Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Departamento de Educação e Ciências
Núcleo de Matemática

Respostas dos Exercícios de Álgebra Linear

Apostila Sérgio Luís Zani

Professora Judith De Paula Araújo
Junho de 2016

1 ESPAÇOS VETORIAIS

Exercício 1.6 Verifique se em cada um dos itens o conjunto V com as operações indicadas é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Resposta: 1, 2, 3, 4, 5 e 9 são espaços vetoriais, e 6, 7 e 8 NÃO são espaços vetoriais.

2 SUBESPAÇOS VETORIAIS

Exercício 2.26 Verifique se em cada um dos itens o subconjunto W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V.

Resposta: Todos são subespaços vetoriais de V.

Exercício 2.27 Diga em cada um dos itens abaixo, se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

1. Se W_1 e W_2 são subespaços de um espaço vetorial V então $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V.

   Resposta: FALSO. Contra-exemplo:

   Sejam $V = \mathbb{R}^2$ um espaço vetorial e $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\}$ dois subespaços de V. Note que:

   $$(1, 1) \in U \subset U \cup W$$

   $$(-1, 1) \in W \subset U \cup W$$

   $$\text{mas}(1, 1) + (-1, 1) = (0, 2) \notin U \cup W$$

   Assim, violamos o axioma SV2) que diz que a soma de dois elementos de de um subespaço, deve pertencer ao subespaço. Portanto $U \cup W$ não é subespaço vetorial de V.

2. Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Então $W_1 \cup W_2$ é subespaço vetorial de V se, e somente se, $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

   Resposta: FALSO. Contra-exemplo:vide sugestão apostila.

Exercício 2.28 Em cada um dos itens abaixo encontrar os subespaços $U + W$ e $U \cap W$, onde U e W são subespaços do espaço vetorial V indicado.

1. **Resposta:** $U + W = \{(x + 2y, y), x, y \in \mathbb{R}\}$

Para obtermos $U \cap W$ note que:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 2y \\ \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Ou seja, $U \cap W = \{(0,0)\}$.

2. **Resposta:** $U + W = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b+d \end{pmatrix}, \text{a,b,c,d} \in \mathbb{R} \right\}$

   Para obtermos $U \cap W$ note que:

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = d \end{cases}$$

   Ou seja, $U \cap W = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\}$.

3. **Resposta:** $U + W = \{p(t) = (a_0 + b_0) + a_1 t, a_0, a_1, b_0 \in \mathbb{R}\}$ Para obtermos $U \cap W$ note que:

$$\begin{cases} p'(t) = 0 \Rightarrow p(t) = b_0 \\ q''(t) = 0 \Rightarrow q(t) = a_0 + a_1 t \\ a_0 = b_0 \text{ e } a_1 = 0 \\ r(t) \in U \cap W \Leftrightarrow r(t) = a_0 \end{cases}$$

   Ou seja, $U \cap W = \{r(t) = a_0 / a_0 \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 2.29 Verifique em cada um dos itens abaixo se $V = U \oplus W$.

1. **Resposta:** Note que

$$\begin{cases} (x,y) \in U \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}y \\ (x,y) \in W \Leftrightarrow x = y \\ (x,y) \in U \cap W \Leftrightarrow x = y = 0 \end{cases}$$

   Ou seja, $U \cap W = \{(0,0)\}$. Portanto $V = U \oplus W$.

2. **Resposta:** Note que

$$\begin{cases} A_3 \in U \Leftrightarrow e = f = g = h = i = 0 \\ B_3 \in W \Leftrightarrow a = b = c = d = 0 \\ C_3 \in U \cap W \Leftrightarrow a = b = c = d = e = f = g = h = i = 0 \end{cases}$$

   Ou seja, $U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Portanto $V = U \oplus W$.

3. **Resposta:** Note que

$$\begin{cases} p(t) \in U \Leftrightarrow p(1) = a_0 + a_1.1 + a_2.1^2 + a_3.1^3 = 0 \\ \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \text{ e } p(0) = a_0 = 0 \\ \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ \Leftrightarrow a_1 = -a_2 - a_3 \\ q(t) \in W \Leftrightarrow q'(t) = 0 \Leftrightarrow q(t) = a_0 \\ \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0 \\ r(t) \in U \cap W \Leftrightarrow r(t) = 0 \end{cases}$$

Ou seja, $U \cap W = \{r(t) = 0\}$. Portanto $V = U \oplus W$.

