Lista 2 - Subespaços Vetoriais

Exercício 1. Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto W é um subespaço vetorial do espaço vetorial $(V\,,+\,,\cdot)$.

(a) $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais e $W \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} ;\, a\,,b\,,c\,,\in \mathbb{R} \right\}$.

(b) $V \doteq \mathbb{R}^4$, munido das operações usuais e $W \doteq \{(x\,,x\,,y\,,y)\,;\, x\,,y \in \mathbb{R}\}$.

(c) $V \doteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, munido das operações usuais e $W \doteq \{p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,;\, p(0) = p(1)\}$.

(d) Sejam $B \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz fixada, $V \doteq M_n(\mathbb{R})$, munido das operações usuais e $W \doteq \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\, B\,A = 0\}$.

(e) $V \doteq \mathbb{R}^n$, munido das operações usuais e $W \doteq \{(x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n)\,;\, a_1\,x_1 + \cdots + a_n\,x_n = 0\}$, onde $a_1\,,\cdots\,,a_n \in \mathbb{R}$ são fixados.

(f) Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ fixada, $V \doteq M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, munido das operações usuais e $W \doteq \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,;\, A\,X = 0\}$.

(g) $V \doteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, munido das operações usuais e $W \doteq \{p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,;\, p'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}\}$.

(h) $V \doteq M_n(\mathbb{R})$, munido das operações usuais e $W \doteq \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\, A^t = A\}$.

(i) $V \doteq M_n(\mathbb{R})$, munido das operações usuais e $W \doteq \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\, A^t = -A\}$.

(j) $V \doteq C^\infty(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$, munido das operações usuais e $W \doteq \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,;\, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \right\}$.

(k) Sejam $x_o \in \mathbb{R}$ fixo, $V \doteq \mathcal{F}(\mathbb{R})$ (conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), munido das operações usuais e $W \doteq \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})\,;\, f(x_o) = 0\}$.

Exercício 2. Quais dos seguintes subconjuntos W de $\mathbb{R}^n$ são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$? Justifique sua resposta.

(a) $W \doteq \{\,(x_1\,,\cdots\,,x_n) \in \mathbb{R}^n\,;\, x_1 \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $W \doteq \{\,(x_1\,,\cdots\,,x_n) \in \mathbb{R}^n\,;\, x_1 = 0\}$.

(c) $W \doteq \{\,(x_1\,,\cdots\,,x_n) \in \mathbb{R}^n\,;\, x_1$ é irracional$\}$.

Exercício 3. Quais dos seguintes subconjuntos abaixo são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathcal{F}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$? Justifique sua resposta.

(a) $W \doteq \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})\,;\, f\left(x^2\right) = f(x)^2\,,\right.$ para todo $\left. x \in \mathbb{R}\right\}$.

(b) $W \doteq \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})\,;\, f(0) = f(1)\}$.

(c) $W \doteq \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})\,;\, f(-3) = 2 + f(1)\}$.

(d) $W \doteq \{\,f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, f(x) > 0\,,$ para todo $x \in \mathbb{R}\}$.

(e) $W \doteq \{\,f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, f(1) = 2\,f(5)\}$.

Exercício 4. Seja $(V\,,+\,,\cdot)$ o espaço vetorial real formado pelas matrizes quadradas de ordem $\underline{n}$, munido com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de número real por matrizes. Quais dos seguintes subconjuntos W do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$ são subespaços vetoriais de V? Justifique sua resposta.

(a) $W \doteq \{A \in V\,;\, A$ é matriz inversível$\}$.

(b) $W \doteq \{A \in V\,;\, A$ é matriz não inversível$\}$.

(c) $W \doteq \{A\,;\, A\,B = B\,A\}$, para uma matriz $B \in V$ fixada.

(d) $W \doteq \{D \in V\,;\, D$ é matriz diagonal$\}$.

(e) $W \doteq \{A \in V\,;\, \det(A) = 0\}$.

Exercício 5. Diga, em cada um dos itens abaixo, se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta (isto é, provando se for verdadeira ou dando um contra-exemplo se for falsa).

(a) Se W_1 e W_2 são susbespaços vetoriais do espaço vetorial $(V\,,+\,,\cdot)$, então $W_1 \cap W_2$ é subespaço vetorial do espaço vetorial $(V\,,+\,,\cdot)$.

(b) Se W_1 e W_2 são susbespaços vetoriais do espaço vetorial $(V\,,+\,,\cdot)$, então $W_1 \cup W_2$ é subespaço vetorial do espaço vetorial $(V\,,+\,,\cdot)$.

(c) Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais do espaço vetorial $(V\,,+\,,\cdot)$. Então, $W_1 \cup W_2$ é subespaço vetorial do espaço vetorial $(V\,,+\,,\cdot)$ se, e somente se, $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

Sugestão: mostre que se W *é subespaço do espaço vetorial* $(V\,,+\,,\cdot)$ *e* $x_o,\ y_o \in V$ *são tais que* $x_o \in W$ *e* $y_o \notin W$*, então* $(x_o + y_o) \notin W$ *e use-o.*

Exercício 6. Encontre, em cada um dos itens abaixo, os subespaços vetoriais $U + W$ e $U \cap W$, onde U, W são subespaços do espaço vetorial $(V\,,+\,,\cdot)$ indicado.

(a) $V \doteq \mathbb{R}^2$, munido das operações usuais, $U \doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\;\; y = 0\right\}$ e $W \doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\;\; x = 2\,y\right\}$.

(b) $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais, $U \doteq \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\,;\;\; a\,,b \in \mathbb{R}\right\}$ e
$W \doteq \left\{\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}\,;\;\; c\,,d \in \mathbb{R}\right\}$.

(c) $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, munido das operações usuais, $U \doteq \{p \in V\,;\, p''(t) = 0\,,\ \text{para todo } t \in \mathbb{R}\}$ e
$W \doteq \{q \in V\,;\, q'(t) = 0\,,\ \text{para todo } t \in \mathbb{R}\}$.