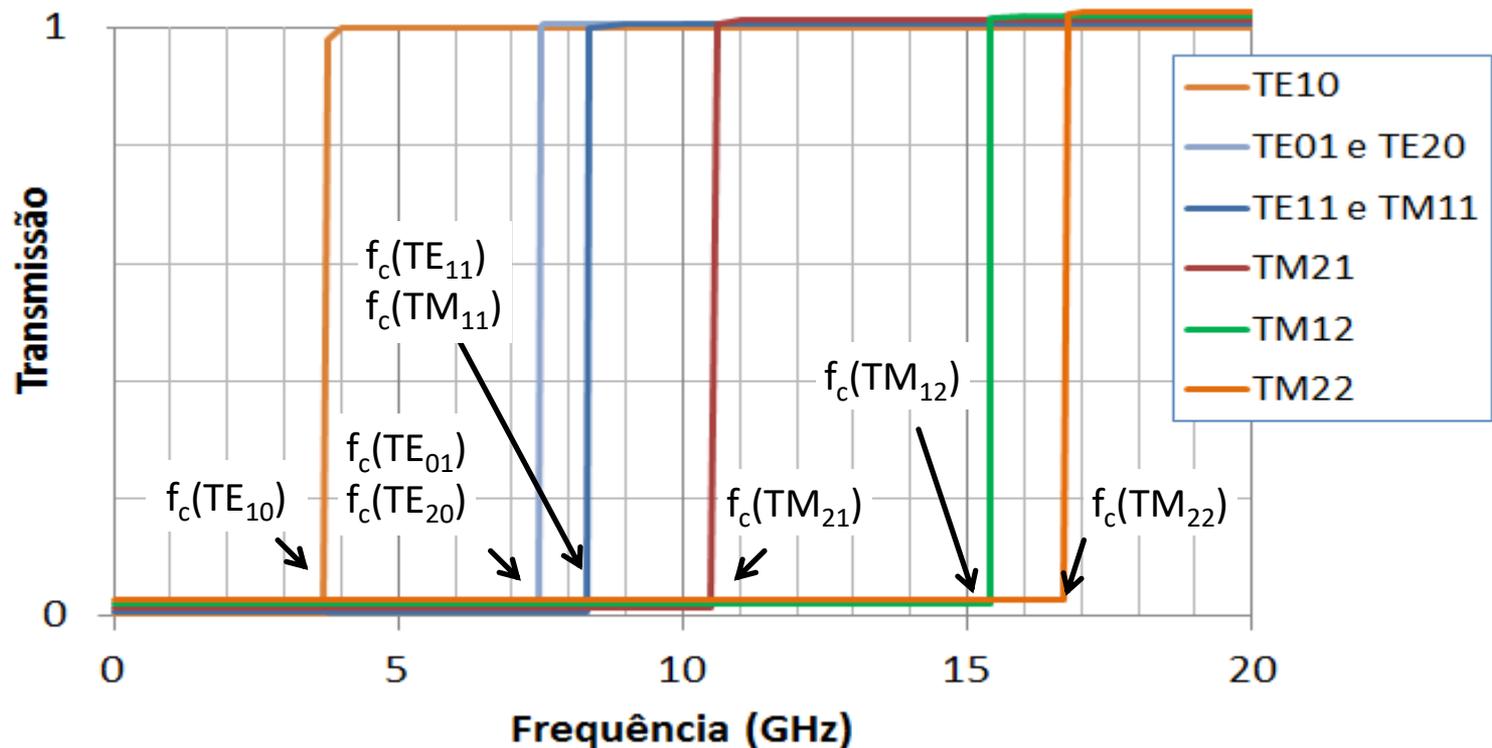
$$\text{Modo TE}_{01} \rightarrow f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{0}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = \frac{v}{2 \cdot b}$$

$$\text{Modo TE}_{20} \rightarrow f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} = \frac{v}{a} = \frac{v}{2 \cdot b}$$


Guia de Ondas Retangular

Frequência de corte dos modos TE_{mn} e TM_{mn}

Modos TE_{10} , TE_{01} , TE_{20} , TE_{11} , TM_{11} , TM_{21} , e TM_{12} e TM_{22}



Guia de Ondas Retangular

Guia WR90 - frequências de corte de modos TE, e TE e TM

WR90	m	n	f_c (GHz)
a = 2,286 cm b = 1,016 cm Interior do guia de ondas → ar $\epsilon_r = 1$	1,00	0,00	6,56
	0,00	1,00	14,76
	2,00	0,00	13,12
	1,00	1,00	16,15
	2,00	1,00	19,75
	1,00	2,00	30,24
	2,00	2,00	32,31
	3,00	0,00	19,68
	0,00	3,00	44,29

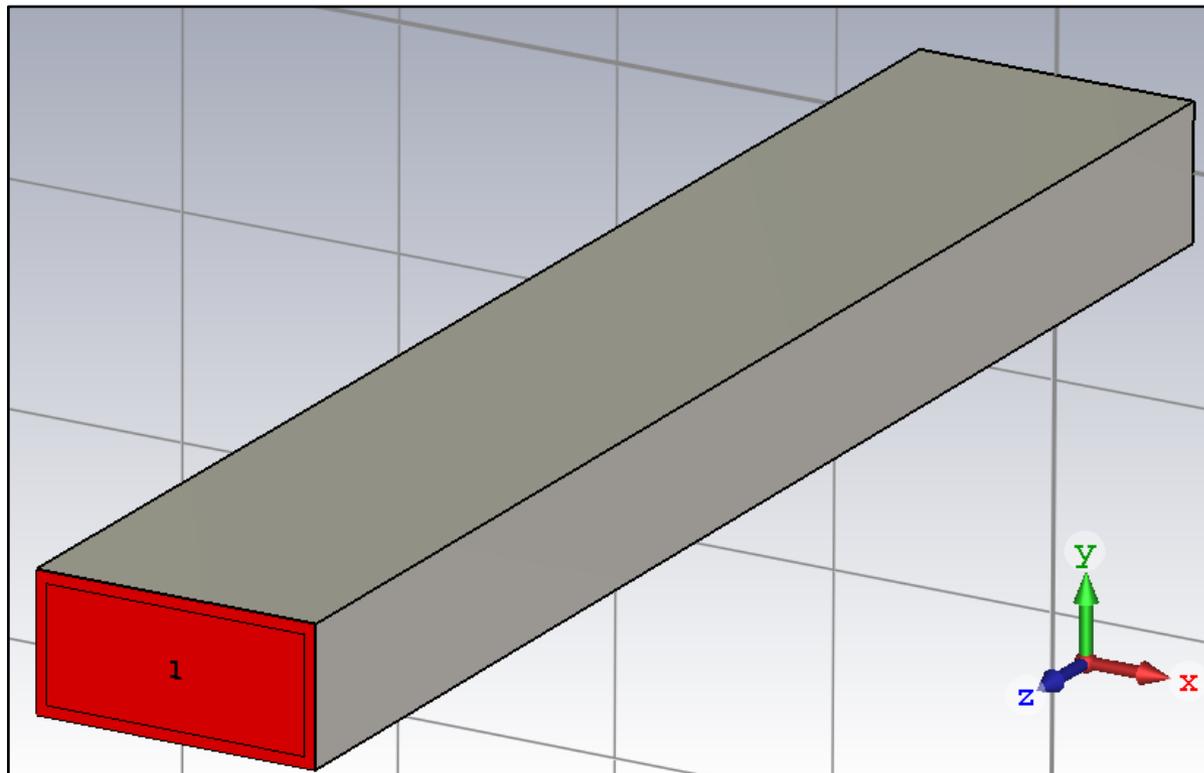
Legenda

$m = 0$ ou $n = 0$
Modos TE

$m \neq 0$ e $n \neq 0$
Modos TE e TM

Guia de Ondas Retangular

Guia WR90 – simulador CST Studio Suite



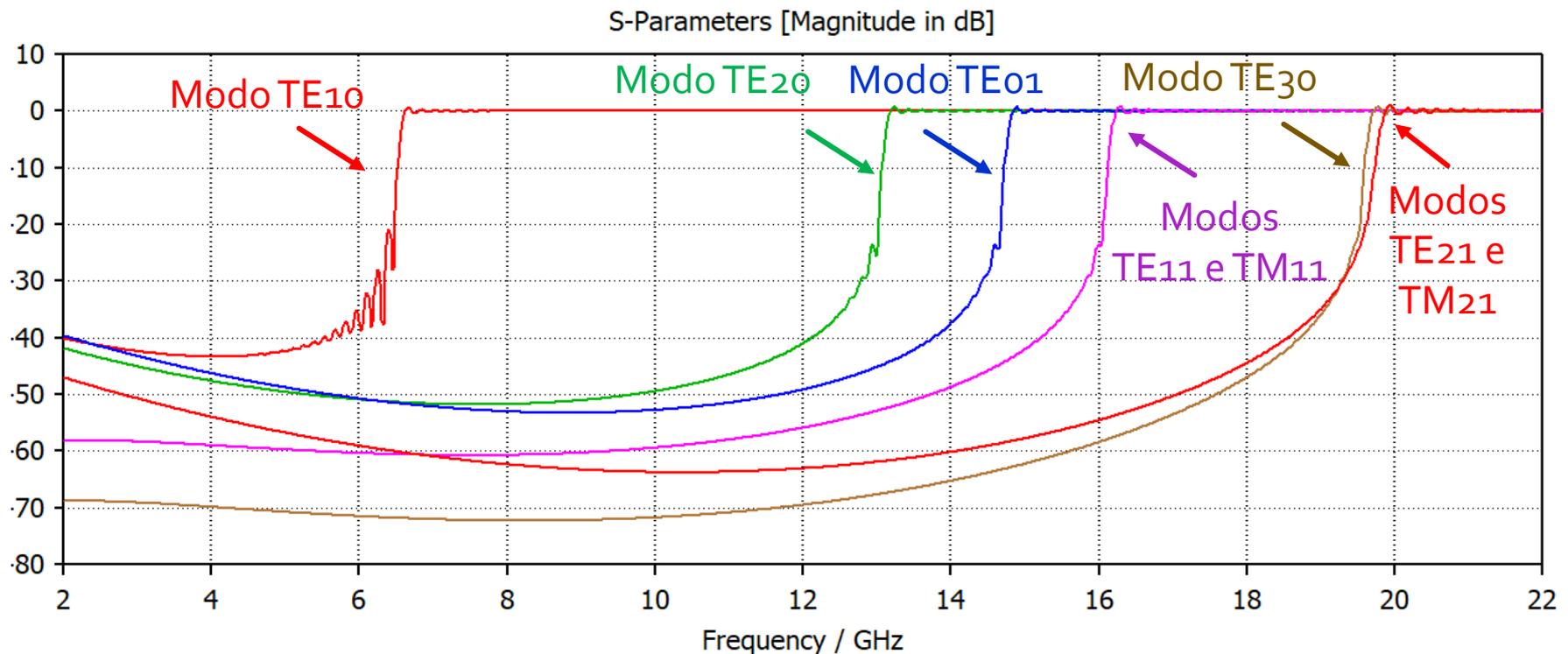
Modelo de
simulação

Guia WR9

Guia de Ondas Retangular

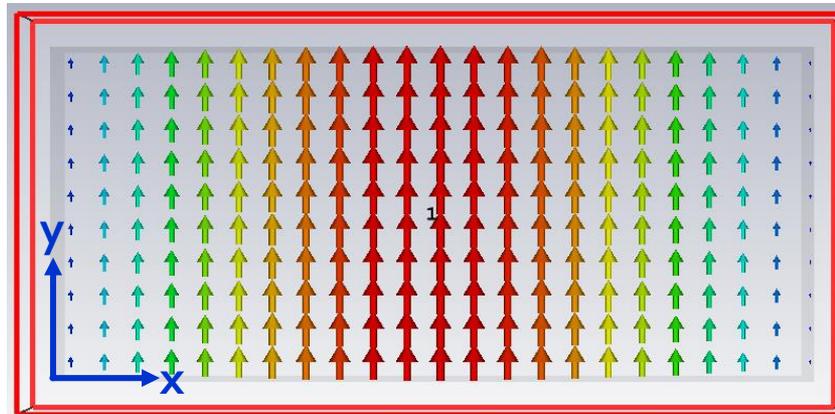
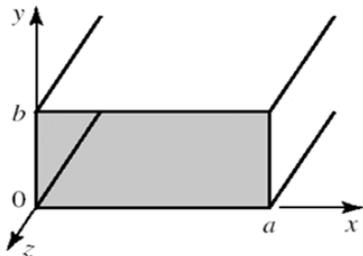
Guia WR90 – simulador CST Studio Suite

Transmissão entre entrada e saída do guia de ondas

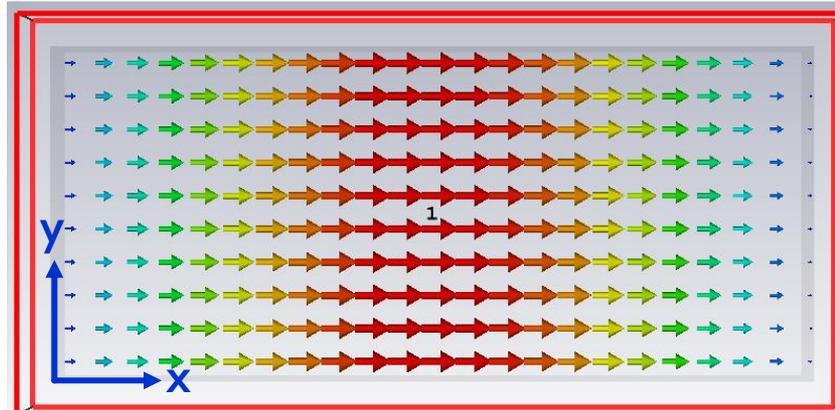


Guia de Ondas Retangular

Guia WR90 - modo TE_{10} – simulador CST Studio Suite



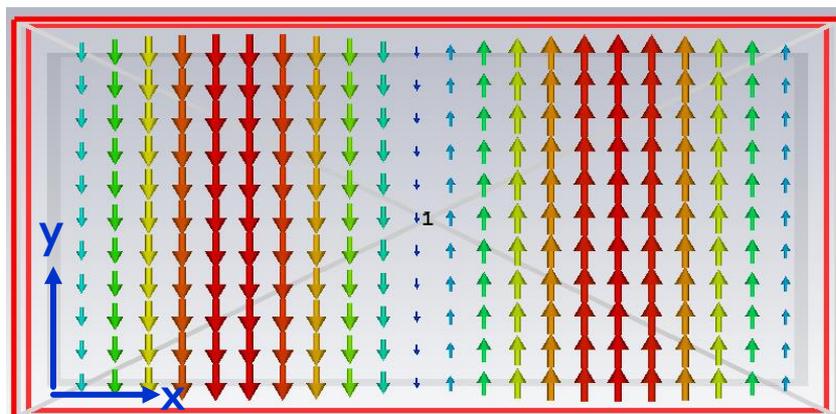
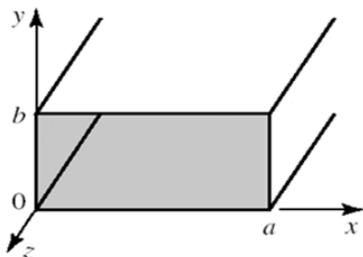
Linhas de
Campo Elétrico



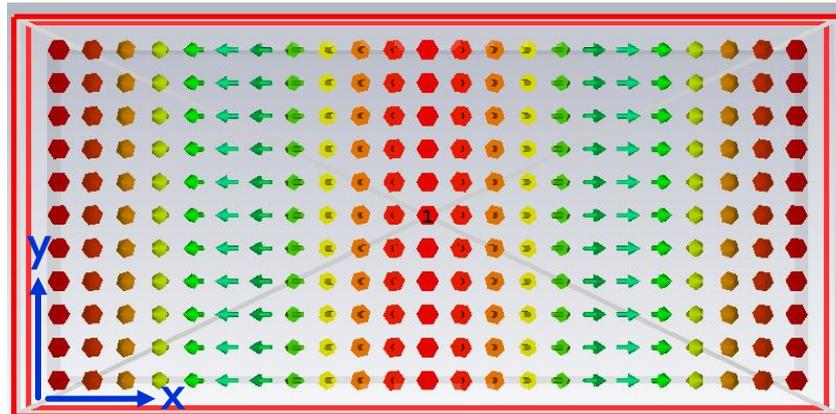
Linhas de
Campo Magnético

Guia de Ondas Retangular

Guia WR90 - modo TE_{20} – simulador CST CST Studio Suite



Linhas de
Campo Elétrico



Linhas de
Campo Magnético

Guia de Ondas Retangular

- **Frequência de corte do modo TE_{mn}**

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

← Mesma equação que para o modo TM_{mn}

- Como no modo TM_{mn}

- **Comprimento de onda guiado do modo TE_{mn}**

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

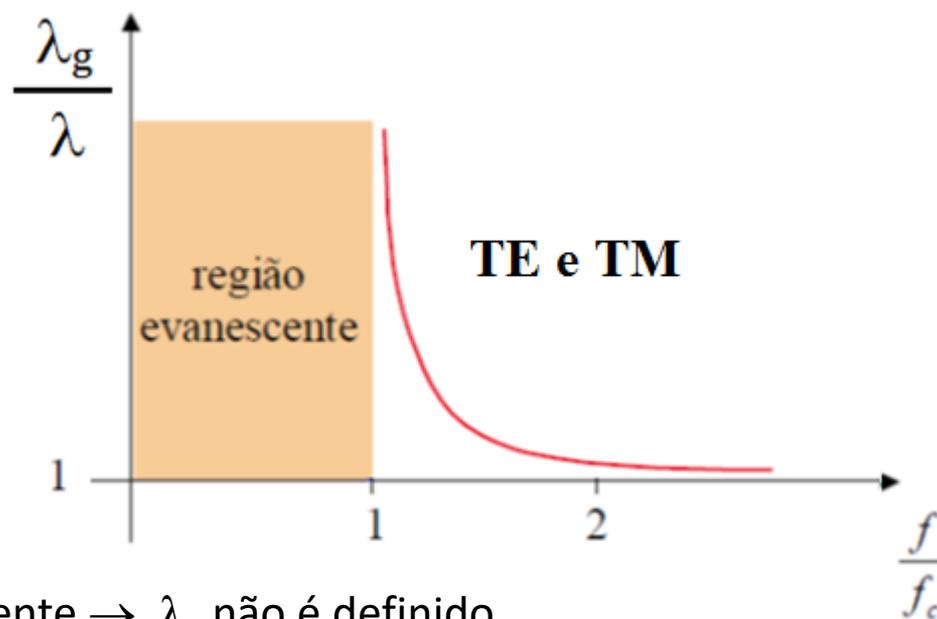
← Mesma equação que para o modo TM_{mn}

- Vale apenas para $f > f_c$
- Como no modo TM_{mn}

Guia de Ondas Retangular

Comprimento de onda guiado do modo TE_{mn} (e TM_{nm})

