Lista 8 - Mudança de Base

Exercício 1. Sejam
$$\mathcal{B} = \{\,(1\,,0)\,,(0\,,1)\,\}, \quad \mathcal{C} = \{\,(-1\,,1)\,,(1\,,1)\,\}, \quad \mathcal{D} = \{\,(\sqrt{3}\,,1)\,,(\sqrt{3}\,,-1)\,\}$$
bases do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$.

(a) determinar as coordenadas do vetor $v = (3\,,2)$ em relação à base $\mathcal{B}$, em relação à $\mathcal{C}$ e em relação à base $\mathcal{D}$.

(b) encontre as matrizes de mudança
- da base $\mathcal{B}$, para a base $\mathcal{C}$;
- da base $\mathcal{C}$, para a base $\mathcal{D}$;
- da base $\mathcal{B}$, para a base $\mathcal{D}$.

(c) existe alguma relação entre as matrizes de mudança de bases encontradas no item **(b)**? Qual?

Exercício 2. Seja $\mathcal{B}$ uma base de um espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$. Qual é a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$, para a base $\mathcal{B}$?

Exercício 3. Seja $(V\,,+\,,\cdot)$ o espaço das matrizes 2×2 triangulares superiores. Considere
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
duas bases do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$.

(a) encontre as coordenadas do vetor $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, em relação à base $\mathcal{B}$ e em relação à base $\mathcal{C}$.

(b) encontre as matrizes de mudança
- da base $\mathcal{B}$, para a base $\mathcal{C}$;
- da base $\mathcal{C}$, para a base $\mathcal{B}$.

Exercício 4. A matriz de mudança de uma base $\mathcal{B}$ do espaço vetorial $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$, para a base $\mathcal{C} = \{\,(1\,,1)\,,(0\,,2)\,\}$, desse mesmo espaço vetorial, é dada por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determine os vetores da base $\mathcal{B}$.

Exercício 5. A matriz de mudança da base $\mathcal{B} = \{p_1\,,p_2\}$ para uma base $\mathcal{C}$, ambas de um mesmo subespaço W do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, é dada por: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, onde
$$p_1(x) = 1 + x\,, \quad p_2(x) = 1 - x^2\,, \text{ para } x \in \mathbb{R}\,.$$
Determine os vetores da base $\mathcal{C}$.

Exercício 6. Considere as bases $\mathcal{B} = \{h_1\,,h_2\,,h_3\}$ e $\mathcal{C} = \{g_1\,,g_2\,,g_3\}$ de um espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$, relacionadas da seguinte forma
$$\begin{cases} g_1 = h_1 + h_2 - h_3 \\ g_2 = 2\,h_2 + 3h_3 \\ g_3 = 3\,h_1 + h_3 \end{cases}$$

(a) determine as matrizes mudança
- da base $\mathcal{B}$, para a base $\mathcal{C}$, isto é, $M_{\mathcal{BC}}$;
- da base $\mathcal{C}$, para a base $\mathcal{B}$, isto é, $M_{\mathcal{CB}}$.

(b) se a matriz das coordenadas do vetor $v \in V$ em relação a base $\mathcal{B}$, isto é, $[v]_{\mathcal{B}}$, é dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, encontre a matriz das coordenadas do vetor v, em relação a base $\mathcal{C}$, isto é, $[v]_{\mathcal{C}}$.

(c) se a matriz das coordenadas do vetor $v \in V$, em relação a base $\mathcal{C}$, isto é, $[v]_{\mathcal{C}}$, é dada por $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, encontre a matriz das coordenadas do vetor v, em relação a base $\mathcal{B}$, isto é, $[v]_{\mathcal{B}}$.

Exercício 7. Considere as bases ordenadas $\mathcal{B} = \{p_0\,, p_1\,, p_2\}$ e $\mathcal{C} = \{q_0\,, q_1\,, q_2\}$ do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$, onde

$$p_0(t) = 1\,, \quad p_1(t) = 1 + t\,, \quad p_2(t) = 1 + t^2\,, \text{ para } t \in \mathbb{R}$$

e

$$q_0(t) = t^2\,, \quad q_1(t) = t\,, \quad q_2(t) = 1\,, \text{ para } t \in \mathbb{R}\,.$$

(a) encontre as matrizes de mudança
- da base $\mathcal{B}$, para a base $\mathcal{C}$, isto é $M_{\mathcal{BC}}$,
- da base $\mathcal{C}$, para a base $\mathcal{B}$, isto é $M_{\mathcal{CB}}$.

(b) Se $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, encontre $[v]_{C}$.

(c) se $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, encontre $[v]_{\mathcal{B}}$.

(d) se a base $D = \{r_0\,, r_1\,, r_2\}$ é a base canônica do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$, encontre as matrizes de mudança
- da base $\mathcal{B}$, para a base $\mathcal{D}$,
- da base $\mathcal{D}$, para a base $\mathcal{C}$.

Exercício 8. Considere W o seguinte subespaço vetorial do espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2\,;\, x - y - z = 0 \right\}.$$

(a) Mostre que os conjuntos

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

são bases do subespaço vetorial W.

(b) Encontre as matrizes de mudança
- da base $\mathcal{B}$, para a base $\mathcal{C}$,
- da base $\mathcal{C}$, para a base $\mathcal{B}$.

(c) Encontre uma base $\mathcal{D}$, do subsepaço vetorial W, de modo que a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

seja a matriz de mudança da base $\mathcal{D}$, para a base $\mathcal{B}$, isto é, $P = M_{\mathcal{DB}}$.