Exercício 2.30 Em cada um dos itens abaixo, dado U subespaço de V, encontrar o subespaço suplementar de U, isto é, o subespaço W de V tal que $V = U \oplus W$.

1. **Resposta:** $V = U + W \Rightarrow (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$

   $W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}\}$ é o subespaço suplementar de U.

   Note que $(x, y, z) \in U \cap W \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

   $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$ e $V = U \oplus W$

2. **Resposta:** $V = U + W \Rightarrow p(t) = (a_0 + a_1 t) + (a_2 t^2 + a_3 t^3)$

   $W = \{p(t) = a_2 t^2 + a_3 t^3 / p(t) P_3(\mathbb{R})\}$ é o subespaço suplementar de U.

   Note que $p(t) \in U \cap W \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

   $U \cap W = \{p(t) = 0\}$ e $V = U \oplus W$

3. **Resposta:** $V = U + W \Rightarrow A = B + C = B^t + C$, onde $B \in U$ e $C \in W$, e:

   $W = \{C \in M_3 / A = -A^t\}$ é o subespaço suplementar de U.

   Note que $A \in U \cap W \Leftrightarrow A = O$

   $U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $V = U \oplus W$

4. **Resposta:**

   Note que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0$

   Assim, U é um subespaço trivial, pois somente a matriz nula satisfaz a condição $AX = 0$. Assim,

   $W = \{A \in M_{21}\}$ e portanto $U \cap W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ou seja $V = U \oplus W$.

3 COMBINAÇÕES LINEARES

Exercício 3.12 Para cada um dos subconjuntos $S \subset V$, onde V é o espaço vetorial indicado, encontrar o subespaço gerado por S, isto é $[S]$.

1. **Resposta:** $[S] = \mathbb{R}^2$, pois $(x, y) = (x + 2y)(1, 0) - y(2, -1)$.
2. **Resposta:** $[S] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y\}$
3. **Resposta:** $[S] = P_3(\mathbb{R})$, pois $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 = (a_0 - a_3) + a_1t + a_2t^2 + a_3(1 + t^3)$.
4. **Resposta:** $[S] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ -z & 0 \end{pmatrix} / y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercício 3.13 Em cada um dos itens abaixo encontrar um subconjunto S, finito, que gera o subespaço vetorial W do espaço vetorial V.

1. **Resposta:** $W = [(2, 1, 0), (0, 0, 1)]$
2. **Resposta:** $W = [1]$
3. **Resposta:** $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$
4. **Resposta:** $W = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

Exercício 3.14 Em cada um dos itens abaixo encontrar OS subconjunto S do espaço vetorial V que geram U, W, $U \cap W$ e $U + W$.

1. **Resposta:** $U = [(1, 0, 0), (1, 1, 1)]$, $W = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$, $U \cap W = [(0, 1, 1)]$ e $U + W = [U \cup W] = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$.
2. **Resposta:** $U = [(-1, 1, 0), (0, 0, 1)]$,$W = [(1, 3, 0), (0, 4, 6)]$, $U \cap W = [(-1, 1, 6)]$ e $U + W = [U \cup W] = [(-1, 1, 0), (1, 3, 0), (0, 0, 1)]$, pois note que $(0, 4, 6) = (-1, 1, 0) + (1, 3, 0) + 6(0, 0, 1)$.