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$



Como nos modos TM_{mn}

Para $f < f_c \rightarrow$ região evanescente $\rightarrow \lambda_g$ não é definido

Para $f = f_c \rightarrow$ corte $\rightarrow \lambda_g$ tende a infinito \rightarrow circuito aberto

Para $f > f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow \lambda_g$ decresce cresce com a frequência de operação

Para $f \gg f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow \lambda_g$ tende a λ , comprimento de onda do meio

Guia de Ondas Retangular

- Impedância de onda do guia de ondas no modo TE_{mn}

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} \quad \Rightarrow \quad Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

η : impedância intrínseca do meio que preenche o guia de ondas

f_c : frequência de corte do modo guiado

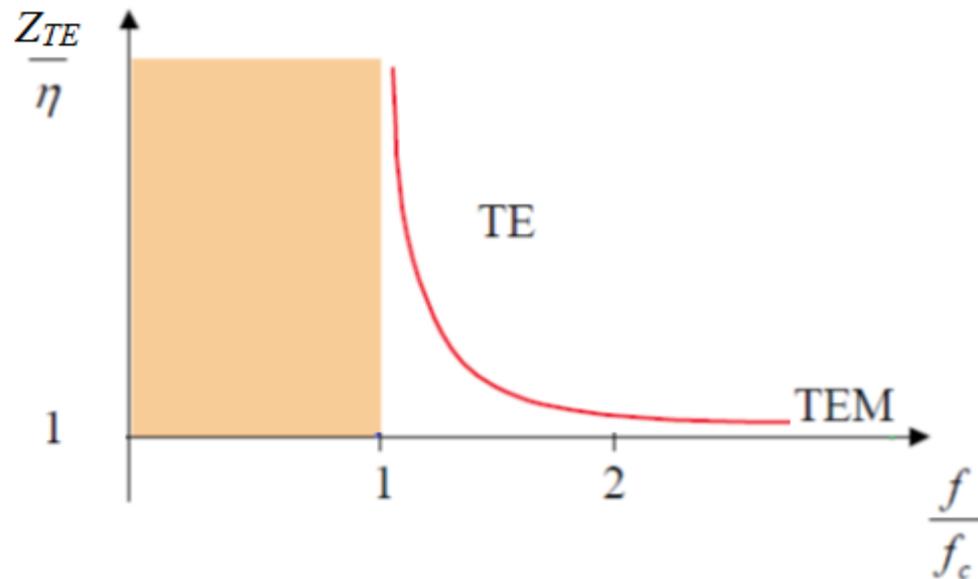
- Vale apenas para $f > f_c$
- Depende da frequência de corte do modo
- Z_{TE} é função de frequência \Rightarrow **dispersão**

- **NOTE:** Z_{TE} é diferente de $Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$

Guia de Ondas Retangular

- Impedância de onda do guia de ondas nos modos TE_{mn}

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$



Para $f < f_c \rightarrow$ região evanescente $\rightarrow Z_{TE}$ não é definida

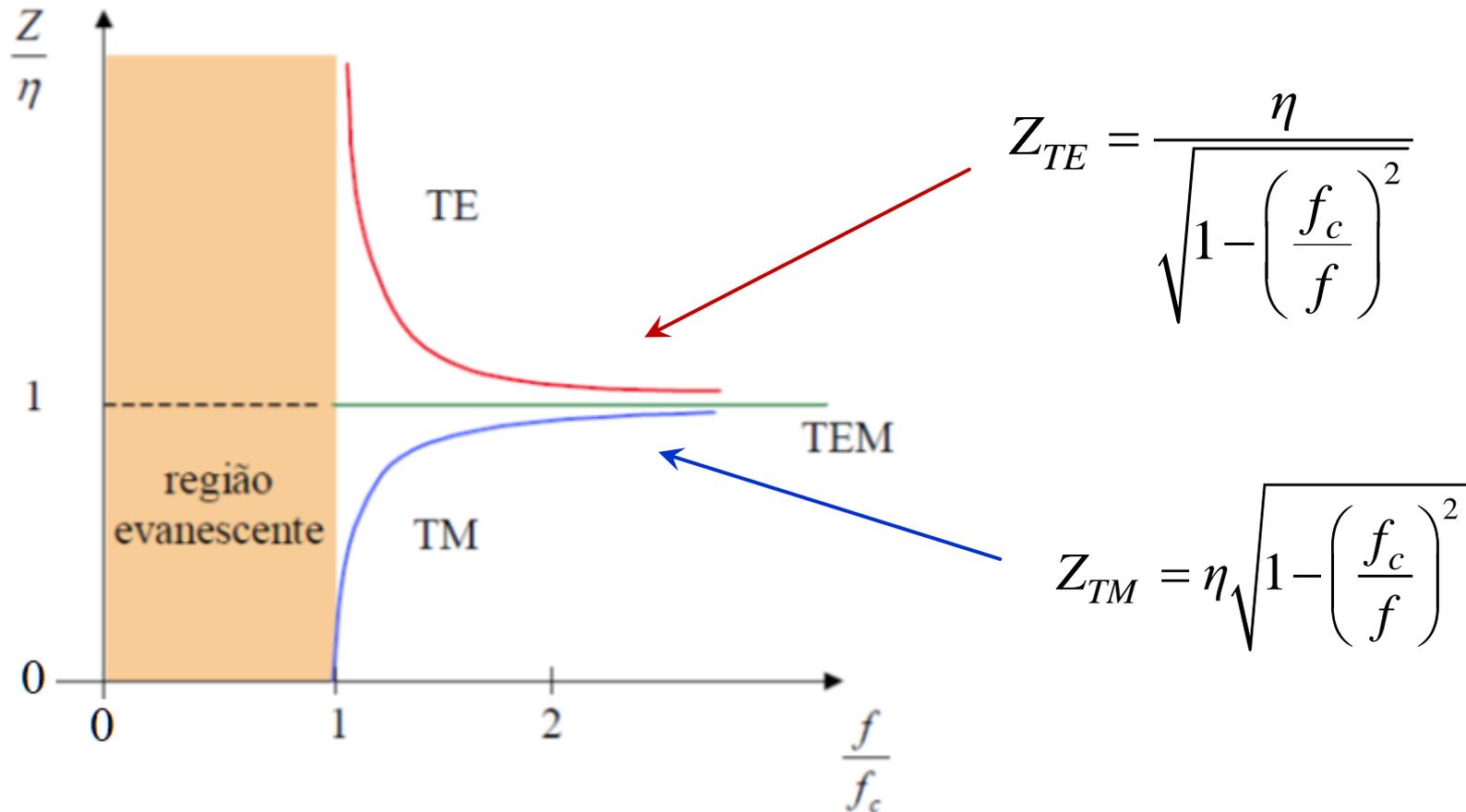
Para $f = f_c \rightarrow$ corte $\rightarrow Z_{TE}$ tende a infinito

Para $f > f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow Z_{TE}$ decresce com a frequência de operação

Para $f \gg f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow Z_{TE}$ tende a η , impedância intrínseca do meio

Guia de Ondas Retangular

- Impedância de onda do guia de ondas nos modos TM_{mn} e TE_{mn}

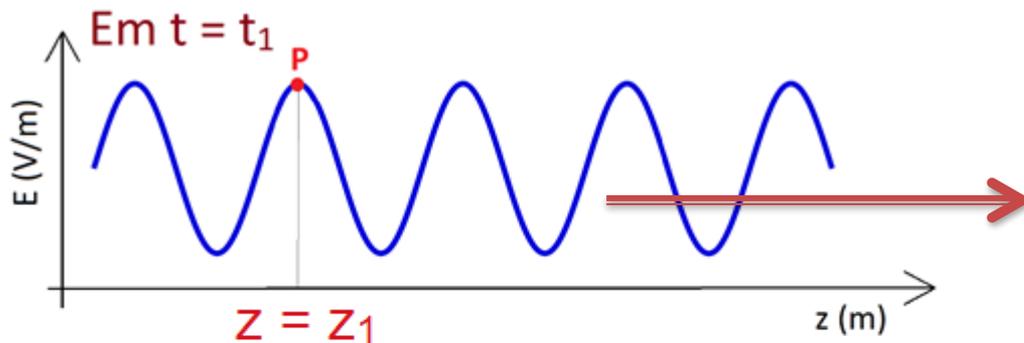


Guia de Ondas Retangular

Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

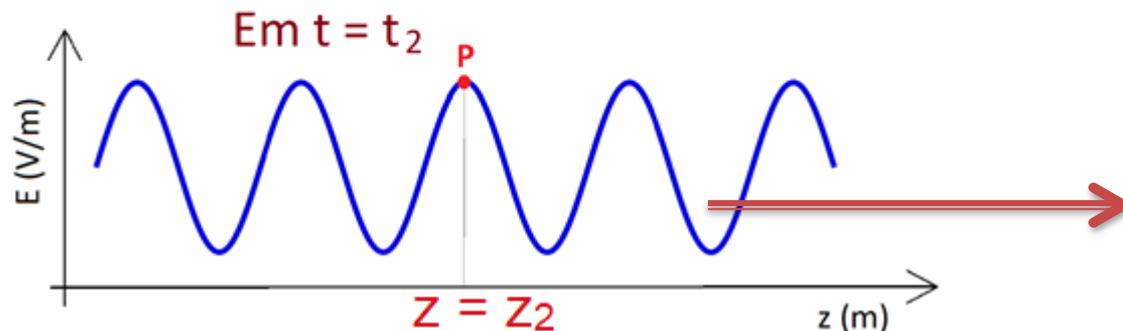
Velocidade de fase em meio sem fronteiras

- Velocidade da fase da onda na direção de propagação



- Propagação na direção z

$$v_f = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$$



- Onda no espaço livre

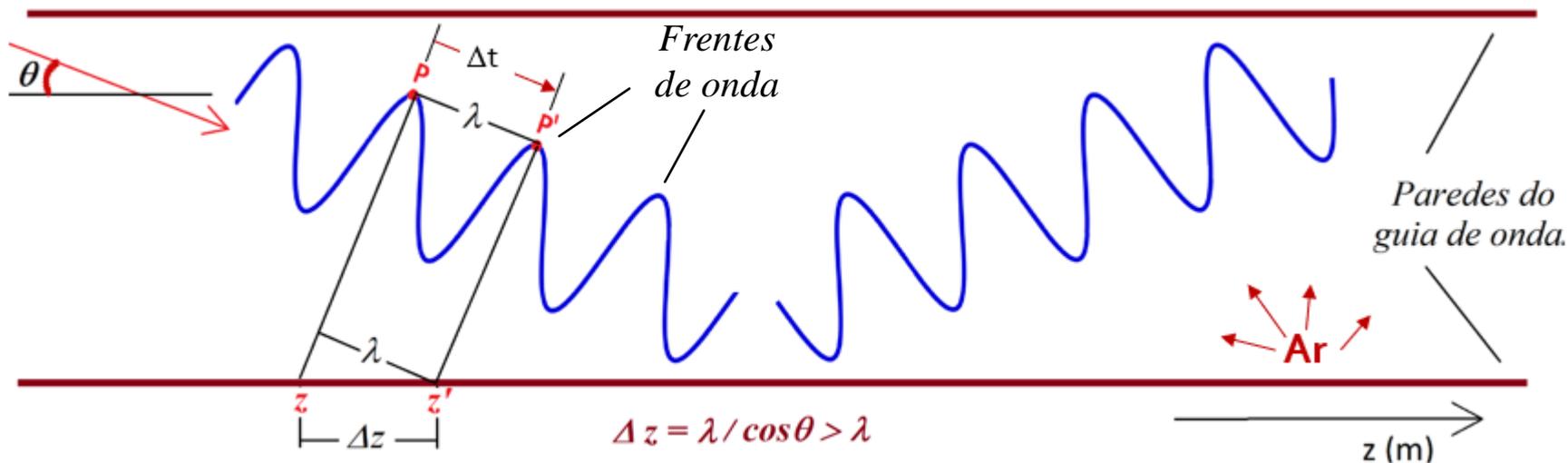
$$v_f = \frac{\Delta z}{\Delta t} = c$$

Guia de Ondas Retangular

Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

Velocidade de fase no guia de ondas

- Onda incidindo com ângulo θ em relação à direção de propagação z



- Velocidade de fase na direção de incidência: $v_f = \lambda / \Delta t = c$
- Na parede lateral do guia de ondas $\Delta z = \lambda / \cos \theta$
- Velocidade de fase na direção de propagação z : $v_f = \Delta z / \Delta t = c / \cos \theta > c$

Guia de Ondas Retangular

Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

Velocidade de fase na direção de propagação

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \geq v \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}}$$

- Vale apenas para $f > f_c$
- Guias de ondas preenchido com ar $\rightarrow v_f$ é maior que a velocidade da luz!
- Definida para um sinal monocromático
 - \rightarrow sinal de frequência única, sem modulação
 - \rightarrow não transporta informação
- Não representa o transporte de informação, sendo portanto compatível com a teoria EM

Guia de Ondas Retangular

Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

Velocidade de grupo

- Definida para um sinal modulado pela informação
 - é a velocidade de propagação da envoltória do sinal
 - velocidade de propagação da informação

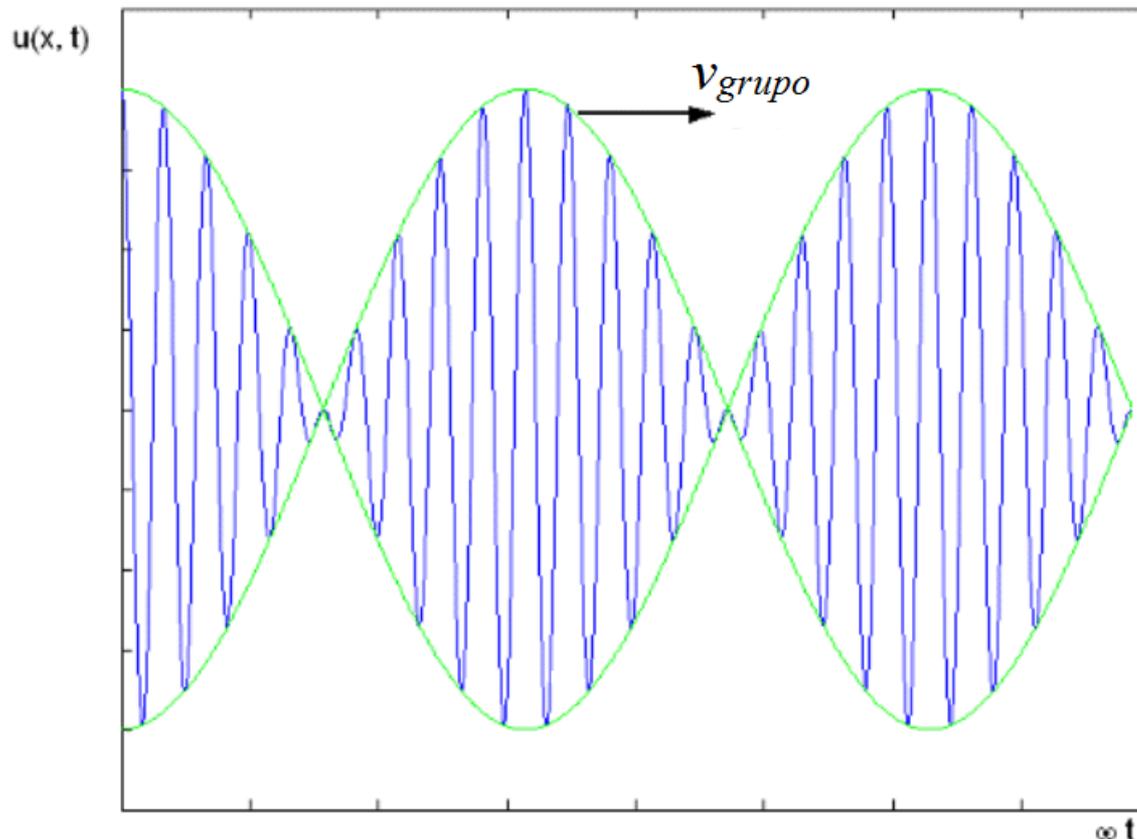
$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = v \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \leq v \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}}$$

- Vale apenas para $f > f_c$
- Representa a velocidade com que se propaga o envoltório de um sinal modulado pela informação

Guia de Ondas Retangular

Velocidade de grupo

Velocidade de propagação da envoltória do sinal modulado



Guia de Ondas Retangular

Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

- Velocidade de fase

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \geq v$$

- Velocidade de grupo

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = v \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \leq v$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}$$
$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}}$$

