Lista 13 - Produto Interno

Exercício 1. No espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ consideremos o produto interno

$$\langle\, f\,,g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)dt\,,$$

onde $f\,,g \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Calcule $\langle f\,,g\rangle$, $\|f\|$, $\|g\|$ e $\|f+g\|$ para os seguinte casos:
(a) $f(t) = t^3 - t - 1$ e $g(t) = t^2 + 1$, para $t \in \mathbb{R}$.
(b) $f(t) = 2$ e $g(t) = t^3 + t + 1$, para $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. No espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ considere

$$\langle f\,,g\rangle = a_o\,b_o + a_1\,b_1 + \cdots + a_n\,b_n\,,$$

onde $f\,,g \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, são dados por $f(t) = a_o + a_1\,t + \cdots + a_n\,t^n$ e $g(t) = b_o + b_1\,t + \cdots + b_n\,t^n$, para $t \in \mathbb{R}$.

A função $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ é um produto interno no espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$? Justifique sua resposta.

Exercício 3.

(a) No espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, considere o produto interno $\langle A\,,B\rangle = tr(B^t\,A)$, para $A\,,B \in M_2(\mathbb{R})$. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcule: $\langle A\,,B\rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$ e $d(A,B)$.

(b) Encontre uma base ortonormal de $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, segundo o produto interno $\langle\,\cdot\,,\cdot\rangle$ introduzido acima.

Exercício 4. Considere o espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$, munido do produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Se $u\,,v \in V$ são vetores tais que $\|u\| = 5$, $\|v\| = 8$ e $\|u+v\| = \sqrt{129}$, determine o cosseno do ângulo entre os vetores u e v.

Exercício 5. No espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, consideremos o produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ do Exercício 1. acima. Verifique se os vetores $p_o\,,p_1\,,p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, onde

$$p_o(t) = 1\,,\quad p_1(t) = t\,,\quad p_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}\,,\ \text{para } t \in \mathbb{R}\,,$$

são dois a dois ortogonais em relação ao produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$.

Exercício 6. Considere o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ munido do produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ usual. Sejam $u = (2\,,2\,,2)\,,v = (3\,,3\,,1) \in \mathbb{R}^3$.
(a) Determine dois vetores, v_1 e v_2, tais que $v = v_1 + v_2$ e o vetor v_1 é ortogonal aos vetores u e $v_2 = \lambda\cdot u$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Se $w = (-5\,,1\,,-1)$, decompor o vetor v em uma soma de dois vetores, sendo um deles pertencente ao subespaço vetorial $W = [u\,,w]$ e uma outra parcela pertencente ao subespaço vetorial $W^\perp$.

(c) Determinar uma base ortonormal do subespaço vetorial W.

Exercício 7. Considere o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$, munido do produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ usual. Determinar a projeção ortogonal do vetor $u = (1\,,1\,,0\,,-1)$, no subespaço $W = \{(x\,,y\,,z\,,t) \in \mathbb{R}^4\,;\, x - y - z = 0 \text{ e } z - 2\,t = 0\}$.

Exercício 8. Considere o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ com o produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ do Exercício 1.

(a) Utilizando o processo de Gram-Schmidt, ortonormalizar a base $\{q_o\,,q_1\,,q_2\}$, onde $q_o(t) = 1\,,\ q_1(t) = 1 + t$ e $q_2(t) = 2\,t^2$, para $t \in \mathbb{R}$.

(b) Achar o complemento ortogonal do subespaço $W = [r_o\,,r_1]$ onde $r_o(t) = 5$ e $r_1(t) = 1 + t$, para $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 9. Considere o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$ munido do produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ usual. Determinar uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços abaixo, utilizando o processo de Gram-Schmidt:
(a) $W = (1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,2\,,0)\,,(0\,,0\,,3\,,4)]$.
(b) $W = [(2\,,0\,,0\,,0)\,,(1\,,3\,,3\,,0)\,,(3\,,-3\,,-3\,,0)]$.

Exercício 10. Considere $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ usual. Seja $\mathcal{C} = \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{=u_1}, \underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\,,\frac{-1}{\sqrt{6}}\,,\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)}_{=u_2}, \underbrace{\left(0\,,\frac{-1}{\sqrt{2}}\,,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}_{=u_3} \right\}$ base ortonormal do espaço vetorial real consirado.
(a) Encontre a matriz das coordenadas do $v = (1\,,7\,,8)$ relativamente à base $\mathcal{C}$.
(b) Encontre a projeção ortogonal do vetor v no subespaço vetorial $W = [u_1\,,u_2]$.
(c) Sejam $u\,,w \in \mathbb{R}^3$, tais que $[u]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $[w]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encontre $\|u\|\,,\|v\|$ e o ângulo entre os vetores u e v.
(d) Calcule $||u+v||$.
(e) Calcule $||u_1+u_2+u_3||$.

Exercício 11. Considere o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$ munido do produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ usual. Verfique quais dos operadores lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ abaixo são isometrias de $\mathbb{R}^2$:
(a) $T(x\,,y) = (x+y\,,x-y)$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.
(b) $T(x\,,y) = \left(\frac{1}{2}\,x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\,x + \frac{1}{2}\,y\right)$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.
(c) $T(x\,,y) = (y\,,x)$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 12. Considere o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ munido do produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ usual. Determine $m \in \mathbb{R}$, de modo que o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por:

$$T(x\,,y\,,z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,x + \frac{1}{\sqrt{3}}\,y + m\,z\,,-\frac{1}{\sqrt{6}}\,x + \frac{2}{\sqrt{6}}\,y - \frac{1}{\sqrt{6}}\,z\,,-\frac{1}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,z\right), \quad \text{para} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3,$$

seja uma isometria em $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

Exercício 13. Considere o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, munido o produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ do Exercício 1.
(a) Ortonormalize a base usual, $\mathcal{B} = \{p_o\,,p_1\,,p_2\}$.
(b) Considere o operador linear $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, cuja matriz em relação a base $\mathcal{C}$, encontrada no item anterior, seja $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ m & n & p \end{pmatrix}$. Determine $m\,,n\,,p \in \mathbb{R}$, de modo que o operador linear T seja uma isometria no espaço vetorial real considerado.

Exercício 14. Considere espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ munido do produto interno do Exercício 3.

O operador linear $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dado por $T(A) = A^t$, para $A \in M_2(\mathbb{R})$ é uma isometria no espaço euclidiano considerado?

Exercício 15. Seja $(V\,,+\,,\cdot)$ espaço vetorial real, munido do produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Verifique se os operadores abaixo são auto-adjuntos:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ o produto interno usual e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x\,,y\,,z) = (y+2\,z\,,x+3\,z\,,2\,x+3\,y)$, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $V = \mathscr{P}_1(\mathbb{R})$, $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ o produto interno do Exercício 1. e $T : \mathscr{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_1(\mathbb{R})$, dado por $T(p) = q$, para $p \in \mathscr{P}_1(\mathbb{R})$, onde $p(t) = a + b\,t$ e $q(t) = (a + 4\,b) + (4\,a + 2\,b)\,t$, para $t \in \mathbb{R}$.

(c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ o produto interno do Exercício 3. e $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$