3. **Resposta:** $U = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right]$, $W = \left[\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\right]$, $U \cap W = \left[\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right]$, $U + W = [U \cup W] = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\right]$

4. **Resposta:** $U = [t^3 + 4t^2 - t + 3, t^3 + 5t^2 + 5, 3t^3]$, $W = [t^3 + 4t, t - 1, 1]$, $U \cap W = [t, t^3]$, $U + W = [U \cup W] = [t^3 + 5t^2 + 5, t^3 + 4t, t - 1, 1]$, pois

$$3t^3 = 3(t^3 + 4t) - 12(t - 1) - 12.1$$

$$t^3 + 4t^2 - t + 3 = \frac{4}{5}(t^3 + 5t^2 + 5) + \frac{1}{5}(t^3 + 4t) - \frac{9}{5}(t - 1) - \frac{14}{5}.1$$

Exercício 3.14=3.15
Exercício 3.16

1. **Resposta:** $U = [t^2 - t, t^3 - t]$

2. **Resposta:** $W = [1, t]$

3. **Resposta:** $U \cap W = [O]$

4 DEPENDÊNCIA LINEAR

Exercício 4.19

1. **Resposta:** $det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 7 \neq 0$, o conjunto é LI.

2. **Resposta:** $\alpha(1 + t - t^2) + \beta(2 + 5t - 9t^2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$, o conjunto é LI.

3. **Resposta:** $\alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\alpha + 2\beta & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\alpha = \beta = 0$, o conjunto é LI.

4. **Resposta:** $\alpha(1, 2, 2, -3) + \beta(-1, 4, -2, 0) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$, o conjunto é LI.

5. **Resposta:** $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} \alpha - \beta & 2\alpha - \beta & -\beta \\ 3\alpha - 10\gamma & 5\gamma & \alpha + 7\gamma \\ \beta - \gamma & \beta & 2\alpha + \beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, o conjunto é LI.

5 BASE, DIMENSÃO E COORDENADAS

Exercício 5.31

1. **Resposta:** (Obs. farei o primeiro detalhadamente para exemplificar)

   Primeiro temos que mostrar que cada elemento $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in P_3(\mathbb{R})$ se escreve de maneira única como combinação linear de $1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3$, ou seja, existem únicos $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^3$ tais que:

   $$a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 = \alpha.1 + \beta(1+t) + \gamma(1-t^2) + \delta(1-t-t^2-t^3)$$

   Resolvendo, temos:
   $\alpha = a_0 + 3a_3 - a_1 + a_2$; $\beta = a_1 - a_3$, $\gamma = -a_2 - a_3$ e $\delta = -a_3$. Portanto todo elemnto de $P_3(\mathbb{R})$ é combinação linear de $1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3$.

   Resta mostrar que $1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3$ são LI. Temos que fazer:

   $\alpha_1.1 + \alpha_2(1+t) + \alpha_3(1-t^2) + \alpha_4(1-t-t^2-t^3) = 0$, donde vemos que:

   $$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \beta - \delta = 0 \\ -\gamma - \delta = 0 \\ -\delta = 0 \end{cases}$$

   Desse modo, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

   Portanto $\{1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3\}$ é base para V.

2. **Resposta:** É base para V.

3. **Resposta:** É base para V.

Exercício 5.32

1. **Resposta:** $W = [(1,1,0,-3),(0,0,1,0)]$ e $dimW = 2$.

2. **Resposta:** $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$ e $dimW = 2$.

3. **Resposta:** $W = [1, t]$ e $dimW = 2$.

Exercício 5.33

1. **Resposta:**

   i) $U = [(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)]$ e $dimU = 2$

   ii) $W = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ e $dimW = 2$

   iii) $U + W = [(-1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ e $dim(U + W) = 3$

   iv) $U \cap W = [(-1, 1, 0)$ e $dim(U \cap W) = 1$

2. **Resposta:**

   i) $U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$ e $dimU = 3$.

   ii) $W = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$ e $dimW = 1$

   iii) $U + W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$ e $dim(U + W) = 3$.

   iv) $U \cap W = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$ e $dim(U \cap W) = 1$

3. **Resposta:**

   i) $U = [1]$ e $dimU = 1$

   ii) $W = [t^2 - t]$ e $dimW = 1$

   iii) $U + W = [1, t^2 - t]$ e $dim(U + W) = 2$

   iv) $U \cap W = [O]$ e $dim(U \cap W) = 0$

Exercício 5.34

1. **Resposta:** $u_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}_B$

2. **Resposta:** $u_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}_B$

3. **Resposta:** $u_B = \begin{pmatrix} -9/11 \\ 36/11 \\ -2/11 \end{pmatrix}_B$

Exercício 5.35

1. **Resposta:** $u_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$

2. **Resposta:** $u_B = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$

3. **Resposta:** $u_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$

Exercício 5.36

1. **Resposta:** $u_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}_B$

2. **Resposta:** $u_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -15 \\ 7 \end{pmatrix}_B$

6 MUDANÇA DE BASE

Exercício 6.9

Ver exercício 7.12 (resolvido).