- Resulta

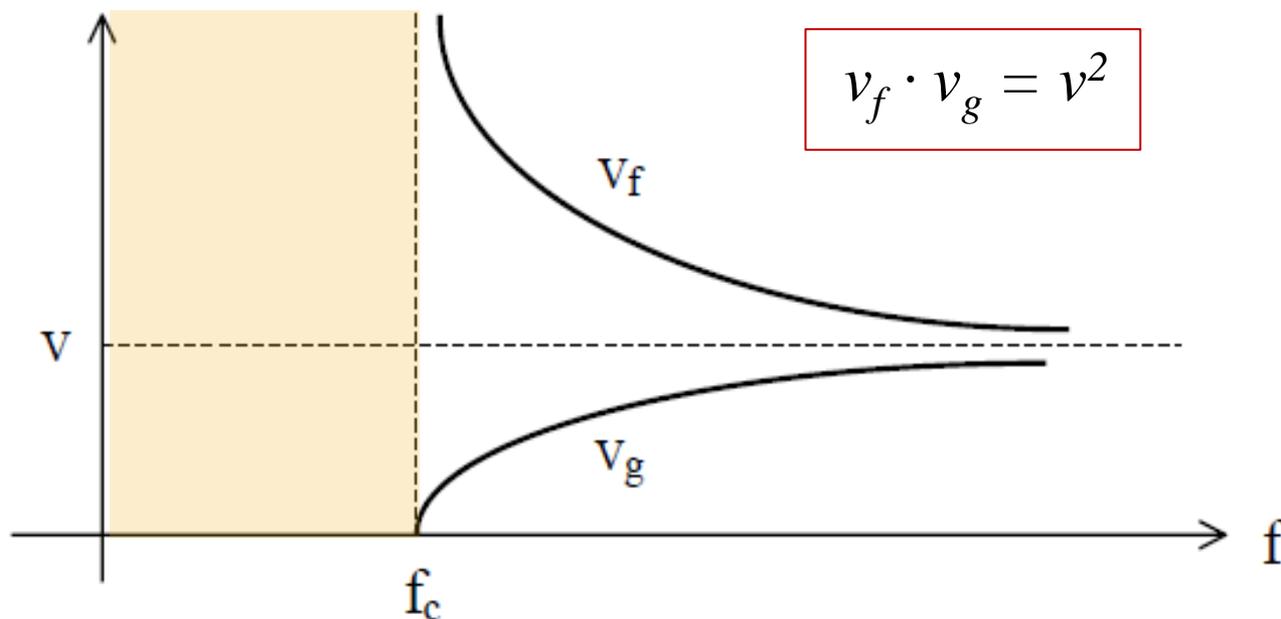
$$v_f \cdot v_g = v^2$$

- Velocidades de fase e de grupo dependem
 - da frequência de corte f_c
 - do modo de propagação

Guia de Ondas Retangular

■ Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

- Velocidades de fase e de grupo
 - para um dado de modo de propagação



Guia de Ondas Retangular

Resumo – guia de ondas retangular sem perdas

Modos de propagação

- **Modos TM** → **T**ransversal **M**agnético → $H_z = 0$ e $E_z \neq 0$
- **Modos TE** → **T**ransversal **E**létrico → $E_z = 0$ e $H_z \neq 0$

Dedução das equações dos modos de propagação

- Resolução das equações de onda
 - Correntes e cargas nulas no interior do guia de ondas

Guia de Ondas Retangular

Resumo – guia de ondas retangular sem perdas

Equações de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

- Válidas para meios
 - Lineares
 - Isotrópicos
 - Homogêneos
 - Invariantes no tempo

Condições de contorno

- Campo Elétrico tangencial às paredes do guia é nulo

Guia de Ondas Retangular

Modos TM_{mn}

$$m = 1, 2, 3... \quad n = 1, 2, 3...$$

$$H_z = 0 \quad E_z = E_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Modos TE_{mn}

$$m = 0, 1, 2... \quad n = 0, 1, 2... \quad m+n \neq 0$$

$$E_z = 0 \quad H_z = H_0 \cdot \cos \left(\frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \cos \left(\frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM_{mn}

$m = 1, 2, 3, \dots$ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$H_z = 0$$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_x = \frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Modos TE_{mn}

$m = 0, 1, 2, \dots$ $n = 0, 1, 2, \dots$ $m + n \neq 0$

$$E_z = 0$$

$$H_z = H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_x = \frac{j\beta m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_y = \frac{j\beta n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TE_{mn} e TM_{mn}

Fator de propagação $\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$

Frequência de corte $f = f_c$
tal que $\gamma = 0$ $f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$ **TE: $m, n = 0, 1, 2, \dots$ $m + n \neq 0$**
TM: $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Modos evanescentes $f < f_c$
 $\gamma = \alpha$, número real $\alpha = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$

Modos propagantes $f > f_c$:
 $\gamma = j \cdot \beta$ $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ $\lambda_g = \lambda / \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$

Guia de Ondas Retangular

Modos TE_{mn} e TM_{mn}

Velocidade de fase

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \geq v$$

Velocidade de grupo

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = v \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \leq v$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}}$$

$$v_f \cdot v_g = v^2$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM_{mn}

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad f = f_c : Z_{TM} = 0 \quad f \gg f_c : Z_{TM} \rightarrow \eta$$

Dispersão de Z_{TM} com frequência

Modos TE_{mn}

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad f = f_c : Z_{TE} \rightarrow \text{infinito} \quad f \gg f_c : Z_{TE} \rightarrow \eta$$

Dispersão de Z_{TE} com frequência

Guia de Ondas Retangular

■ Exercício

- Dado um guia de ondas retangular, preenchido com ar, com $a = 4$ cm e $b = 2$ cm, obtivemos as frequências de corte:

$$TE_{10} \rightarrow 3,75 \text{ GHz}$$

$$TE_{11} \text{ e } TM_{11} \rightarrow 8,38 \text{ GHz}$$

$$TE_{01} \rightarrow 7,50 \text{ GHz}$$

$$TE_{21} \text{ e } TM_{21} \rightarrow 10,61 \text{ GHz}$$

$$TE_{20} \rightarrow 7,50 \text{ GHz}$$

$$TE_{12} \text{ e } TM_{12} \rightarrow 15,46 \text{ GHz}$$

1. Quais os modos de propagação de uma onda eletromagnética de 10 GHz propagando-se nesse guia?
2. Qual o modo de propagação e o comprimento de onda de um onda EM de 5 GHz propagando-se nesse guia?
3. Qual a impedância de onda vista por essa onda EM de 5 GHz?
4. Quais as velocidades de fase e de grupo em 5 GHz?

Guia de Ondas Retangular

Guia de ondas real → perdas → atenuação do sinal propagante

Origem das perdas no guia de ondas

- Perdas dielétricas

- No interior do guia de ondas

- Permissividade elétrica →

- Perdas condutivas

- Nas paredes do guia de ondas

- Condutor com **condutividade σ finita**

- Exemplo, Cobre → $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ S/m

- Usualmente é a perda mais significativa em guias de ondas

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon' - j \cdot \varepsilon'' \\ \uparrow \\ \text{Perdas} \\ \text{dielétricas} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varepsilon' = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \\ \\ \text{tg} \delta = \varepsilon'' / \varepsilon' \\ \uparrow \\ \text{Tangente} \\ \text{de perdas} \end{array}$$

Guia de Ondas Retangular

■ Para o modo fundamental TE₁₀

Perda dielétrica

$$\alpha_{d10} = 8,686 \cdot \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon'} \cdot (\epsilon'' / \epsilon')}{\eta \cdot b \cdot \sqrt{1 - (f_{c10} / f)^2}} \quad (dB / m)$$

Perda condutiva

$$\alpha_{c10} = 8,686 \cdot \frac{R_s [1 + (2b/a) \cdot (f_{c10} / f)^2]}{\eta \cdot b \cdot \sqrt{1 - (f_{c10} / f)^2}} \quad (dB / m)$$

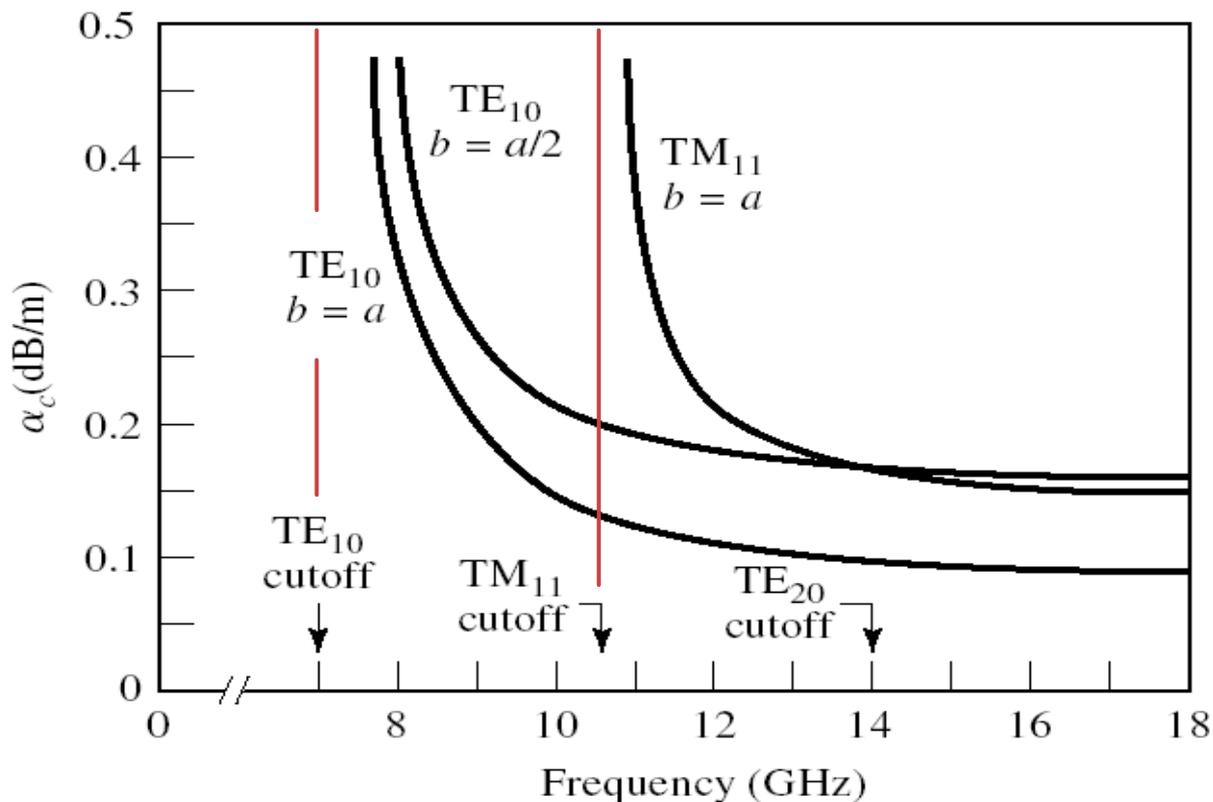
$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \quad \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{377}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \Omega$$

Perda total

$$\alpha (dB / m) = \alpha_c (dB / m) + \alpha_d (dB / m)$$

Guia de Ondas Retangular

■ Perda condutiva α_c de modos TE



- Em $f = f_c$
 $\alpha_c \rightarrow \infty$
- Para $f > f_c$
 α_c diminui com o aumento da frequência

Guia de Ondas Retangular

Faixa de operação recomendada

- Deseja-se
 - Propagação de um único modo no guia de ondas
 - Propagação com baixas perdas
- Para propagação de um único modo guiado

$$f_c(\text{modo fundamental}) < f < f_c(\text{segundo modo})$$

- Usualmente adota-se o intervalo de operação

$$1,25 \cdot f_c(\text{modo fundamental}) < f < 0,95 \cdot f_c(\text{segundo modo})$$



Frequência inferior

- 25% acima da frequência de corte do modo fundamental
→ Perdas reduzidas



Frequência superior

- Abaixo de 95% da frequência de corte do segundo modo
→ Fator de segurança

Guia de Ondas Retangular

Faixa de operação recomendada

- Usualmente no guia retangular: $a \approx 2 \cdot b$

Modo fundamental – TE_{10}

$$f_c(TE_{10}) = \frac{v}{2 \cdot a}$$

Segundo modo $\rightarrow TE_{01}$ e/ou TE_{20}

$$f_c(TE_{01}) \approx f_c(TE_{20}) = \frac{v}{a} = 2 \cdot f_c(TE_{10})$$

- Para propagação de um único modo, com baixas perdas, tem-se

$$1,25 \cdot f_c(\text{modo fundamental}) < f < 0,95 \cdot f_c(\text{segundo modo})$$



$$1,25 \cdot f_c(TE_{10}) \leq f \leq 1,9 \cdot f_c(TE_{10})$$

Guia de Ondas Retangular

Faixa de operação recomendada para guia retangular com $a \approx 2.b$

$$1,25 \cdot f_c (TE_{10}) \geq f \geq 1,9 \cdot f_c (TE_{10})$$

Exemplo

Modo fundamental – TE_{10}

$$f_c(TE_{10}) = 7 \text{ GHz}$$

Segundo modo – TE_{01}

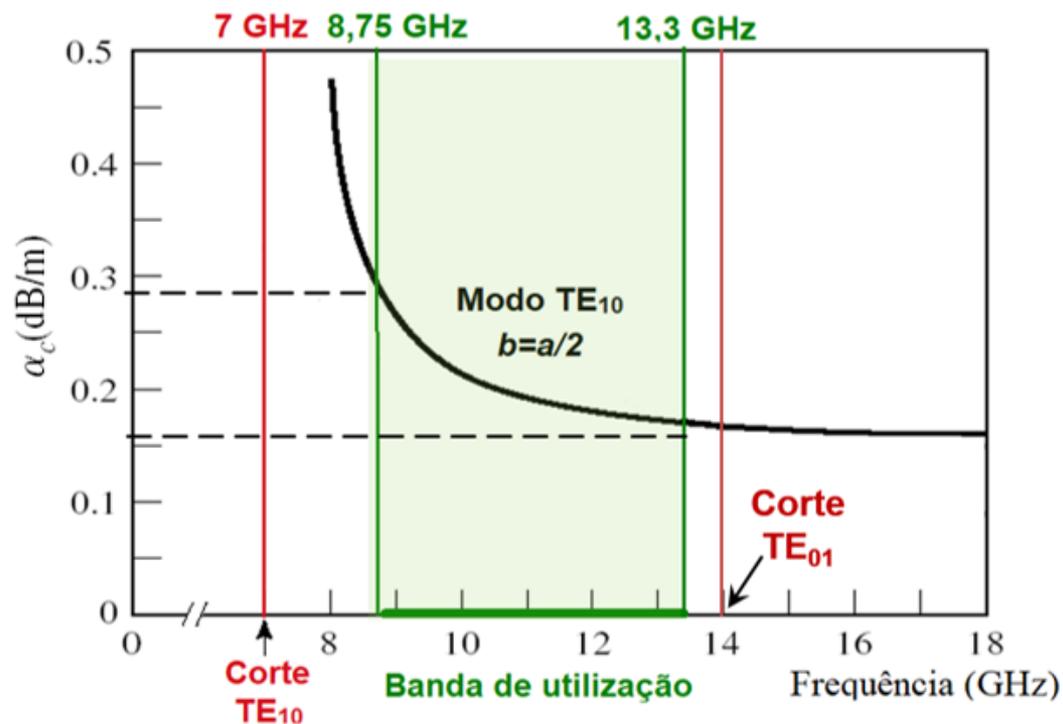
$$f_c(TE_{01}) \approx 2 \cdot f_c(TE_{10}) = 14 \text{ GHz}$$

Limite inferior

$$1,25 \cdot f_c(TE_{10}) = 8,75 \text{ GHz}$$

Limite superior

$$1,9 \cdot f_c(TE_{10}) = 13,3 \text{ GHz}$$



Perda condutiva do modo TE_{10} x frequência

Guia de Ondas Retangular

■ Guias de ondas retangular padrão (preenchidos com ar)

Guia de ondas designação	a x b (polegada x polegada)	a x b (cm x cm)	Frequência de corte (GHz)	Faixas de operação recomendadas (GHz)
WR-430	4,30 x 2,15	10,92 x 5,46	1,372	1,70 – 2,60
WR-340	3,40 x 1,70	8,636 x 4,31	1,726	2,20 – 3,30
WR-284	2,84 x 1,34	7,21 x 3,40	2,078	2,60 – 3,95
WR-229	2,29 x 1,145	5,81 x 2,90	2,577	3,30 – 4,90
WR-187	1,872 x 0,872	4,79 x 2,21	3,129	3,95 – 5,85
WR-159	1,59 x 0,795	4,038 x 2,019	3,711	4,90 – 7,05
WR-137	1,372 x 0,622	3,84 x 1,579	4,304	5,85 – 8,20

Guia de Ondas Retangular

■ Guias de ondas retangular padrão (preenchidos com ar)

Guia de ondas designação	a x b (polegada x polegada)	a x b (cm x cm)	Frequência de corte (GHz)	Faixas de operação recomendadas (GHz)
WR-112	1,122 x 0,497	2,84 x 1,26	5,26	7,05 – 10,0
WR-102	1,020 x 0,510	2,59 x 1,29	5,785	7,3 – 11,0
WR-90	0,90 x 0,40	2,286 x 1,016	6,56	8,20 – 12,4
WR-75	0,75 x 0,375	1,905 x 0,95	7,87	10,0 – 15,0
WR-62	0,622 x 0,311	1,579 x 0,789	9,49	12,4 – 18,0
WR-51	0,51 x 0,255	1,295 x 0,65	11,57	15,0 – 22,0
WR-42	0,42 x 0,17	1,067 x 0,43	14,06	18,0 – 26,5

Guia de Ondas Retangular

■ Guias de ondas retangular padrão (preenchidos com ar)

Guia de ondas designação	a x b (polegada x polegada)	a x b (mm x mm)	Frequência de corte (GHz)	Faixas de operação recomendadas (GHz)
WR-34	0,340 x 0,700	8,636 x 17,780	17,33	22,0 – 33,0
WR-28	0,280 x 0,140	7,112 x 3,556	21,08	27,0 – 40,0
WR-22	0,224 x 0,112	5,690 x 2,854	26,34	33,0 – 50,0
WR-15	0,148 x 0,074	3,759 x 1,880	39,86	50,0 – 75,0
WR-12	0,122 x 0,061	3,099 x 1,549	48,35	60,0 – 90,0
WR-10	0,100 x 0,050	2,540 x 1,270	59,01	75,0 – 110,0
WR-6	0,065 x 0,0325	1,651 x 0,826	90,84	110,0 – 170,0

Guia de Ondas Retangular

■ Exercício

a) Projete um guia de ondas retangular com as seguintes características:

- Dimensões da secção transversal: **a = 2.b**
- Dielétrico no interior do guia de ondas: **ar**
- Frequência inferior da faixa de operação recomendada: **1 GHz**

b) Calcule os seguintes parâmetros do guia de ondas projetado

- Frequência de corte do modo TE_{10}
- Faixa de frequência de operação recomendada

$$1,25 \cdot f_c(TE_{10}) \leq f \leq 1,9 \cdot f_c(TE_{10}) \quad f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Guia de Ondas Retangular

- **Guias de ondas retangular preenchidos $\rightarrow \epsilon_r \neq 1$**
- Material que preenche o guia de ondas

