Lista 1 - Espaços Vetoriais

Exercício 1. Verifique se em cada um dos itens o conjunto V, munido das operações $\oplus$ e $\odot$ indicadas, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(a) $V \doteq \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}(x_1\,,y_1\,,z_1)\oplus(x_2\,,y_2\,,z_2) &\doteq (x_1+x_2\,,y_1+y_2\,,z_1+z_2),\\ \alpha\odot(x,y,z) &\doteq (\alpha\,x\,,\alpha\,y\,,\alpha\,z)\,,\end{aligned}$$

onde $(x_1\,,y_1\,,z_1)\,,(x_2\,,y_2\,,z_2)\,,(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3$.

(b) $V \doteq \left\{\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\,;\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$, munido das operações usuais de $M_2(\mathbb{R})$.

(c) $V \doteq \left\{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,3\,x-2\,y=0\right\}$, munido das operações usuais de $\mathbb{R}^2$.

(d) $V \doteq \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,f(-x)=f(x),\ \text{para } x\in\mathbb{R}\}$, munido das operações usuais de funções.

(e) $V = \mathscr{P}(\mathbb{R}) = \{\text{polinômios com coeficientes reais}\}$, munido das operações usuais de funções.

(f) $V \doteq \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(x_1\,,y_1)\oplus(x_2\,,y_2) &\doteq (2\,x_1-2\,y_1\,,y_1-x_1)\\ \alpha\odot(x\,,y) &\doteq (3\,\alpha\,x\,,-\alpha\,x)\,,\end{aligned}$$

onde $(x_1\,,y_1)\,,(x_2\,,y_2)\,,(x\,,y)\in\mathbb{R}^2$.

(g) $V \doteq \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(x_1\,,y_1)\oplus(x_2\,,y_2) &\doteq (x_1+x_2\,,y_1+y_2)\\ \alpha\odot(x\,,y) &\doteq (\alpha\,x\,,0)\,,\end{aligned}$$

onde $(x_1\,,y_1)\,,(x_2\,,y_2)\,,(x\,,y)\in\mathbb{R}^2$.

(h) $V \doteq \left\{(x\,,y\,,z\,,w)\in\mathbb{R}^4\,;\,y=x \text{ e } z=w^2\right\}$, munido das operações usuais de $\mathbb{R}^4$.

(i) $V = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}(x_1\,,y_1)\oplus(x_2\,,y_2) &\doteq (x_1+x_2\,,y_1\,y_2)\\ \alpha\odot(x\,,y) &\doteq (\alpha\,x\,,y^\alpha)\,,\end{aligned}$$

onde $(x_1\,,y_1)\,,(x_2\,,y_2)\,,(x\,,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, onde $\mathbb{R}^*\doteq\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Exercício 2. Considere o conjunto $V \doteq \{\,(x_1\,,x_2)\,;\,x_1\,,x_2\in\mathbb{R}\,\}$. Dados $(x_1\,,x_2)$, $(y_1\,,y_2)\in V$ e $\lambda\in\mathbb{R}$, defina as seguintes operações:

$$(x_1\,,x_2)\oplus(y_1\,,y_2)\doteq(x_1+y_1\,,0)\quad\text{e}\quad\lambda\odot(x_1\,,x_2)\doteq(\lambda\,x_1\,,\lambda\,x_2)\,.$$

$(V\,,+\,,\cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

Exercício 3. Considere o conjunto $V \doteq \{\,(x_1\,,x_2)\,;\,x_1\,,x_2\in\mathbb{R}\,\}$. Mostre que $(V\,,+\,,\cdot)$ **<u>NÃO</u>** é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, quando munido de cada uma das seguintes operações $\oplus$ e $\odot$, justificando as respostas, dadas por:

(a) $(x_1\,,x_2)\oplus(y_1\,,y_2)\doteq(x_1+y_1\,,x_2+y_2)$ e $\lambda\odot(x_1\,,x_2)\doteq(\lambda\,x_1\,,x_2)$.

(b) $(x_1\,,x_2)\oplus(y_1\,,y_2)\doteq(x_1\,,x_2)$ e $\lambda\odot(x_1\,,x_2)\doteq(\lambda\,x_1\,,\lambda\,x_2)$.

(c) $(x_1\,,x_2)\oplus(y_1\,,y_2)\doteq(x_1-y_1\,,x_2+y_2)$ e $\lambda\odot(x_1\,,x_2)\doteq(\lambda^2\,x_1\,,\lambda^2\,x_2)$.

Exercício 4. Sejam $(U\,,+\,,\cdot)$ e $(V\,,+\,,\cdot)$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Considere o produto cartesiano

$$U\times V\doteq\{(u\,,v)\,;\,u\in U \text{ e } v\in V\}\,.$$

Dados $(u_1\,,v_1)\,,(u_2\,,v_2) \in U \times V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, defina as seguintes operações em $U \times V$:

$$\begin{aligned} (u_1\,,v_1) \oplus (u_2\,,v_2) &\doteq (u_1 + u_2\,,v_1 + v_2) \\ \lambda \odot (u_1\,,v_1) &\doteq (\lambda \cdot u_1\,,\lambda \cdot v_1). \end{aligned}$$

Mostre que $(U \times V\,,\oplus\,,\odot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 5. Mostre que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ com as operações usuais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.