Exercício 6.10

1. **Resposta:**

   $M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $M_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. **Resposta:**

   $v_C = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

3. **Resposta:**

   $v_B = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. **Resposta:**

   Como $M_B^C = M_B^D M_D^C$ e $C = D$, segue que $M_D^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, assim $M_B^C = M_B^D I$

   e portanto

   $$M_B^D = M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício 6.11 Ver exercício resolvido 7.13.

7 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Exercício 8.70

1. **Resposta:** LINEAR
2. **Resposta:** NÃO-LINEAR
3. **Resposta:** NÃO-LINEAR
4. **Resposta:** LINEAR
5. **Resposta:** LINEAR
6. **Resposta:** LINEAR
7. **Resposta:** NÃO-LINEAR

Exercício 8.71

1. **Resposta:** $\aleph(T) = \{(1, -2)\}$ Interpretação geométrica: Reta $y = -2x$.
2. **Resposta:** $\aleph(T) = \{(1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$ Interpretação geométrica: Reta $z = 2x$.
3. **Resposta:** $\aleph(T) = \{(1, -1)\}$ Interpretação geométrica: Reta $y = -x$.
4. **Resposta:** $\aleph(T) = \{(0, 0)\}$ Interpretação geométrica: Ponto na origem $(0, 0)$.
5. **Resposta:** $\aleph(T) = \{(0, 1, 0)\}$ Interpretação geométrica: Reta correspondente ao eixo y.

Exercício 8.72

1. **Resposta:** $\aleph N(T) = [(0, 0, 1)]$ e $Im(T) = [(1, 2, 3), (1, 1, 1)]$
2. **Resposta:** $\aleph(T) = [(1, -2)]$ e $Im(T) = [1]$
3. **Resposta:** $\aleph(T) = \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$ e $Im(T) = [\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right]$
4. **Resposta:** $\aleph(T) = [1]$ e $Im(T) = [1, 2x]$

5. **Resposta:** $\aleph(T) = [1]$ e $Im(T) = [1, 2 + 2x]$

6. **Resposta:** $\aleph(T) = \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$ e $Im(T) = [\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

Exercício 8.73

1. $T((x, y, z)) = (2x + 3y - 7z, 3x - y - 2z, x + 6y)$

2. Sim, pois $Im(T) = [(2, 3, 1), (3, -1, 6), (-7, -2, 0)]$ e portanto $dim\ Im(T) = 3 = dim\ \mathbb{R}^3$

3. Sim, pois $\aleph(T) = [(0, 0, 0)]$.

4. Sim, pois é injetora e sobrejetora, portanto bijetora.

Exercício 8.74

1. $T(p(t)) = 1(a_0 + a_2) + t(a_0 + a_1 + a_2) + t^2(a_1 - 2a_2)$

2. Sim, pois $Im(T) = [1 + t, t + t^2, 1 + t - 2t^2]$ e portanto $dim\ Im(T) = 3 = dim\ \wp^2(\mathbb{R})$

3. Sim, pois $\aleph(T) = [0]$.

4. Sim, pois é injetora e sobrejetora, portanto bijetora.

Exercício 8.75

1. $T\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2y + t & 4x - 4y \\ 2x - 2y + 2z + 2t & 3x + z \end{pmatrix}$.

2. Sim, pois $Im(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right]$ e portanto $dim\ Im(T) = 4 = dim\ M^2(\mathbb{R})$

3. Sim, pois $\aleph(T) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$.

4. Sim, pois é injetora e sobrejetora, portanto bijetora.

Exercício 8.76
$T(x, y, z, t) = (x - y, 0, 0, t)$.