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \quad \text{e} \quad \mu = \mu_0 \quad \rightarrow$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

- Frequência de corte

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad \rightarrow$$

$$f_c = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- O preenchimento do guia de ondas permite obter guias miniaturizados que atendam à faixa de frequência desejada

Excitação de guias de ondas

Métodos usuais de inserir ou retirar sinais EM de guias de ondas

Guia de Ondas

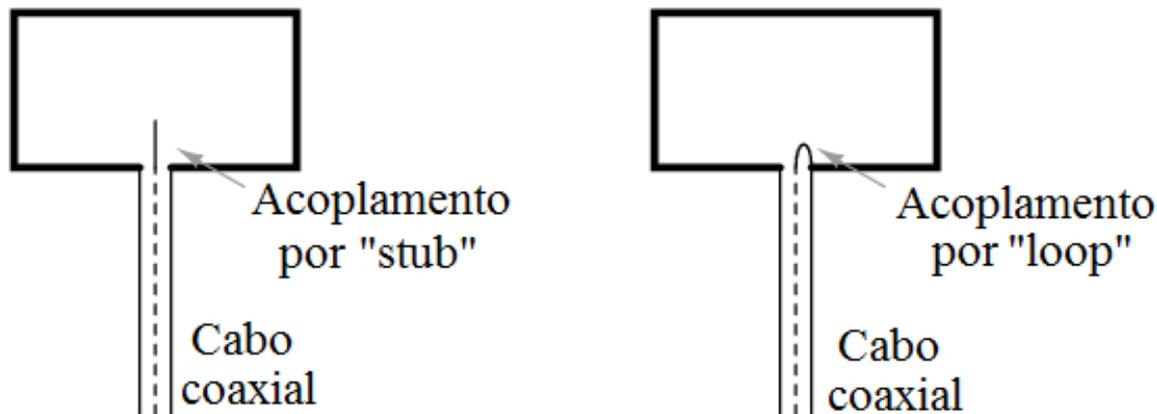
Excitação de guias de ondas

- Processo de inserir ou retirar sinais EM de guias de ondas
- Alguns métodos usais de excitar guias de ondas
 - Alimentação por cabo coaxial
 - Acoplamento elétrico
 - Acoplamento magnético
 - Alimentação por meio de outro guia de ondas
 - Acoplamento por meio de fendas

Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

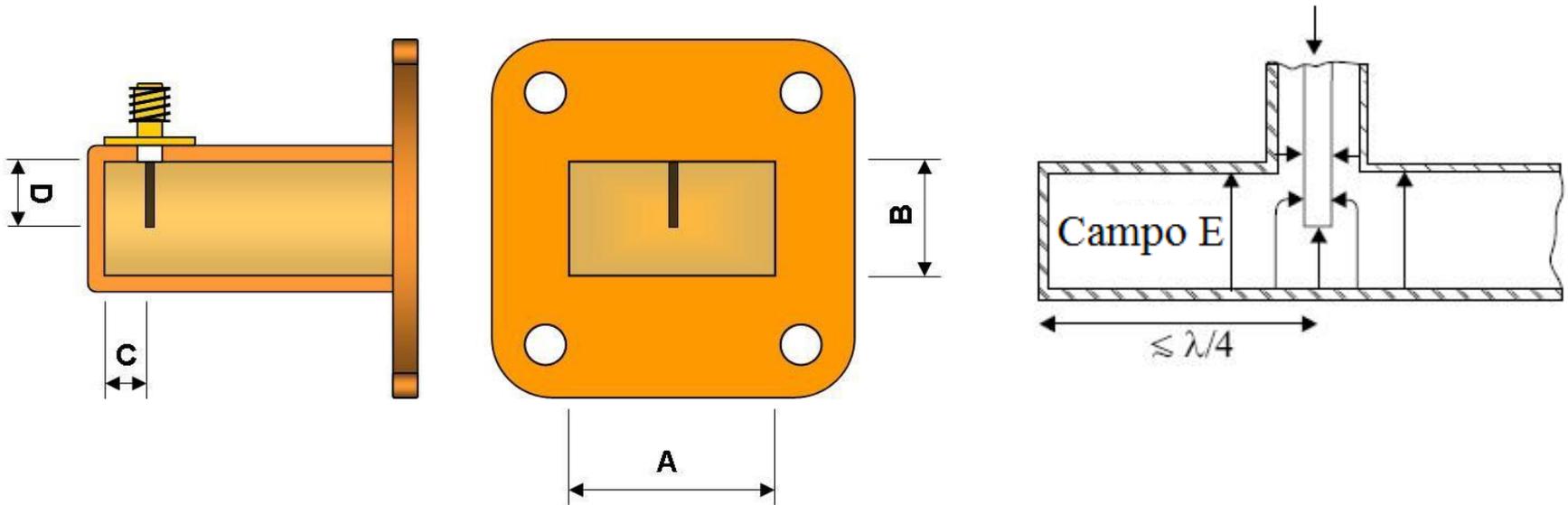
- Guia de ondas alimentado por meio de cabo coaxial
 - Acoplamento por campo elétrico – usando sonda em aberto
 - Acoplamento por campo magnético – usando espira aterrada



Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

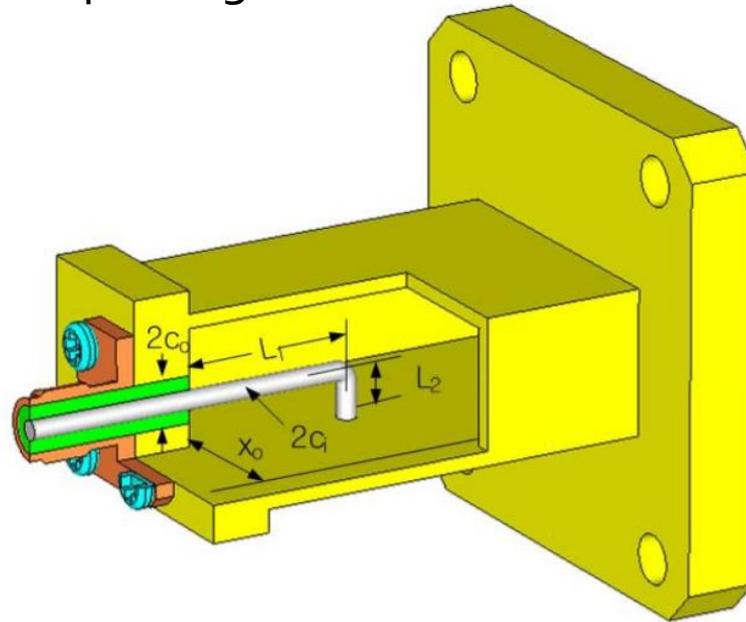
- Guia de ondas alimentado por meio de cabo coaxial
 - Acoplamento por campo elétrico



Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

- Guia de ondas alimentado por meio de cabo coaxial
 - Acoplamento por campo magnético



Design and Fabrication of an End-Launched Rectangular Waveguide Adapter Fed by a Coaxial Loop

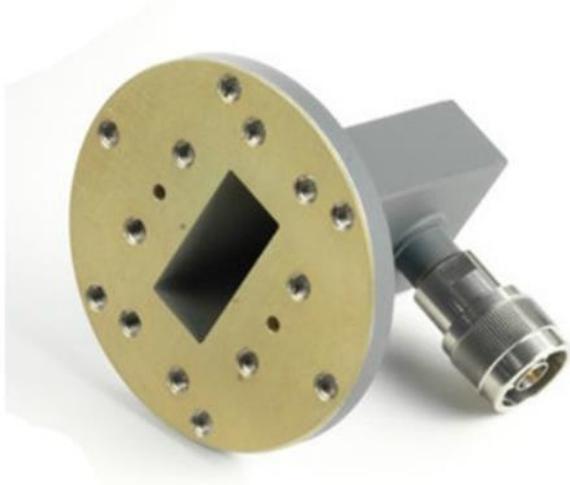
Doo-Yeong Yang, Member, KIICE

Department of Telecommunication Engineering, Jeju National University, Jeju 690-756, Korea

Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

Exemplos de adaptadores guia de ondas- coaxial (Keysight)



Adaptador guia de ondas WR137/coaxial
5,85 – 8,20 GHz



Adaptador guia de ondas WR42/coaxial
18,0 – 26,5 GHz

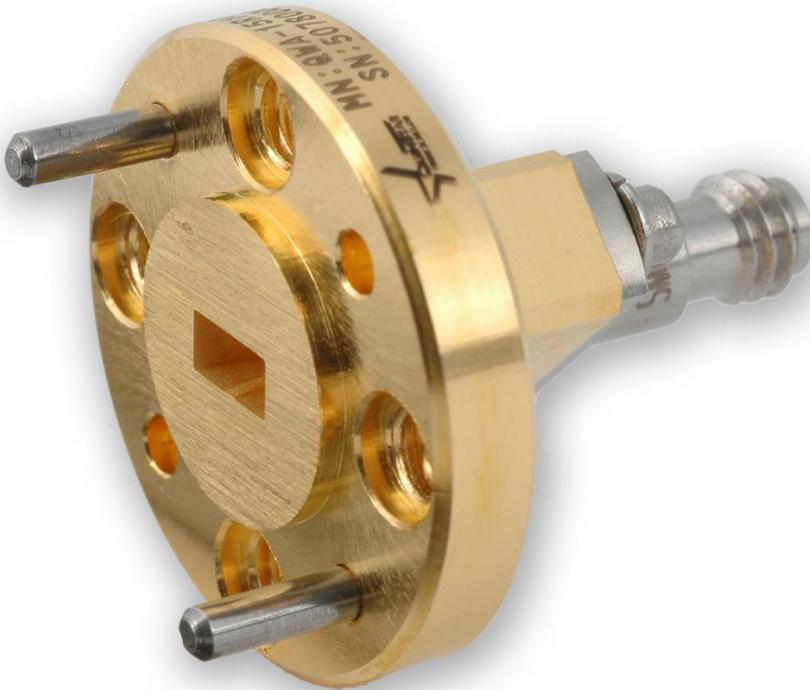


Adaptador guia de ondas WR12/coaxial
60 – 90 GHz

Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

Exemplo de adaptador guia de ondas- coaxial
(QuinStar Technology Inc.)



Adaptador guia de ondas
WR15/coaxial
50 – 75 GHz
($a=3,76$ mm, $b=1,88$ mm)

Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

- Guia de ondas alimentado por outro guia de ondas
 - Acoplamento por fendas
 - Guia de ondas cilíndrico excitado por meio de guia de ondas retangular – **acoplamento de campo magnético**

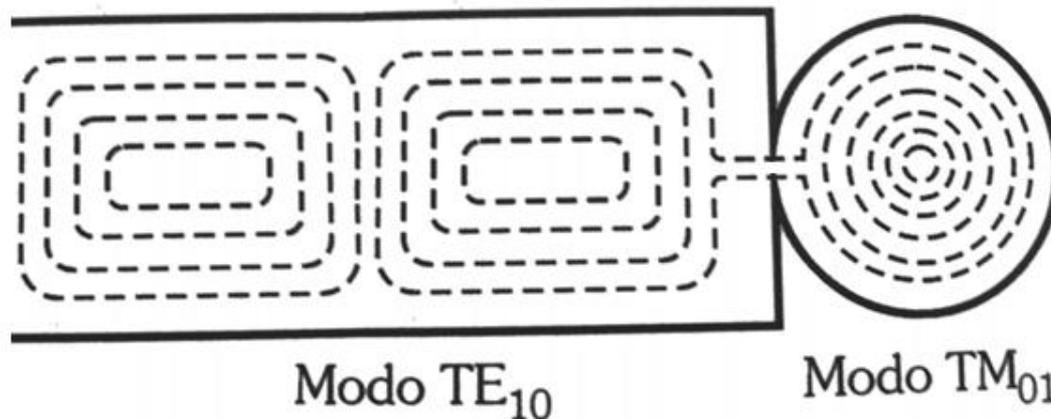


Figura do livro: Engenharia de Microondas – Fundamentos e aplicações, de José Antonio Justino Ribeiro, Editora Érica

Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

- Guia de ondas alimentado por outro guia de ondas
 - Guia de ondas cilíndrico excitado por meio de guia de ondas retangular – **acoplamento por campo elétrico**

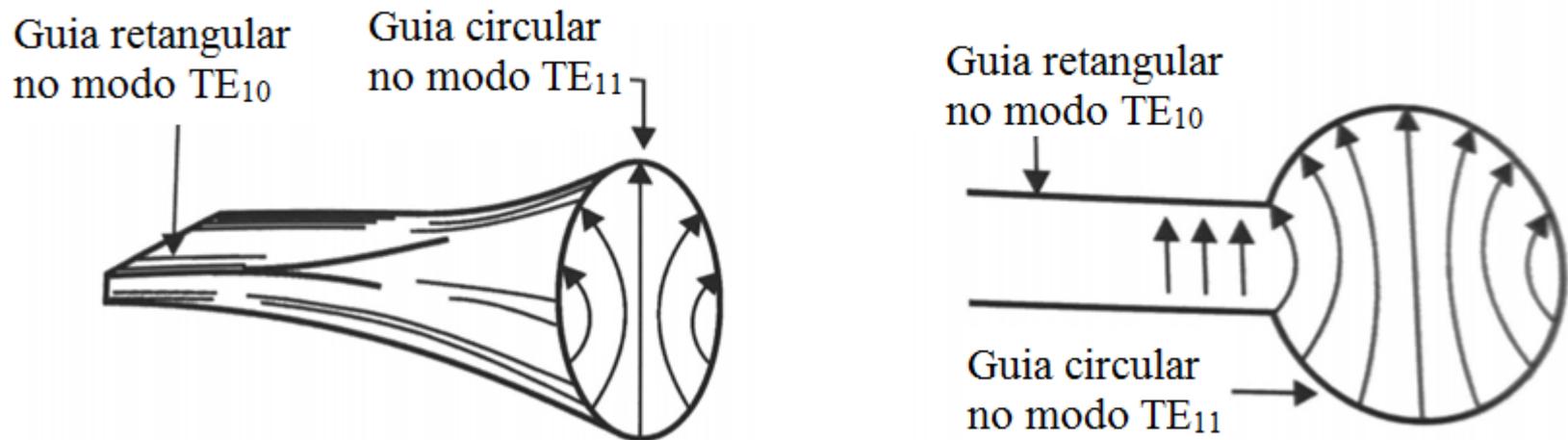
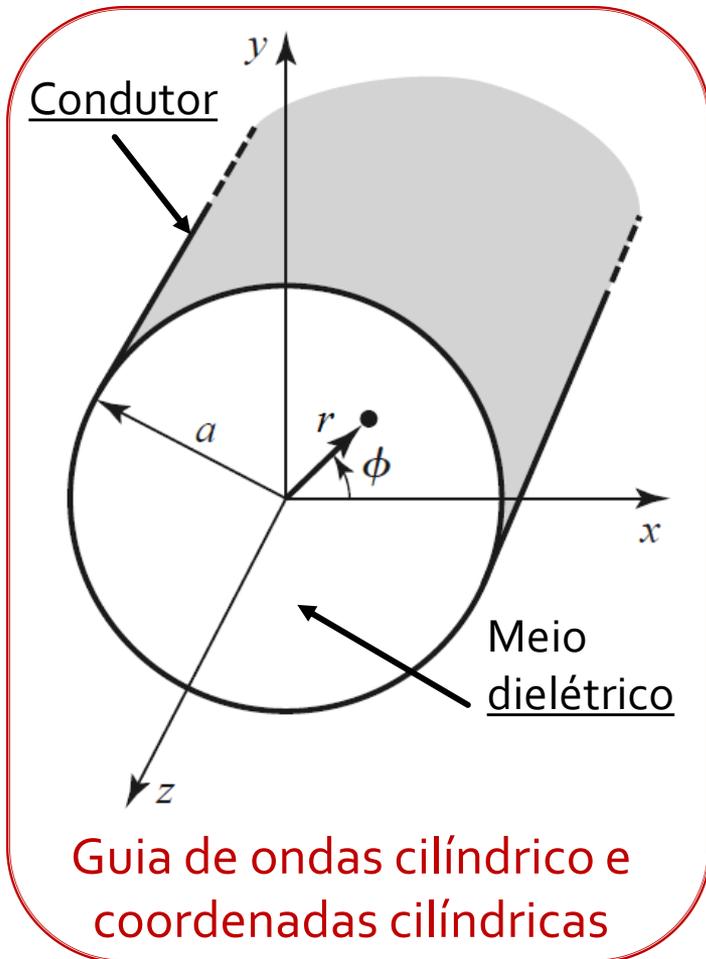


Figura do livro: Engenharia de Microondas – Fundamentos e aplicações, de José Antonio Justino Ribeiro, Editora Érica

Guias de Ondas

Guia de Ondas Cilíndrico ou Circular

Guia de Ondas Cilíndrico



Guia de Ondas Cilíndrico ou Circular

- Tubo cilíndrico, metálico, oco
- Preenchido por dielétrico, geralmente ar
- Direção de propagação: z
- a : raio interno do tubo metálico

