Lista 6 - Base e Dimensão

Exercício 1. Determinar uma base do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$, que contenha os vetores $u_1 \doteq (1\,,1\,,1\,,1)$ e $u_2 \doteq (2\,,1\,,2\,,1)$ como dois de seus elementos.

Exercício 2. Sejam $W_1\,,W_2$ subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(W\,,+\,,\cdot)$ e consideremos $V \doteq W_1 \oplus W_2$. Mostre que se o conjunto $\mathcal{A} \doteq \{v_1\,,v_2\,,\cdots,v_k\}$ é uma base do espaço vetorial real $(W_1\,,+\,,\cdot)$ e o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{w_1\,,w_2\,,\cdots,w_r\}$ é uma base do espaço vetorial real $(W_2\,,+\,,\cdot)$, então o conjunto $\gamma \doteq \{v_1\,,v_2\,,\cdots,v_k, w_1, w_2, \cdots, w_r\}$ será uma base do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$.

Exercício 3. Suponhamos que o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,\cdots,u_n\}$ é uma base do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$. Mostre que:

(a) o conjunto $\gamma \doteq \{u_1\,,u_1+u_2\,,u_1+u_2+u_3\,,\cdots,u_1+\cdots+u_n\}$ também é um base do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$.

(b) sejam $\alpha_j \neq 0$, para cada $j \in \{1\,,\cdots,n\}$. Então o conjunto $\delta \doteq \{\alpha_1\cdot u_1\,,\cdots,\alpha_n\cdot u_n\}$ também será uma base do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$.

Exercício 4. Verificar em cada um dos casos se o subconjunto $\mathcal{B}$ é uma base do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$.

(a) $\mathcal{B} \doteq \{p_1\,,p_2\,,p_3\,,p_4\}$ e $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, munido das operações usuais, onde

$$p_1(t) \doteq 1\,,\quad p_2(t) \doteq 1+t\,,\quad p_3(t) \doteq 1-t^2\,,\quad p_4(t) \doteq 1-t-t^2-t^3\,,\ \text{para } t \in \mathbb{R}\,.$$

(b) $\mathcal{B} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ e $V = M_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais.

(c) $\mathcal{B} \doteq \{(1\,,1\,,1\,,1)\,,(1\,,1\,,1\,,0)\,,(1\,,1\,,0\,,0)\,,(1\,,0\,,0\,,0)\}$ e $V \doteq \mathbb{R}^4$, munido das operações usuais.

Exercício 5. Verifique que o espaço vetorial real $(\mathscr{P}(\mathbb{R})\,,+,\cdot)$, formado pelos polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$, **não** pode ser gerado por um número finito de elementos do mesmo, ou seja, não possui uma base finita.

Exercício 6. Ache uma base e a dimensão do subespaço vetorial W do espaço vetorial real $(\mathscr{P}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, que é gerado pelos seguintes polinômios:

(a) $\{u\,,v\,,w\}$, onde

$$u(t) \doteq t^3+2\,t^2-2\,t+1\,,\quad v(t) \doteq t^3+3\,t^2-t+4\,,\quad w(t) \doteq 2\,t^3+t^2-7\,t-7\,,\ \text{para } t \in \mathbb{R}\,.$$

(b) $\{u\,,v\,,w\}$, onde

$$u(t) \doteq t^3+t^2-3\,t+2\,,\quad v(t) \doteq 2\,t^3+t^2+t-4\,,\quad w(t) \doteq 4\,t^3+3\,t^2-5\,t+2\,,\ \text{para } t \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 7. Mostre que os subconjuntos $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, dados por

$$W_1 \doteq \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ 2\,x-3\,y+4\,z=0\} \quad \text{e} \quad W_2 \doteq \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ 3\,x+2\,y-5\,z=0\}\,,$$

são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$. Encontre bases para os subespaços vetorial W_1 e W_2. Quais são as dimensões dos subespaços vetoriais W_1 e W_2? Ache um vetor $v \in W_1 \cap W_2 \setminus \{\overrightarrow{O}\}$.

Exercício 8. Considere os seguintes subespaços vetorias do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$:

$$S \doteq [(1\,,-1\,,2)\,,(2\,,1\,,1)],\quad T \doteq [(0\,,1\,,-1)\,,(1\,,2\,,1)]\,,$$

$$U \doteq \{(x\,,y\,,z)\,;\,x+y=4\,x-z=0\} \quad \text{e} \quad V \doteq \{(x\,,y\,,z)\,;\,3\,x-y-z=0\}\,.$$

Determine bases e as dimensões dos seguintes subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$:

(a) S, **(b)** T, **(c)** U, **(d)** V, **(e)** $S+T$, **(f)** $S\cap T$, **(g)** $T+U$, **(h)** $T\cap U$.