Exercício 8.77
$T(x, y, z, t) = (x - y, x - y, t, 0)$.

Exercício 8.78
$T(x, y, z) = (0, y, z)$.

Exercício 8.79
$T(x, y, z) = (y - x, x - y, y - x)$.

Exercício 8.80
$T(x, y, z) = (2x + 3y, 2x + 2y, 3x, 2x + 2y)$.

Exercício 8.81
$T(x, y, z, t, w) = (x + z - 2t, y + z - 2t, z - t)$.

Exercício 8.82
$T(x, y, z, t, w) = (x + z - 2t, y + z - 2t, z - t)$.

Exercício 8.83
$T(x, y, z, t, w) = (x + z - 2t, y + z - 2t, z - t)$.

Exercício 8.84
$T(x, y, z) = (x - z, y, 0, 0)$.

Exercício 8.85
$T(x, y, z, t) = (x - z, y, x - z, t)$.

Exercício 8.86
$T(x, y) = (x + y, x + 2y, x)$.

Exercício 8.87
$T(x, y) = (x - y, x - y, x - y)$.

Exercício 8.88

a) A matriz canônica de T é dada por

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $det([T]) = 1 \neq 0$ portanto $[T]$ é inversível e portanto T é um isomorfismo.

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto $T^{-1}(x, y, z) = (x + 3y + 14z, y + 4z, z)$.

b)

c) A matriz canônica de T é dada por

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e $det([T]) = 1 \neq 0$ portanto $[T]$ é inversível e portanto T é um isomorfismo.

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e portanto $T^{-1}(x, y, z) = (x, x - y, 3x - y - z)$.

Exercício 8.89

Primeiro note que T é dada por $T(x, y, z) = (x + z - y, x, x + z + 2y)$ e portanto $det([T]) = -4 \neq 0$, portanto $[T]$ é inversível e T é isomorfismo. Assim, $T^{-1}(x, y, z) = \left(y, \frac{y+z-x}{4}, \frac{x+z-y}{2}\right)$.

Exercício 8.90

1. Como $U = \mathbb{R}^2$, $dimU = 2$ e $V = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$, $dimV = 2$. Portanto $dimU = dimV \Rightarrow$ são isomorfos.
2. Como $U = M_{2\times 3}$, $dimU = 6$ e $V = [1]$, $dimV = 1$. Portanto $dimU \neq dimV \Rightarrow$ não são isomorfos.
3. Como $U = \mathbb{R}^3$, $dimU = 3$ e $V = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$, $dimV = 3$. Portanto $dimU = dimV \Rightarrow$ são isomorfos.
4. Como $U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$, $dimU = 1$ e $V = [1]$, $dimV = 1$. Portanto $dimU = dimV$ $\Rightarrow$ são isomorfos.

Exercício 8.91

$$T^n(x, y) = \begin{cases} (x, y), \text{se n é par} \\ (y, x), \text{se n é ímpar} \end{cases}$$

Exercício 8.92

$\alpha T(x, y) + \beta R(x, y) + \gamma S(x, y) = (0, 0)$
$\alpha(x, 2y) + \beta(x, x + y) + \gamma(0, x) = (0, 0)$

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)x = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta \\ (2\alpha+\beta)y + (\beta+\gamma)x = 0 \\ \Rightarrow 2\alpha+\beta = 0 \text{ e } \beta+\gamma = 0 \\ \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Portanto, $\{T, R, S\}$ é um conjunto l.i.

Exercício 8.93

Exercício de demonstração (fazer).

Exercício 8.94

1. $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $[T] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3. $[T] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercício 8.95

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercício 8.96

$$[T] = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 20 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercício 8.97

a) $[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$

b) $[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} -1 & -3/2 & -11/6 \end{pmatrix}$

Exercício 8.98

$[S]_C = [I + T + T^2]_C = [I]_C + [T]_C + [T]^2{}_C$

$[S]_C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$S(x, y, z) = (3x + 3y, 3y, y + z)$.

Exercício 8.99

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício 8.100

$$[T]_{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[S]_{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$[S \circ T]_{B} = [S]_B[T]_B = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 3 \\ 1 & -5 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[S^2 + I]_{B} = [S]^2{}_B + [I]_B = \begin{pmatrix} 12 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[T^3 - S^2]_{B} = [T]^3{}_B - [S]^2{}_B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 3 & -12 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercício 8.101

a) $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + z)$

b) $T(x, y, z) = (z, y)$

$T(x, y, z) = (10x + 3y - 3z, 2x - y + 4z)$

Exercício 8.102

Exercício de demonstração (fazer).

Exercício 8.103

Exercício de demonstração (fazer).

9 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Exercício 9.29

a) Autovalores : $\lambda_1 = \sqrt{2}$ e $\lambda_1 = -\sqrt{2}$.

Autovetores: $T(x, y) = \sqrt{2}(x, y) \Rightarrow (x + y, x - y) = (\sqrt{2}x, \sqrt{2}y) \Rightarrow y = x(\sqrt{2} - 1)$

Assim, $V(\lambda_1) = [(1, \sqrt{2} - 1)]$ é o autovetor correspondente a λ_1 e $V(-\lambda_1) = [(1, -\sqrt{2} - 1)]$ é o autovetor correspondente a λ_2.

b) Note que $T(x, y, z) = (2x + 2y + 3z, y + 2z, 2y + 3z)$. Pelo mesmo procedimento do item a) obtemos:

Autovalores: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$

Autovetores: $V(\lambda_1) = [(1, 0, 0)]$, $V(\lambda_2) = [(5, 1, 1)]$ e $V(\lambda_3) = [(\frac{1}{3}, 1, -1)]$

c) Autovalores: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$

Autovetores: $(x, y, z) \in V(3) \Leftrightarrow y = 0$, então $V(\lambda_1) = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$.

$(x, y, z) \in V(4) \Leftrightarrow x = y = t = 0$, então $V(\lambda_2) = [(0, 0, 1, 0)]$.

Exercício 9.30

a) Produto da diagonal principal da matriz $(A - \lambda I)$

$$\prod_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - \lambda)$$

b) Seus polinômios característicos serão idênticos, pois o determinante de matrizes triangulares corresponde ao produto dos elementos da diagonal principal.

c) Fazer a demonstração por indução finita sobre n.

d) Fazer a demonstração.

10 DIAGONALIZAÇÃO

Exercício 10.18

a) Temos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} = [T]_C$$

pois,

$$T(1,0) = 2(1,0) + 3(0,1) = (2,3)$$

$$T(0,1) = 4(1,0) + 13(0,1) = (4,13)$$

Assim, podemos obter agora $T(x,y) = (2x + 4y, 3x + 13y)$.

Daí, $det([T]_C - \lambda I) = (2-\lambda)(13-\lambda) - 12 = 0$, de onde obtemos $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 14$.

Obtemos então os autovetores relacionados a λ_1 e λ_2, de modo que

$(x,y) \in V(1) \Leftrightarrow x = -4y$ e assim $u_1 = (-4,1)$.

$(x,y) \in V(14) \Leftrightarrow y = 3x$ e assim $u_1 = (1,3)$.

Temos que $\{u_1, u_2\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Assim a matriz procurada são M_B^C e M_C^B.

Obtemos primeiro M_C^B, pois é mais fácil e depois calculamos sua inversa para obter M_B^C. Usaremos a base $C = \{(1,0),(0,1)\}$ canônica já utilizada acima:

$$(-4,1) = -4(1,0) + 1(0,1)$$

$$(1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)$$

De modo que,

$$M_C^B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$M_B^C = \begin{pmatrix} -3/13 & 1/13 \\ 1/13 & 4/13 \end{pmatrix}$$

De modo que

$$M_B^C A M_C^B = M_B^C [T]_C M_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

é uma matriz diagonal.

b) Com o mesmo procedimento descrito acima obtemos o polínômio característico : $\lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0$, de modo que não existem raízes reais que o satisfaçam, portanto A não é diagonalizável.

Exercício 10.19

a) análogo ao b) (diagonalizável)

b) feito em sala

Exercício 10.20

a) (diagonalizável)

b) (diagonalizável)