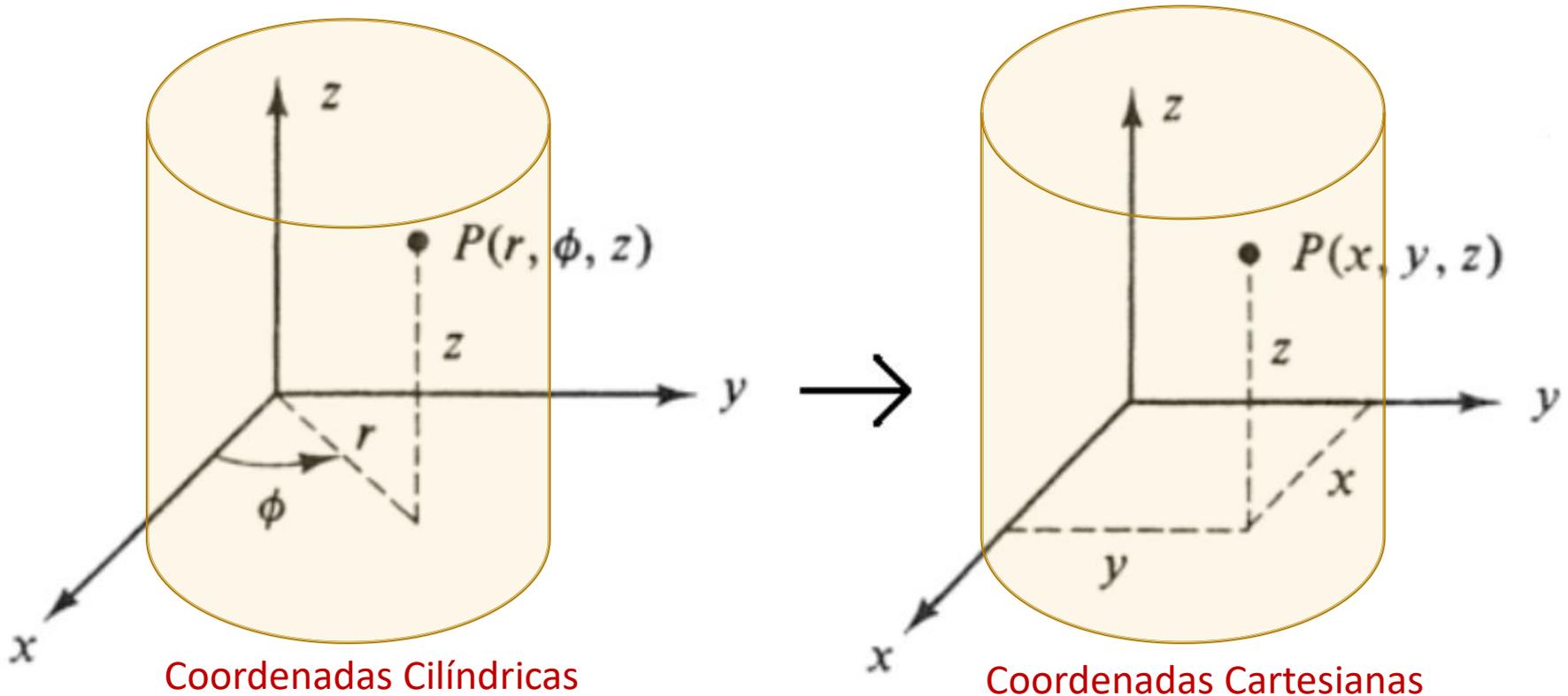
Coordenadas Cilíndricas

- r – distância da projeção do ponto no plano x-y até o centro do sistema de coordenadas
- ϕ – ângulo da projeção no plano x-y, medido a partir do eixo x
- z – posição ao longo do comprimento do guia

Guia de Ondas Cilíndrico

Coordenadas Cilíndricas x Coordenadas Cartesianas

$$x = r \cdot \cos \phi \quad y = r \cdot \sen \phi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad z = z$$



Guia de Ondas Cilíndrico

- Fasores dos campos E e H em coordenadas cartesianas

$$\bar{E} = E_x \cdot \hat{a}_x + E_y \cdot \hat{a}_y + E_z \cdot \hat{a}_z$$

$$\bar{H} = H_x \cdot \hat{a}_x + H_y \cdot \hat{a}_y + H_z \cdot \hat{a}_z$$

 \hat{a}_x \hat{a}_y \hat{a}_z

Vetores unitários nas direções x , y e z , respectivamente

- Fasores dos campos E e H em coordenadas cilíndricas

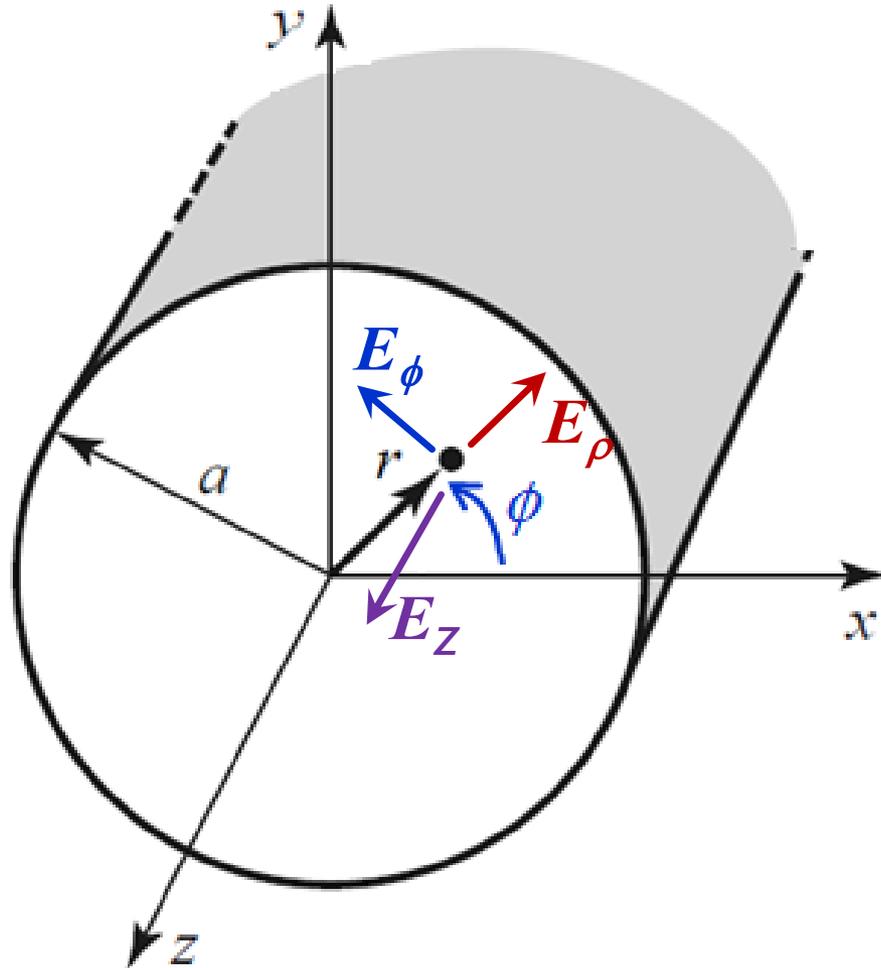
$$\bar{E} = E_\rho \cdot \hat{a}_r + E_\phi \cdot \hat{a}_\phi + E_z \cdot \hat{a}_z$$

$$\bar{H} = H_\rho \cdot \hat{a}_r + H_\phi \cdot \hat{a}_\phi + H_z \cdot \hat{a}_z$$

 \hat{a}_r \hat{a}_ϕ \hat{a}_z

Vetores unitários nas direções r , ϕ e z , respectivamente

Componentes do fasor do campo elétrico em coordenadas cilíndricas



$$\vec{E} = E_{\rho} \cdot \hat{a}_r + E_{\phi} \cdot \hat{a}_{\phi} + E_z \cdot \hat{a}_z$$

Componente radial

E_{ρ} na direção \hat{a}_r

Componente em função de ϕ

E_{ϕ} na direção \hat{a}_{ϕ}

Componente na direção z

E_z na direção \hat{a}_z

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos de propagação

- Modo TE – $E_z = 0$ e $H_z \neq 0$
 - Modo TM – $H_z = 0$ e $E_z \neq 0$
- Conhecidos E_z e H_z obtém-se
- E_ρ e H_ρ
 - E_ϕ e H_ϕ
 - Funções de $\frac{\partial E_z}{\partial r}$, $\frac{\partial E_z}{\partial \phi}$ e $\frac{\partial H_z}{\partial r}$, $\frac{\partial H_z}{\partial \phi}$

Componentes de E e H nas direções ϕ e em r

$$E_\rho = \frac{-j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega \mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \quad H_\rho = \frac{j}{k_c^2} \left(\frac{\omega \epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$
$$E_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad H_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right)$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Determinação dos campos E e H

- Resolução das equações de onda na forma fasorial
 - Em meio dielétrico sem perdas, linear, homogêneo e isotrópico, sem fontes de campo ($\rho = 0$ e $J = 0$), aplicam-se as equações de onda

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = \vec{0}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = \vec{0}$$

ω frequência angular

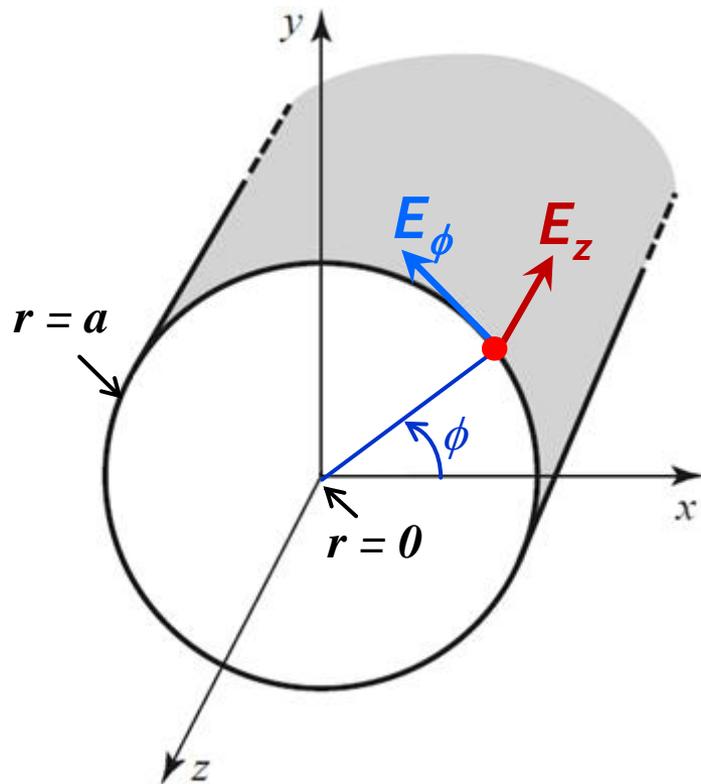
μ permeabilidade magnética

ϵ permissividade elétrica

- Aplicação das condições de contorno
 - Campo elétrico tangencial à parede metálica do guia de ondas é nulo

Guia de Ondas Cilíndrico

■ Condições de contorno



- Componentes de Campo elétrico tangenciais às paredes do guia de ondas circular

$$E_z \text{ e } E_\phi \text{ em } r = a$$

- Campo elétrico tangencial à parede metálica do guia de ondas é nulo
- Logo

$$\text{Em } r = a \rightarrow \begin{matrix} E_z = 0 \\ e \\ E_\phi = 0 \end{matrix}$$

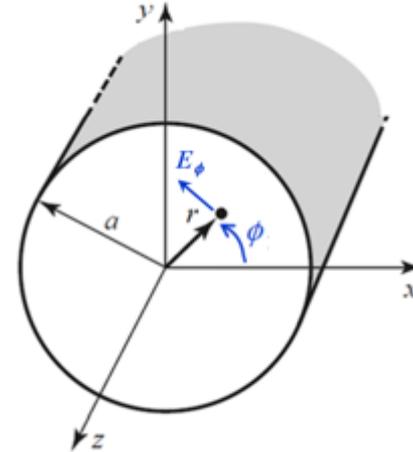
Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM – propagação na direção z

- Modo TM: $H_z = 0$ e $E_z \neq 0$
- Considerando campo é harmônico



$$E_z(r, \phi, z) = R(r) \cdot F(\phi) \cdot Z(z), \text{ sendo } Z(z) = e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

- $R(r) \rightarrow$ Descreve E_z como varia **ao longo do raio r** do guia de ondas.
- $F(\phi) \rightarrow$ Descreve E_z como varia **com o ângulo ϕ** do guia de ondas.
- $Z(z) \rightarrow$ Descreve E_z como varia **ao longo da direção de propagação z** do campo EM no guia de ondas.

Guia de Ondas Cilíndrico

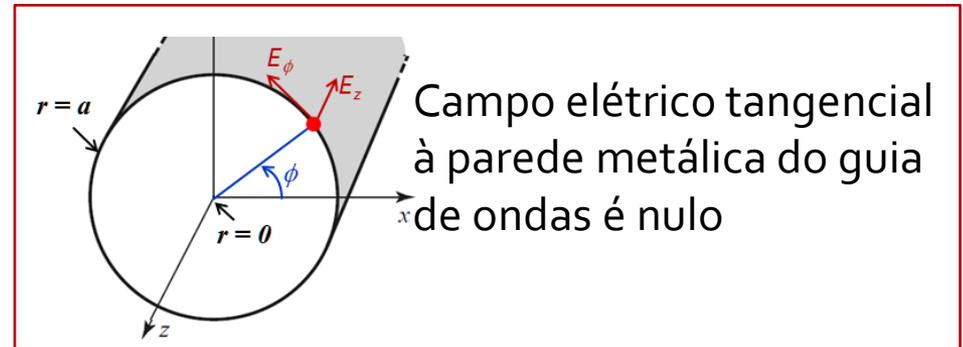
Modos TM – propagação na direção z

- Considerando: $E_z(r, \phi, z) = R(r) \cdot F(\phi) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$

- Aplicando condição de contorno:

$$E_z = 0 \text{ em } r = a$$

obtém-se



$$E_z(r, \phi, z) = \underbrace{[A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)]}_{\text{Variação da amplitude de } E_z \text{ ao longo do ângulo } \phi} \cdot \underbrace{J_n(k_c \cdot r)}_{\text{Variação da amplitude de } E_z \text{ ao longo da direção do raio do guia cilíndrico}} \cdot \underbrace{e^{-j \cdot \beta \cdot z}}_{\text{Propagação de } E_z \text{ na direção do eixo } z}$$

Variação da amplitude de E_z ao longo do ângulo ϕ

Variação da amplitude de E_z ao longo da direção do raio do guia cilíndrico

Propagação de E_z na direção do eixo z

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

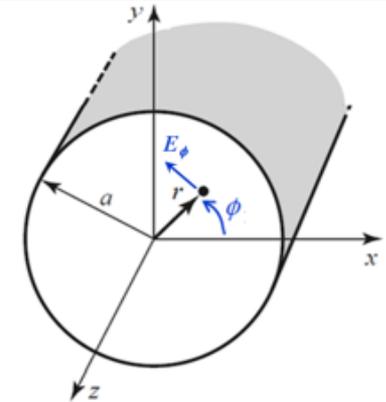
- Variação de E_z com o ângulo ϕ

$$F(\phi) = A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)$$

n é um número inteiro: $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

A e B são constantes, com inúmeras soluções possíveis

Exemplo: $A = 0$ e $B \neq 0$ ou $A \neq 0$ e $B = 0$ → modos ortogonais entre si



Modos TM₁₁
ortogonais entre si



Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Variação de E_z ao longo do raio r

$$R(r) = J_n(k_c \cdot r)$$

J_n é a Função de Bessel de Primeira Espécie e Ordem n

k_c é o fator de propagação na frequência de corte

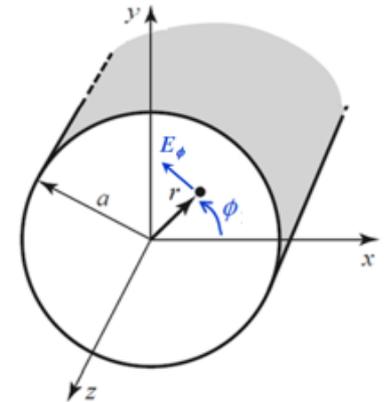
$$k_c = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad k_c = 2\pi \cdot f_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \quad \Rightarrow$$

Se conhecermos k_c
obtemos a
frequência de corte

- Condição de contorno na parede do guias de ondas:

$$r = a \rightarrow E_z = 0 \rightarrow R(a) = 0 \rightarrow R(a) = J_n(k_c \cdot a) = 0$$

Logo $k_c \cdot a = p_{nm}$, sendo p_{nm} o m-ésimo zero da função $J_n(x)$



Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Combinando as equações

$$\left. \begin{array}{l} k_c \cdot a = p_{nm} \\ k_c = 2\pi \cdot f_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \end{array} \right\} \text{ obtém-se } f_c = \frac{p_{nm}}{2\pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \cdot a}$$

- Como $v = 1/\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}$, a frequência de corte do modo **TM_{nm}**

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$$

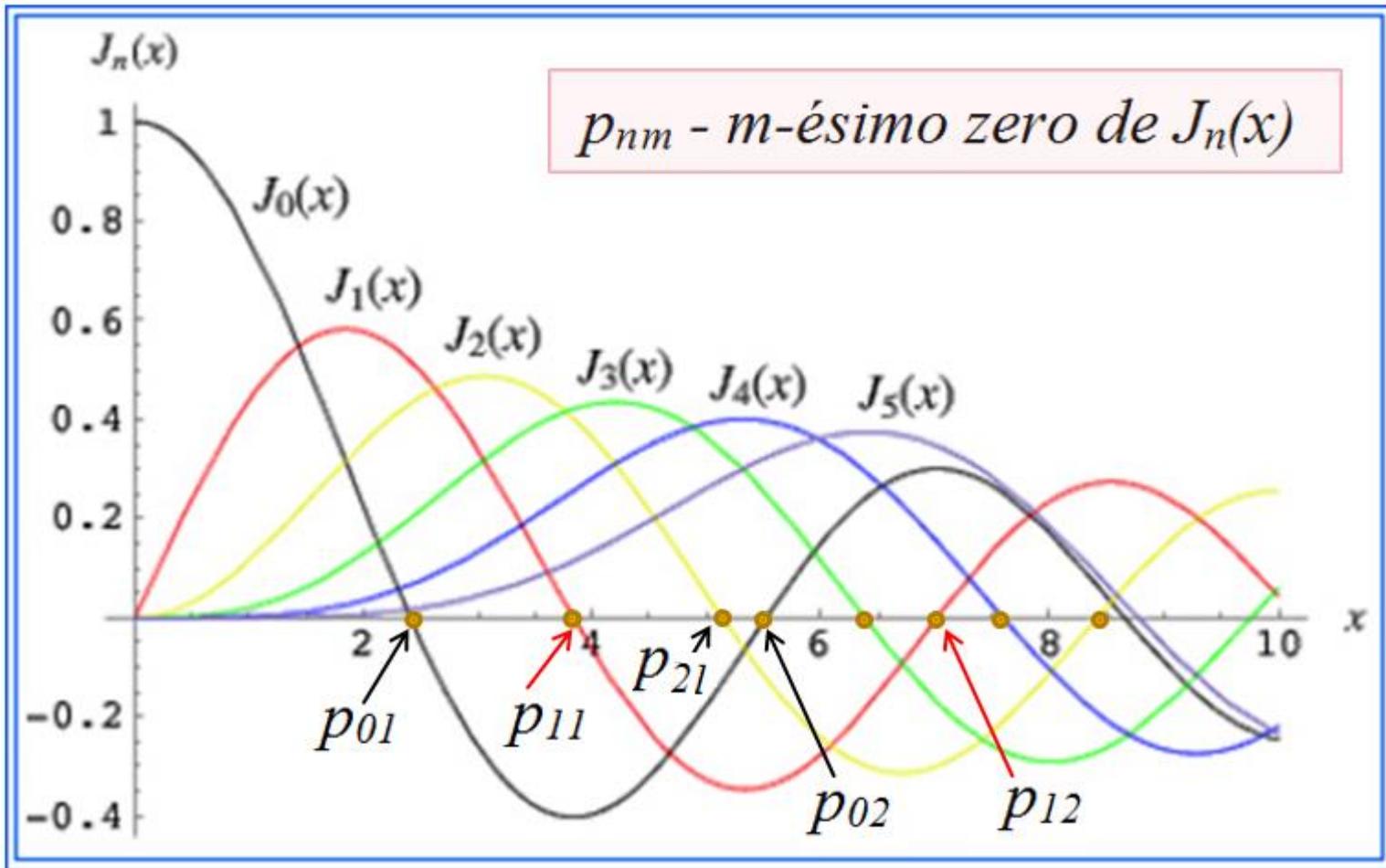
p_{nm} → zeros da função de Bessel de primeira espécie

n : ordem da função de função, $n = 0, 1, 2 \rightarrow J_0, J_1, J_2, \dots$

m : m -ésimo zero da função de Bessel considerada

Guia de Ondas Cilíndrico

Funções de Bessel de primeira espécie $J_n(x)$



Guia de Ondas Cilíndrico

Funções de Bessel de primeira espécie $J_n(x)$

- Os zeros das funções de Bessel de primeira espécie são tabelados

Valores de zeros da função de Bessel de primeira Espécie - p_{nm}

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

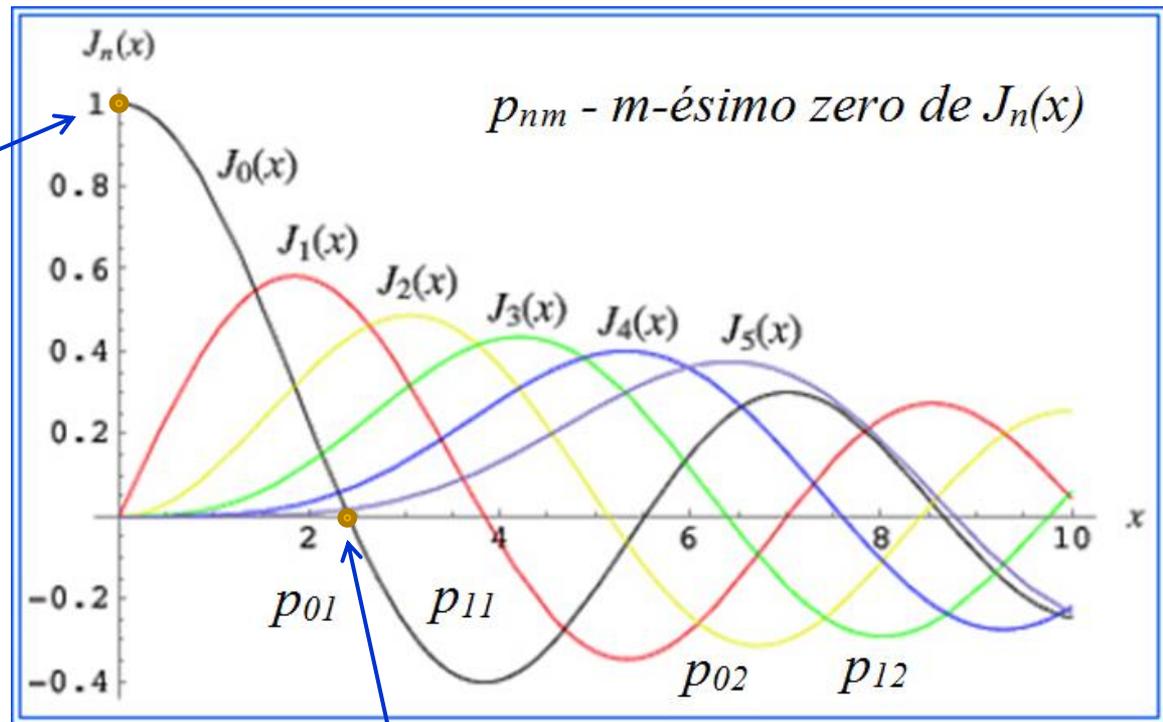
$$p_{01} = 2,404$$

$$p_{22} = 8,417$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modo $TM_{01} \rightarrow J_0(x)$, primeiro zero $\rightarrow p_{01}$

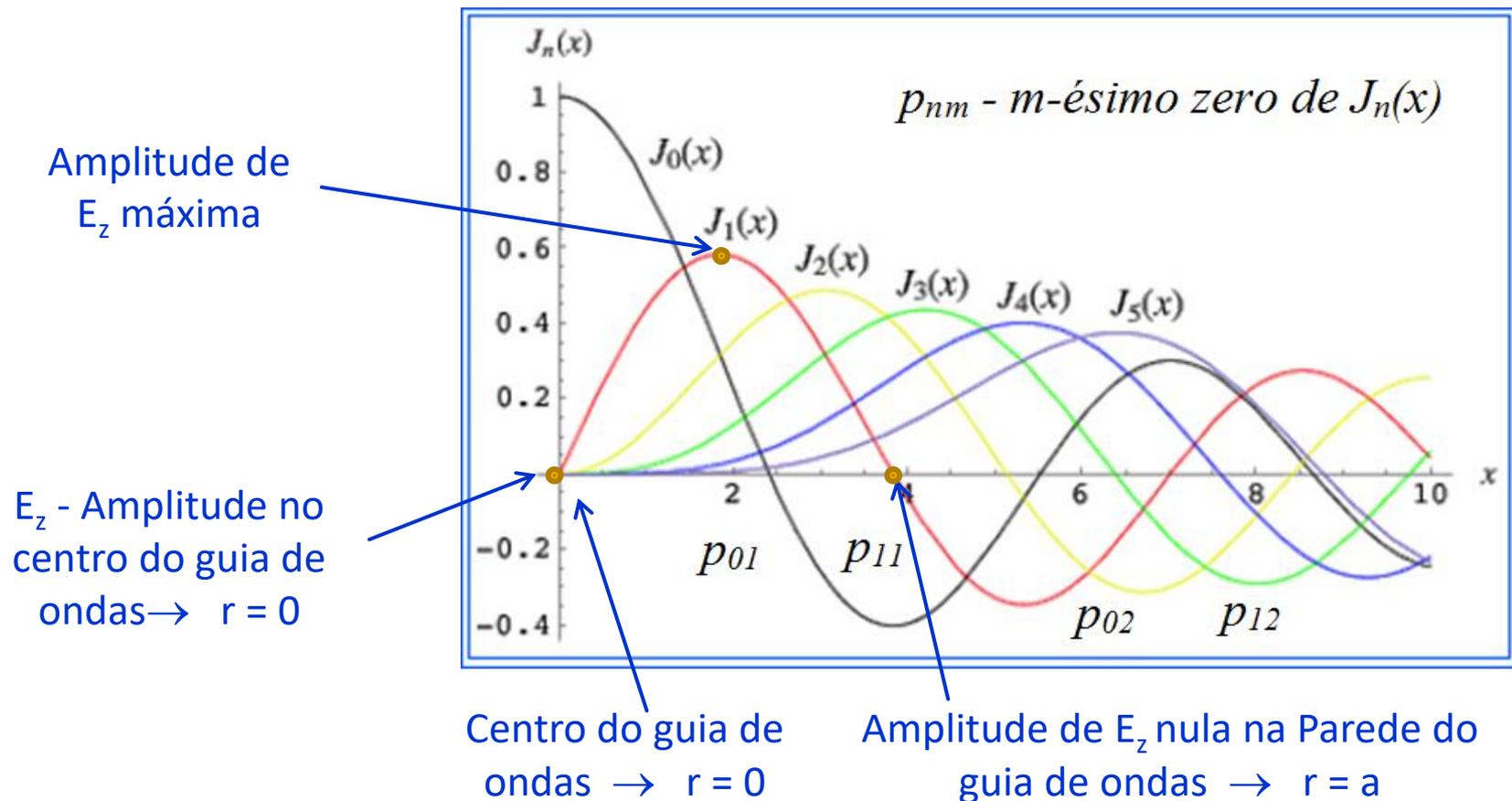
E_z - Amplitude no centro do guia de ondas $\rightarrow r = 0$



Amplitude de E_z nula na Parede do guia de ondas $\rightarrow r = a$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modo $TM_{11} \rightarrow J_1(x)$, primeiro zero $\rightarrow p_{11}$



Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Zeros das funções de Bessel de primeira espécie

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

- Qual o modo TM com menor frequência de corte?

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm} \Rightarrow \text{Menor } p_{nm} \rightarrow p_{01} = 2,405 \rightarrow \text{modo } TM_{01}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Zeros das funções de Bessel de primeira espécie

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

- Exemplo – guia circular, preenchido com ar e raio $a = 50 \text{ mm}$

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$$

→ $f_c(\text{TM}_{01}) = ?$

→ $f_c(\text{TM}_{11}) = ?$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Zeros das funções de Bessel de primeira espécie

n	P_{n1}	P_{n2}	P_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

- Exemplo – guia circular, preenchido com ar e raio $a = 50 \text{ mm}$

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot P_{nm}$$
$$f_c(TM_{01}) = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 50} \cdot 2,405 = 2,3 \text{ GHz}$$
$$f_c(TM_{11}) = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 50} \cdot 3,832 = 3,66 \text{ GHz}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM_{nm}

- Constante de propagação β_{nm}

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - k_c^2}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad \text{e} \quad k_c = \frac{p_{nm}}{a}$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2}$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2}$$

- Comprimento de onda guiado do modo TM_{nm}

$$\beta_{nm} = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

→

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{nm}}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM_{nm}

As demais componentes dos fasores de E e H são obtidas de:

$$E_r = \frac{-j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega \mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right)$$

$$E_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$

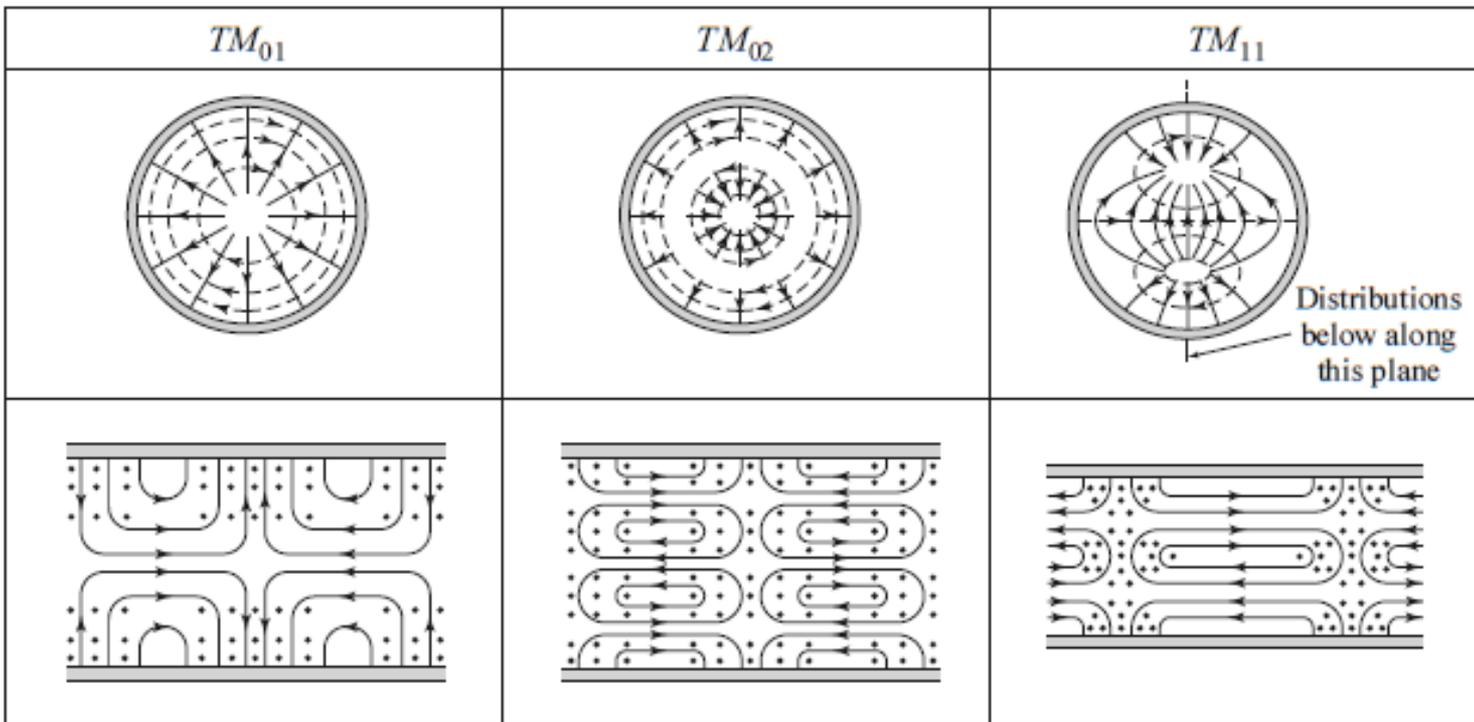
$$H_r = \frac{j}{k_c^2} \left(\frac{\omega \epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$

$$H_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right)$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM_{nm}

Distribuição de campo dos modos TM_{01} , TM_{02} e TM_{11} E (—) e H (- - -)



$$E_z(r, \phi, z) = [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot J_n(k_c \cdot r) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

■ Tem-se

$$H_z \neq 0 \quad \text{e} \quad E_z = 0$$

■ Sendo

$$H_z(r, \phi, z) = R(r) \cdot F(\phi) \cdot e^{-j\beta \cdot z}$$

■ Resolve-se a equação de onda

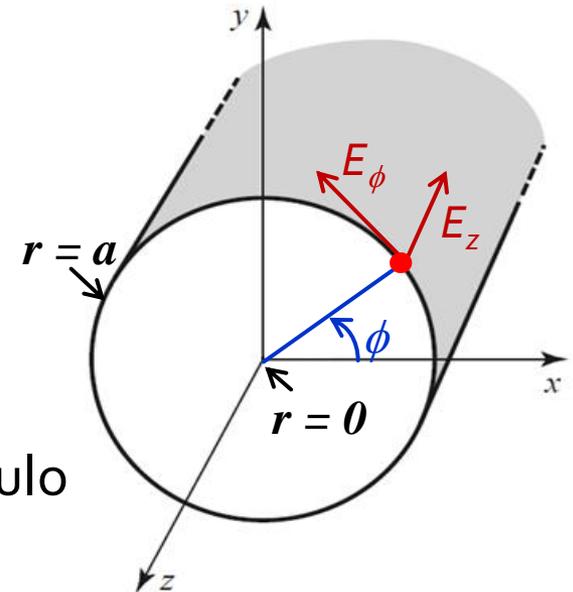
■ Aplica-se as condições de contorno

■ Campo elétrico tangencial ao condutor é nulo

Em

$$r = a \rightarrow E_\phi = 0$$

→ precisamos da equação de E_ϕ



Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

- Da equação de onda obtém-se a expressão de H_z

$$H_z(r, \phi, z) = [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot \underline{J_n(k_c \cdot r)} \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

J_n – Função de Bessel de primeira espécie e ordem n

$$k_c = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = 2\pi \cdot f_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}$$

f_c – Frequência de corte do modo de propagação

- Conhecido $H_z(r, \phi, z)$ obtém-se $E_\phi \propto \delta H_z(r, \phi, z) / \delta r$

$$E_\phi(r, \phi, z) = j \frac{\omega \mu}{k_c^2} [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot \underline{J'_n(k_c \cdot r)} \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

Derivada da função de Bessel de primeira espécie

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE_{nm}

$$E_{\phi}(r, \phi, z) = j \frac{\omega \mu}{k_c^2} [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot J'_n(k_c \cdot r) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

- Frequência de corte dos modos TE_{nm}

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm}$$

p'_{nm} m-ésimo zero de $J'_n(x)$
valores tabelados

$J'_n(x)$ primeira derivada da função de Bessel de primeira espécie de ordem n

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE_{nm}

- Zeros da primeira derivada da função de Bessel de primeira espécie – J'_n

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

- Qual o modo TE com menor frequência de corte?