Exercício 9. Determinar uma base e a dimensão do espaço vetorial real formado pelas soluções de cada um dos sistemas lineares homogêneos abaixo:

$$\textbf{(a)} \begin{cases} 2\,x-2\,y+z=0 \\ 3\,x-y+3\,z=0 \\ 3\,y+4\,z=0 \end{cases}, \quad \textbf{(b)} \begin{cases} x-y=0 \\ 2\,x-3\,y=0 \\ 3\,x-\dfrac{1}{2}\,y=0 \end{cases}$$

Exercício 10. Sejam U e W os seguintes subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$:

$$U \doteq \{(a\,,b\,,c\,,d)\ ;\ b-2\,c+d=0\} \quad \text{e} \quad W \doteq \{(a\,,b\,,c\,,d)\ ;\ a=d,\, b=2\,c\}\,.$$

Ache uma base e a dimensão dos seguintes susbespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$:

(a) U, **(b)** W, **(c)** $U\cap W$, **(d)** $U+W$.

Exercício 11. Sejam U e W subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot)$, que têm dimensões 2 e 3, respectivamente.

(a) Mostre que a dimensão do subespaço vetorial $U\cap W$ deverá ser, pelo menos, 1.

(b) O que ocorre se a dimensão do subespaço vetorial $U\cap W$ for igual a 2?

(c) A dimensão do subespaço vetorial $U\cap W$ pode ser igual a 3?

Exercício 12. Sejam U e W dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$, que tem dimensão $\underline{n}$. Suponha que

$$\dim U > \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \dim W > \frac{n}{2}.$$

Mostre que $U\cap W \neq \{O\}$.

Exercício 13. Seja $V \doteq \{\, x\in\mathbb{R}\,;\, x>0\,\}$ e considere em V as seguintes operações:

$$u\oplus v \doteq u\,v \quad \text{e} \quad \alpha\odot u \doteq u^{\alpha}\,.$$

(a) Mostre que $(V\,,+\,,.)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) O subconjunto $\mathcal{B}\doteq\{1\}$ é uma base para o espaço vetorial real $(V\,,+\,,.)$? Justifique sua resposta.

(c) Determine uma base e a dimensão do espaço vetorial real $(V\,,+\,,.)$.

Exercício 14. Encontrar em cada um dos itens abaixo uma base e a dimensão do subespaço vetorial W do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$.

(a) $W\doteq\big\{(x\,,y\,,z\,,t)\in\mathbb{R}^4\,;\, x-y=0 \text{ e } x+2\,y+t=0\big\}$ e $V\doteq\mathbb{R}^4$, munido das operações usuais.

(b) Sejam $A\doteq\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $W\doteq\{X\in M_2(\mathbb{R})\,;\, A\,X=X\}$ e $V\doteq M_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais.

(c) $W\doteq\{p\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,;\, p''(t)=0\,,\ \text{para todo } t\in\mathbb{R}\}$ e $V\doteq\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais.

(d) Sejam $A\doteq\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $W\doteq\{X\in M_2(\mathbb{R})\,;\, A\,X=X\,A\}$ e $V\doteq M_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais.

Exercício 15. Dados U, W subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$, determinar:

(i) uma base e a dimensão do susbespaço vetorial U
(ii) uma base e a dimensão do susbespaço vetorial W
(iii) uma base e a dimensão do susbespaço vetorial $U+W$
(iv) uma base e a dimensão do susbespaço vetorial $U\cap W$

em cada um dos seguintes casos:

(a) $U\doteq\big\{(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3\,;\, x+y+z=0\big\}$, $W\doteq\{(x\,,y\,,0)\,;\, x\,,y\in\mathbb{R}\}$ e $V\doteq\mathbb{R}^3$, munido das operações usuais.

(b) $U\doteq\{A\in M_2(\mathbb{R})\,;\ \operatorname{tr}(A)=0\}$, $W\doteq\{A\in M_2(\mathbb{R})\,;\, A^t=-A\}$ e $V\doteq M_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais, onde $\operatorname{tr}(A)$ denota a soma dos elementos da diagonal principal da matriz A, chamado de **traço da matriz A**.

(c) $U\doteq\{p(t)\in V\,;\, p'(t)=0 \ \text{para todo } t\in\mathbb{R}\}$, $W\doteq\{p(t)\in V\,;\, p(0)=p(1)\}$ e $V\doteq\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais.