Lista 12 - Autovalores, Autovetores e Diagonalização

Exercício 1. Encontrar os autovalores e autovetores de $T \in \mathcal{L}(V)$ nos seguintes casos:

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $T : V \to V$, dada por $T(x\,,y) = (x+y\,,x-y)$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $T(1\,,0\,,0) = (2\,,0\,,0)$, $T(0\,,1\,,0) = (2\,,1\,,2)$ e $T(0\,,0\,,1) = (3\,,2\,,1)$.

(c) $V = \mathbb{R}^4$ e $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, onde $\mathcal{B}$ é base canônica de $\mathbb{R}^4$.

Exercício 2.

(a) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz triangular (superior ou inferior), isto é, $A = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = 0$, sempre que $i > j$ (ou sempre que $i < j$). Qual o polinômio característico associado a matriz A?

(b) Sejam $A\,,B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes triangulares que tenham a mesma diagonal principal. Existe alguma relação entre seus polinômios característicos? Qual?

(c) Mostre que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de $T \in \mathcal{L}(V)$, então λ^n é um autovalor do operador linear T^n.

(d) Mostre que se $p = p(t)$ é um polinômio e $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de $T \in \mathcal{L}(V)$, então $p(\lambda)$ será um autovalor do operador linear $p(T)$, onde

$$p(T) = a_o \cdot I + a_1 \cdot T + \cdots + a_n \cdot T^n\,, \quad \text{para} \quad T \in \mathcal{L}(V)\,,$$

onde $I : V \to V$ é operador identidade e $p(t) = a_o + a_1\,t + \cdots + a_n\,t^n$, para $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. Achar os autovalores e autovetores do operador linear T de $\mathbb{R}^2$, de modo que:

(a) $T(x\,,y) = (-x\,,-y)$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $T(1\,,0) = (0\,,-1)$ e $T(0\,,1) = (1\,,0)$.

Exercício 4. Achar os autovalores e autovetores do operador linear T de $\mathbb{R}^3$, de modo que: $T(1\,,0\,,0) = (0\,,0\,,0)\,,\ T(0\,,1\,,0) = (0\,,0\,,0)$ e $T(0\,,0\,,1) = (5\,,-1\,,2)$.

Exercício 5. Seja $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz de um operador linear T de $\mathbb{R}^2$, em relação à base canônica $\mathcal{B}$. Encontre todos os autovalores do operador linear T. Existem, neste caso, dois autovetores L.I.?

Exercício 6. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por

$$T(x\,,y) = (-y\,,x)\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Mostre que operador linear T não admite autovetores (isto é, autovetores no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$).

Exercício 7. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, cuja matriz em relação à base canônica é dada por $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule os autovetores e os respectivos subespaços próprios (auto-espaços) associados ao operador linear T.

(b) Existe uma base $\mathcal{B}$ do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ de modo que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal?

Exercício 8. Suponha que $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ é o operador linear dado por:

$$T(p) = q\,, \quad \text{para} \quad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,$$

onde

$$p(t) = a_o + a_1\,t + a_2\,t^2, \quad \text{e} \quad q(t) = (5\,a_o + 6\,a_1 + 2\,a_2) - (a_1 + 8\,a_2)\,t + (a_o - 2\,a_2)\,t^2\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Achar todos os autovalores do operador linear T.

(b) Achar os respectivos autovetores do operador linear T.

(c) Determinar a dimensão e uma base de cada um dos auto-espaços associados ao operador linear T.

(d) O operador T é diagonalizável? Justifique sua resposta.

Exercício 9. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ o operador linear dado por:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,c & a+c \\ b-2\,c & d \end{pmatrix}, \quad \text{para} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\,.$$

(a) Achar todos os autovalores e os autovetores associados do operador linear T.

(b) T é diagonalizável? Justifique sua resposta.

Exercício 10. Definimos o **<u>traço</u>** de uma matriz quadrada A como sendo a soma dos elementos da sua diagonal principal.

Mostre que a equação característica associada a uma matriz 2×2 é dada por

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\,\lambda + \det(A) = 0\,,$$

onde $\operatorname{tr}(A)$ denota o traço da matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 11. Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ a matriz de um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ em relação à base canônica. Pergunta-se: o operador linear T é diagonalizável?

Exercício 12. A matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ é diagonalizável? Caso afirmativo encontre a matriz inversível M que realiza a diagonalização.

Exercício 13. A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ é diagonalizável? Caso afirmativo encontre a matriz inversível M que realiza a diagonalização.

Exercício 14. Determinar uma matriz inversível $M \in M_2(\mathbb{R})$, se existir, de modo que a matriz $M^{-1}\,A\,M$ seja uma matriz diagonal, em cada um dos seguintes casos:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ **(b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 15. Verificar, em cada um dos itens abaixo, se o operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, dado pela sua matriz em relação à base canônica $\mathcal{B}$, é diagonalizável.

(a) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ **(b)** $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{pmatrix}$, para quaisquer $m\,, n \in \mathbb{R}$.

Exercício 16. Verificar em cada um dos itens abaixo se o operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, dado pela sua matriz com relação à base canônica $\mathcal{B}$, é diagonalizável.

(a) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ **(b)** $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 17. Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ não é semelhante a uma matriz diagonal se $a \neq 0$.

Exercício 18. Encontre uma matriz diagonal semelhante a matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.