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{Modo } TE_{11} \\ \rightarrow \text{Pois } p'_{11} = 1,841 \text{ é o menor zero de } J'_n(x) \end{array}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

- Zeros da primeira derivada das funções de Bessel de primeira espécie

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

- Exemplo – guia circular, preenchido com ar e raio $a = 50 \text{ mm}$

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{mn}$$

$$f_c(\text{TE}_{11}) = ?$$

$$f_c(\text{TE}_{21}) = ?$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE_{nm}

- Zeros da primeira derivada das funções de Bessel de primeira espécie

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

- Exemplo – guia circular, preenchido com ar e raio $a = 50 \text{ mm}$

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{mn}$$
$$f_c(TE_{11}) = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 50} \cdot 1.841 = 1,76 \text{ GHz}$$
$$f_c(TE_{21}) = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 50} \cdot 3,054 = 2,92 \text{ GHz}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Frequências de corte dos modos TE e TM

Modo TM $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

TE₁₁ - $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot 1,841 \rightarrow$ modo fundamental

TM₀₁ - $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot 2,405 \rightarrow$ segundo modo

- Relação entre frequências de corte do segundo modo e do modo fundamental

$$\frac{f_c(\text{TM}_{01})}{f_c(\text{TE}_{11})} = \frac{2,405}{1,841} = 1,31$$

- Banda em que se propaga apenas o modo fundamental no guia cilíndrico
 - em torno de 30%
 - menor que a do guia de ondas retangular que é da ordem de 52% para $b=a/2$

Modo TE $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm}$

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

Guia de Ondas Cilíndrico

Frequências de corte dos modos TE e TM

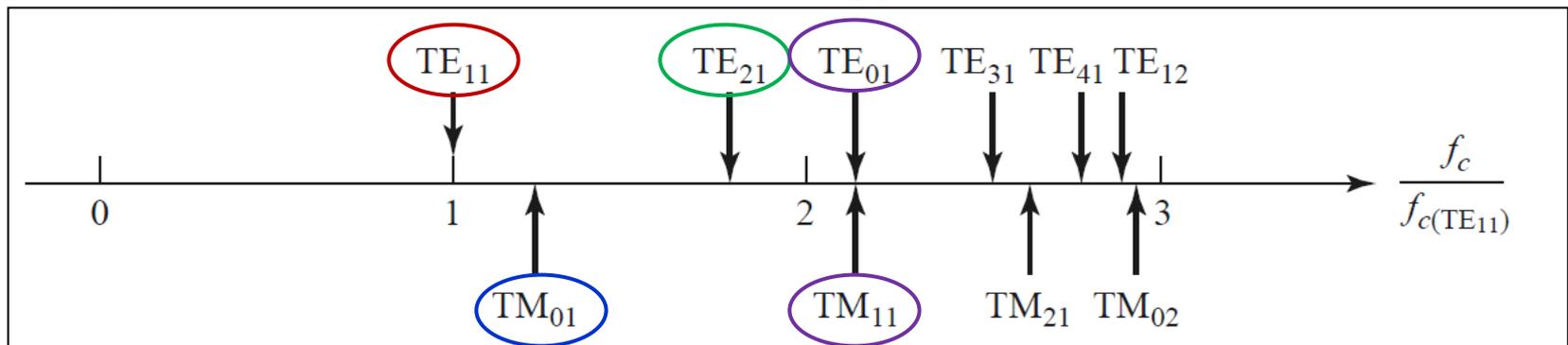
Modo TM $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

Modo TE $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm}$

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

- Frequência de corte dos primeiros modos TE e TM, normalizadas em relação à frequência de corte do modo fundamental, $f_c(TE_{11})$



Guia de Ondas Cilíndrico

Frequências de corte dos modos TE e TM - Exemplo

- Considere um guia de ondas circular com 10 mm de raio preenchido por ar.
- Calcule três primeiras frequências de corte de ondas EM propagando-se nesse guia.
- Sendo $a = 10 \text{ mm}$ e $v = c = 3 \cdot 10^{11} \text{ mm/s}$

$$\text{Modo TM} \quad f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm} = 4,77 \cdot p_{nm} \text{ (GHz)}$$

$$\text{Modo TE} \quad f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm} = 4,77 \cdot p'_{nm} \text{ (GHz)}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Frequências de corte dos modos TE e TM - Exemplo

Modo TM $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

Modo TE $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm}$

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

Modo TE₁₁ $f_c = 4,77 \cdot 1,841 = 8,79 \text{ (GHz)}$

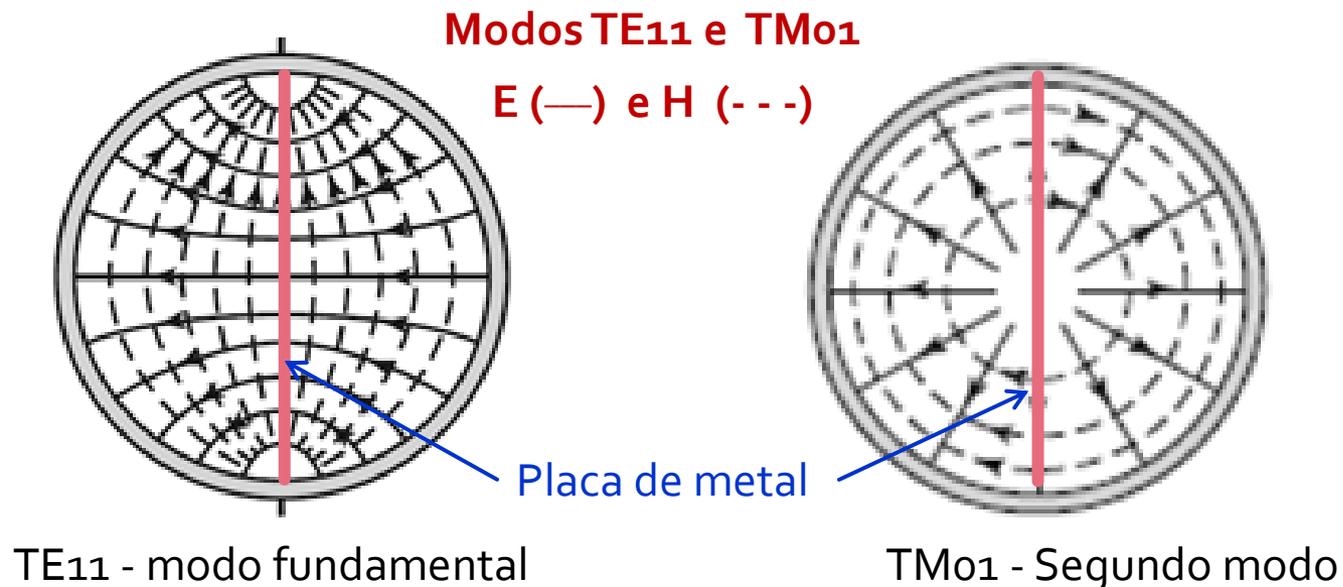
Modo TM₀₁ $f_c = 4,77 \cdot 2,405 = 11,69 \text{ (GHz)}$

Modo TE₂₁ $f_c = 4,77 \cdot 3,054 = 14,58 \text{ (GHz)}$

Guia de Ondas Cilíndrico

Frequências de corte dos modos TE e TM

- Técnica para alargar a banda de operação do guia de ondas circular
 - Suprimir o segundo modo de propagação TM_{01} sem afetar o modo fundamental TE_{11}
 - Placa metálica perpendicular ao campo elétrico do modo TE_{11} (esse modo não é prejudicado) e tangencial ao campo elétrico do modo TM_{01} (esse modo é suprimido)



Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

- Componentes de campo do modo TE₁₁ – modo fundamental (com $B=0$)

$$H_z = A \sin \phi J_1(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

$$E_\rho = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2 \rho} A \cos \phi J_1(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu}{k_c} A \sin \phi J_1'(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

$$H_\rho = \frac{-j\beta}{k_c} A \sin \phi J_1'(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

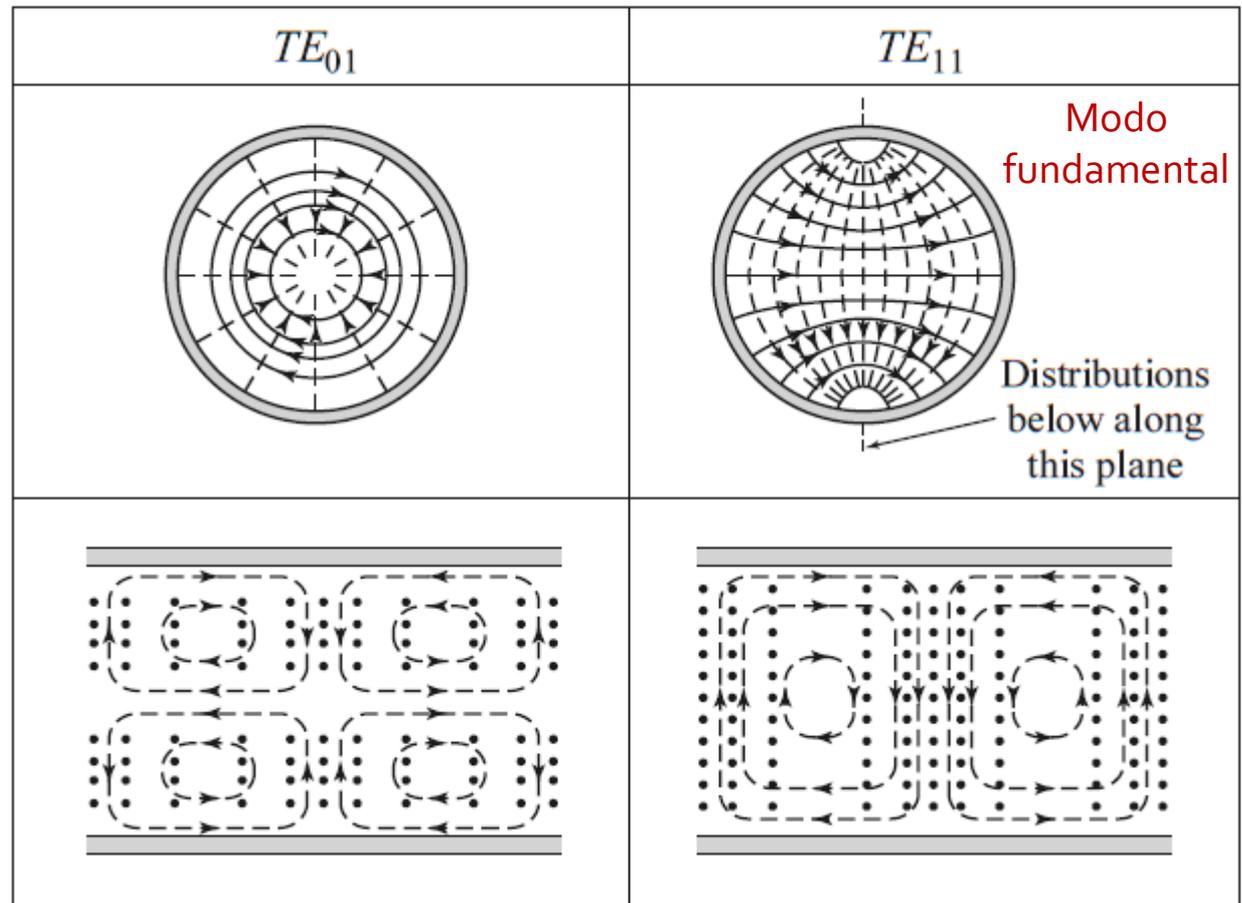
$$H_\phi = \frac{-j\beta}{k_c^2 \rho} A \cos \phi J_1(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

$$E_z = 0$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

Modos TE_{01} e TE_{11}
 E (—) e H (- - -)



Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

- Fator de propagação

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p'_{nm}}{a}\right)^2}$$

- Frequência de corte

$$f_{c_{nm}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{p'_{nm}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

- Impedância de onda

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = \frac{-E_\phi}{H_\rho} = \frac{\eta k}{\beta}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE - atenuação

- Atenuação do modo $TE_{n,m}$ devido a perdas condutivas

$$\alpha_c = \frac{R_s}{a \eta \left[1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right]^{1/2}} \cdot \left[\left(\frac{f_c}{f} \right)^2 + \frac{n^2}{p'_{nm}{}^2 - n^2} \right] \text{ (Np/m)}$$

sendo

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

- Atenuação devido a perdas dielétricas

$$\alpha_d = \frac{k^2 \tan \delta}{2\beta} \text{ (Np/m)} \quad \text{sendo: } \beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}, \quad k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad \text{e} \quad k_c = \frac{p'_{nm}}{a}$$

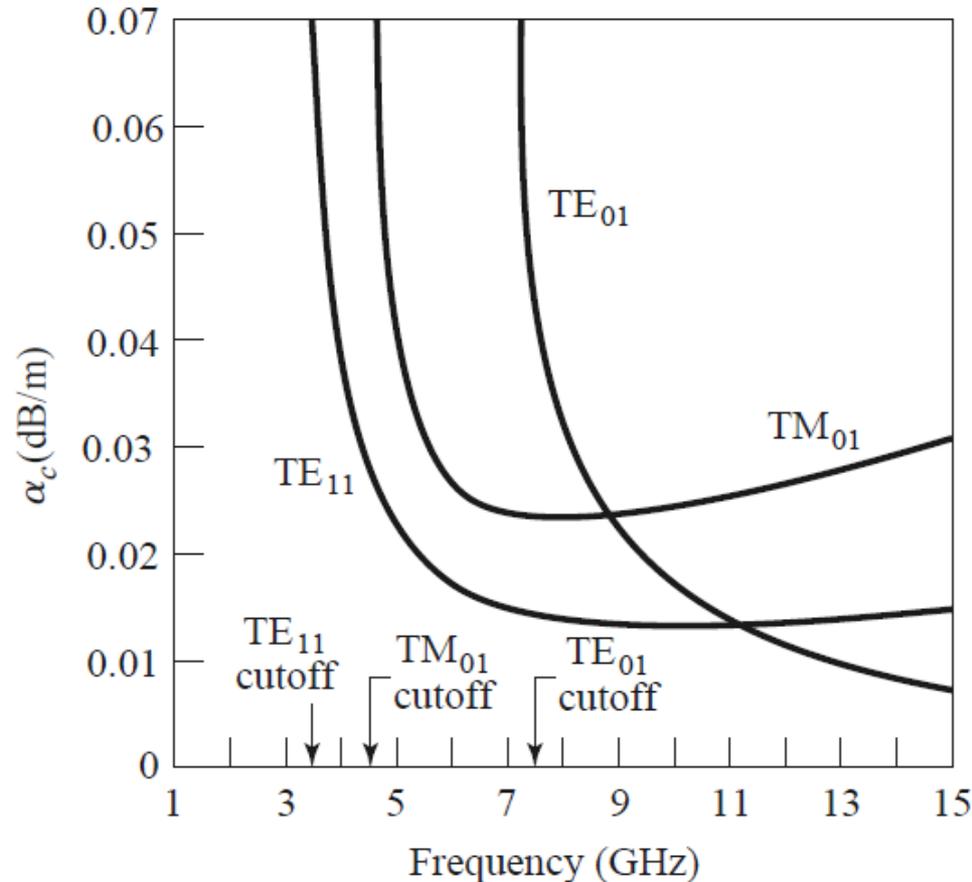
- Atenuação em dB/m

$$\alpha_c \text{ (dB/m)} = 8,686 \cdot \alpha_c \text{ (Np/m)} \quad \alpha_d \text{ (dB/m)} = 8,686 \cdot \alpha_d \text{ (Np/m)}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE e TM

Atenuação por perdas condutivas versus frequência



Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE e TM – Frequência de corte

Modos TM

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$$

p_{nm} – zeros da função de Bessel de primeira espécie

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

Modos TE

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm}$$

p'_{nm} – zeros da derivada da função de Bessel de primeira espécie

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

Modo fundamental: TE₁₁

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE e TM – Sumário

Quantity	TE _{nm} Mode	TM _{nm} Mode
k	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
k_c	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$
β	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
λ_c	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
λ_g	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
v_p	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
α_d	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE e TM – Sumário

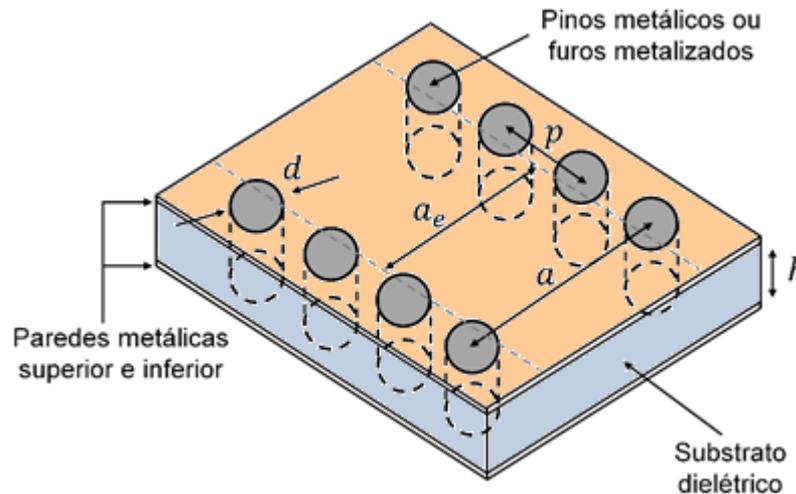
Quantity	TE _{nm} Mode	TM _{nm} Mode
E_z	0	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
H_z	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	0
E_ρ	$\frac{-j\omega\mu n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
E_ϕ	$\frac{j\omega\mu}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
H_ρ	$\frac{-j\beta}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
H_ϕ	$\frac{-j\beta n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
Z	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$

Guia de Ondas

SIW – Guia de ondas integrado ao substrato Substrate Integrated Waveguide

- Tecnologia recente, do início dos anos 2.000
- Guia de ondas fabricado em tecnologia planar

- Estrutura do SIW



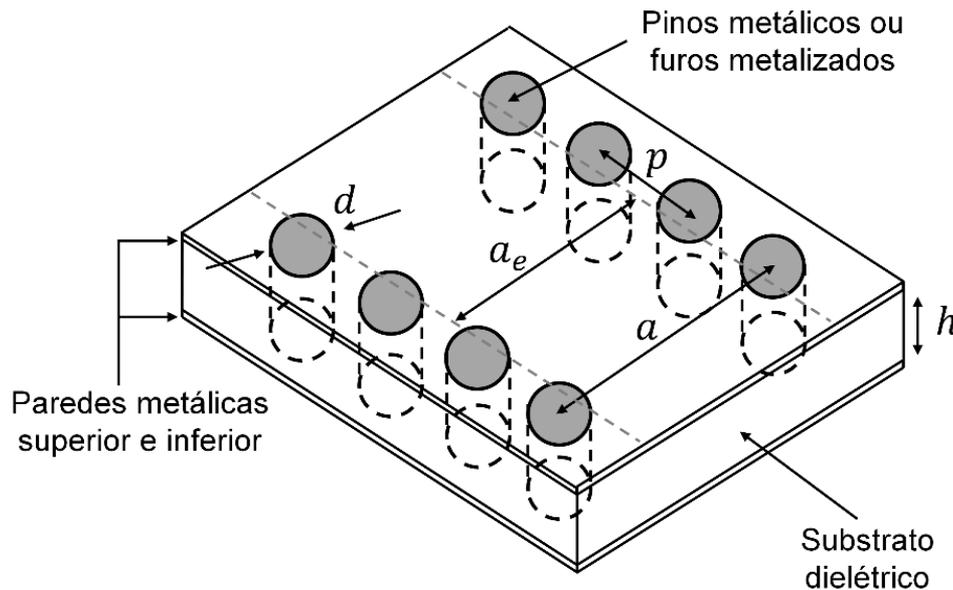
- Substrato dielétrico
- Metalizado nas duas faces
- Fileiras de pinos metálicos conectando as duas faces metalizadas

Referência – Caleffo, R. C. Estruturas passivas planares sintonizáveis em tecnologia SIW no espectro de micro-ondas. Tese de doutorado, EPUSP, 2021. (Banco de teses da USP)

Guia de Ondas

SIW – Guia de ondas integrado ao substrato Substrate Integrated Waveguide

- Equivalência com guia de onda retangular



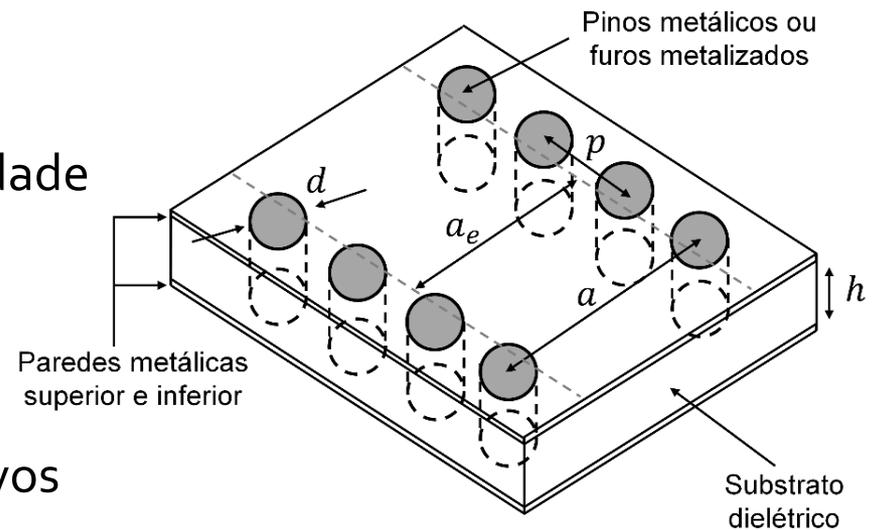
- Metalização das faces superior e inferior do substrato
 - Paredes superior e inferior do guia de ondas
- Fileiras de pinos metalizados
 - Paredes laterais do guia de ondas

Guia de Ondas

SIW – Guia de ondas integrado ao substrato Substrate Integrated Waveguide

■ Principais parâmetros do SIW

- Substrato
 - h – espessura
 - ϵ_r e $tg(\delta)$
- Camada metálica
 - t – espessura
 - σ – condutividade
- Pinos metálicos
 - d – diâmetro dos pinos
 - p – distância entre pinos consecutivos
 - a – distância entre as fileiras de pinos

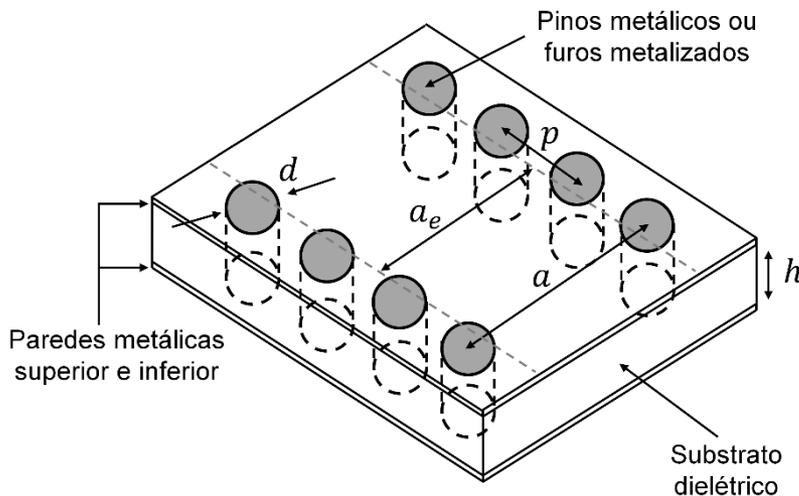


Guia de Ondas

SIW – Guia de ondas integrado ao substrato Substrate Integrated Waveguide

■ Condições de projeto

- Para que as fileiras de pinos metálicos atuem como paredes laterais de um guia de ondas retangular



$$0,05 < \frac{p}{\lambda_c} < 0,25$$

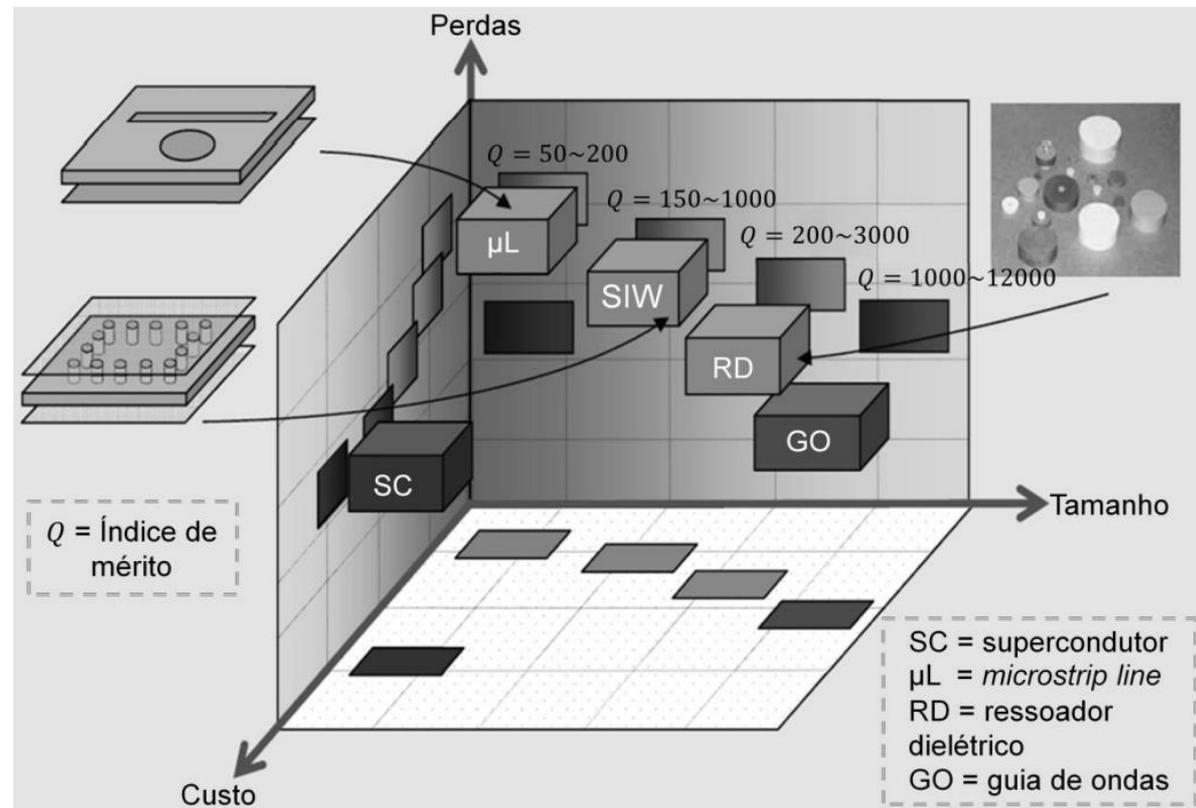
$$d < p \leq 2d$$

$$\frac{\alpha_{SIW}}{k_0} < 10^{-4}$$

Guia de Ondas

SIW – Guia de ondas integrado ao substrato Substrate Integrated Waveguide

Comparação
com outras
tecnologias de
micro-ondas



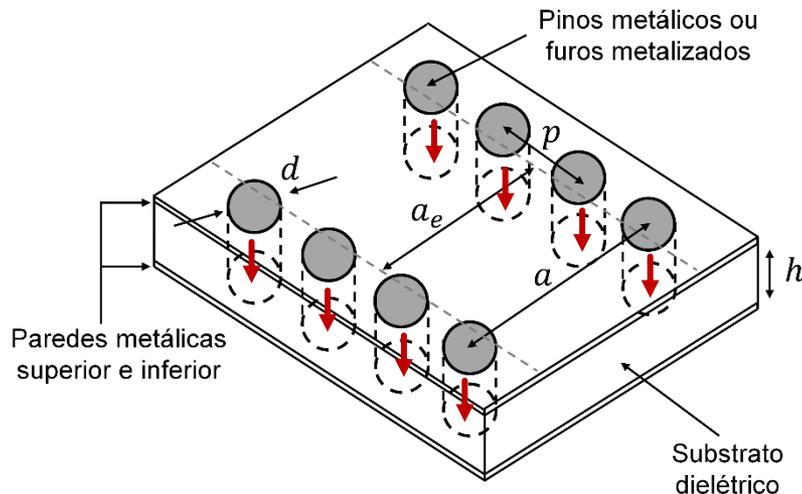
Guia de Ondas

SIW – Guia de ondas integrado ao substrato

Propagação no SIW

Modos TE

- Propagam-se para $f > f_c$
- Corrente na parede lateral é vertical
- Flui pelos pinos metálicos



Modos TM

- Não se propagam
- Corrente na parede lateral seria perpendicular aos pinos metálicos
- Não flui devido à descontinuidade da parede lateral

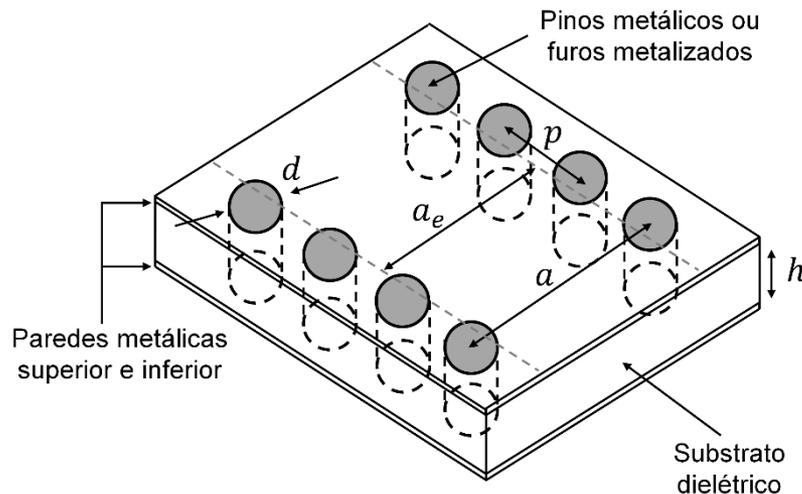
Modo Fundamental

- Modo TE_{10}

Guia de Ondas

SIW – Guia de ondas integrado ao substrato Substrate Integrated Waveguide

- Correspondência entre dimensões: SIW e guia de ondas retangular

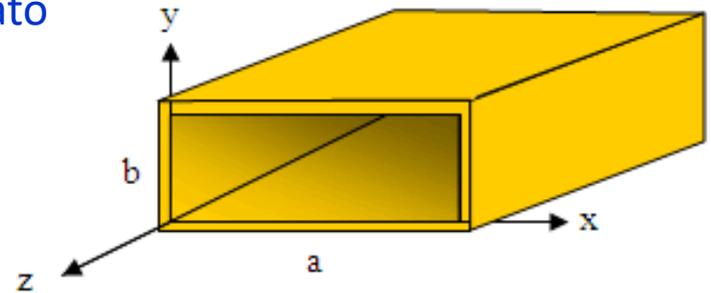


Espessura
do substrato

$$h \Leftrightarrow b$$

$$a_e \Leftrightarrow a$$

↑
largura efetiva, depende
do modo de propagação

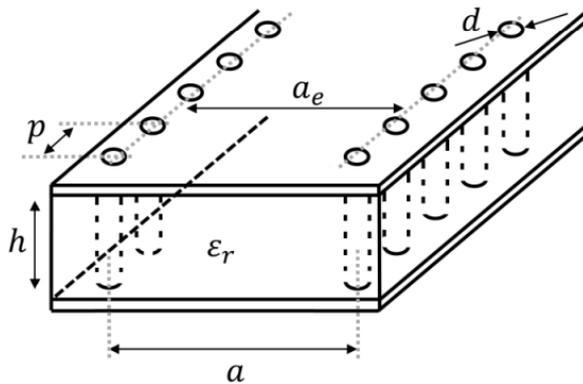


➤ Largura efetiva no modo TE_{10} $\rightarrow a_e = a - 1,08 \frac{d^2}{p} + 0,1 \frac{d^2}{a}$

Guia de Ondas

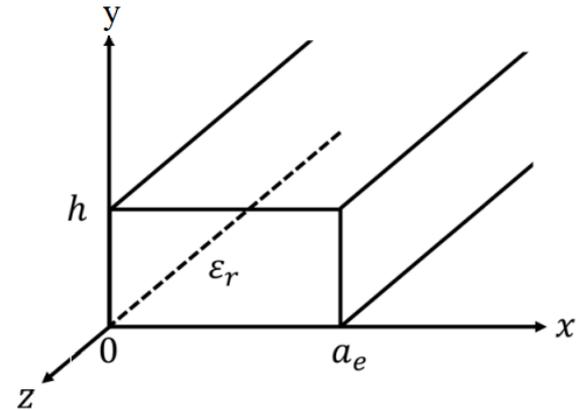
SIW – Guia de ondas integrado ao substrato

Frequência de corte do modo fundamental, TE_{10}



$$h \Leftrightarrow b$$

$$a_e \Leftrightarrow a$$



$$f_{c_{10}} = \frac{v}{2 \cdot a_e}$$

$$a_e = a - 1,08 \frac{d^2}{p} + 0,1 \frac{d^2}{a}$$

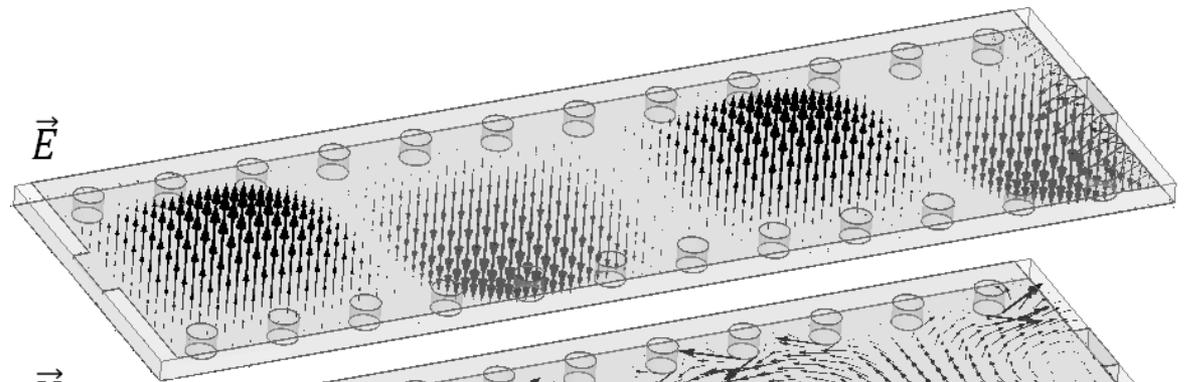
$$f_{c_{10}} = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_r}} \left(a - 1,08 \frac{d^2}{p} + 0,1 \frac{d^2}{a} \right)^{-1}$$

Guia de Ondas

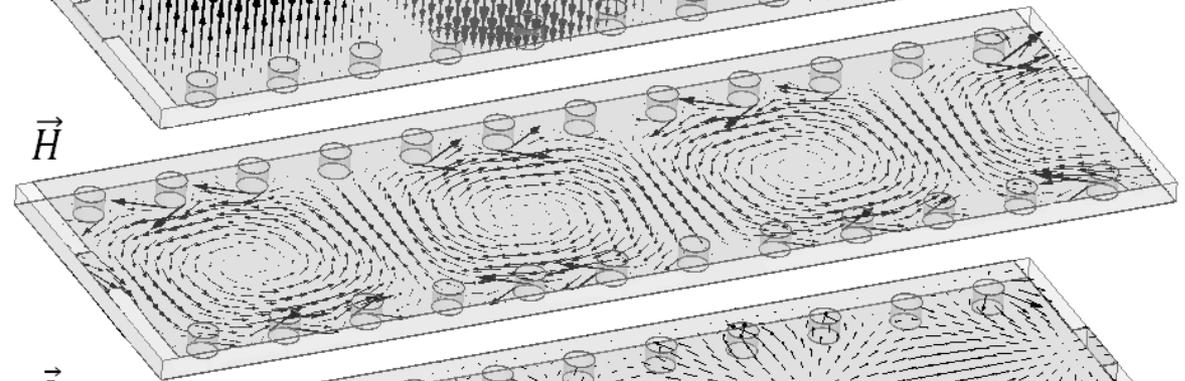
Guia de ondas integrado ao substrato

Guia SIW
Modo TE_{10}

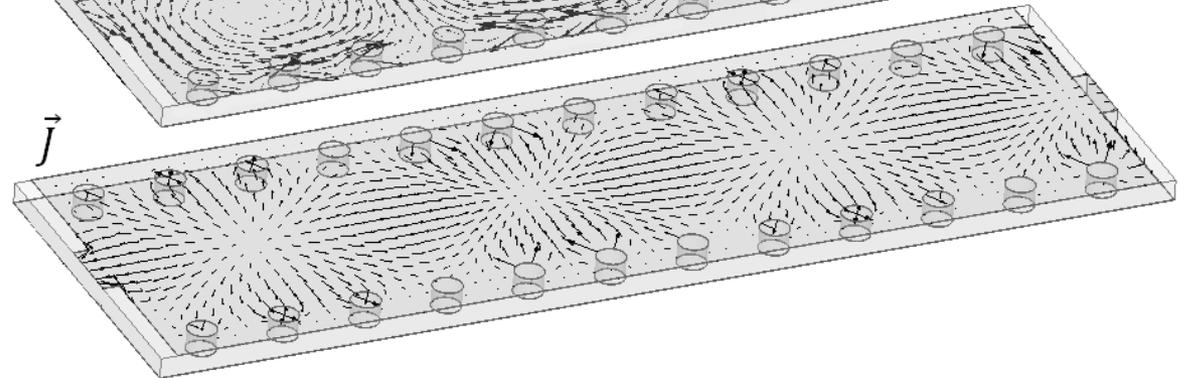
Campo elétrico



Campo magnético



Densidade de corrente



Guia de Ondas

Guia de ondas integrado ao substrato

Intensidade do Campo Elétrico – Modo TE_{10}

