Isomorfismo, Automorfismo e Matriz de Transformação Linear

Definição

Diremos que uma transformação linear $T : U \to V$ *é um isomorfismo, quando ela for bijetora. Quando* $U = V$*, diremos que* T *é um automorfismo.*

Definição

Diremos que os espaços vetoriais U *e* V *são isomorfos, se existir um isomorfismo* $T : U \to V$*.*

Exemplos

1. $T : U \to U$ dada por $T(u) = u$.

2. $T : \mathbb{R}^n \to P_{n-1}(\mathbb{R})$ dada por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1}.$$

3. $T : M_{m \times n} \to \mathbb{R}^{mn}$ que associa a cada matriz $A = (a_{ij})$ de $M_{m \times n}$ o seguinte elemento de $\mathbb{R}^{mn}$

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}).$$

Exercício 1: Verifique se

$$T(x, y, z) = (x - y, x - z, z - y)$$

é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$.

Solução: Obseve que se $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$, então

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ z - y = 0 \end{cases} \iff x = y = z.$$

Logo, T não é injetora, pois $T(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$.

Assim, T não é um isomorfismo.

Proposição

Se $T : U \to V$ for um isomorfismo e U tiver dimensão finita, então

$$\dim U = \dim V.$$

Demonstração.

Como T é injetora, temos

$$N(T) = \{0\} \implies \dim N(T) = 0.$$

Como T é sobrejetora, vale

$$T(U) = V \Rightarrow \dim T(U) = \dim V.$$

Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem**, que

$$\dim U = \dim N(T) + \dim T(U) = 0 + \dim V.$$

$\square$

Corolário

Se $T : U \to V$ for um isomorfismo e V tiver dimensão finita, então

$$\dim U = \dim V.$$

Demonstração.

Como T é bijetora, T possui inversa T^{-1}.

Além disso, $T^{-1} : V \to U$ é um isomorfismo e $\dim V$ é finita.

Assim, pela **proposição anterior**, temos

$$\dim U = \dim V.$$

□

Proposição

Sejam U e V *espaços vetoriais tais que*

$$\boxed{\dim U = \dim V = n.}$$

Se $u_1, \ldots, u_n$ *for uma base de* U e $v_1, \ldots, v_n$ *for uma base de* V, *então*

$$T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R},$$

definirá um isomorfismo entre U e V.

Corolário

Sejam U e V espaços de dimensão finita. Então U e V serão isomorfos se e somente se

$$\boxed{\dim U = \dim V = n.}$$

Corolário

Sejam U *e* V *espaços vetoriais tais que*

$$\dim U = n \quad e \quad \dim V = m.$$

Então $L(U, V)$ *é isomorfo a* $M_{m \times n}$.

Demonstração.

Sabemos que, se $\dim U = n$ $\dim V = m$, então

$$\dim L(U, V) = mn = \dim M_{m \times n}.$$

Pelo corolária anterior, segue que $L(U, V)$ é isomorfo a $M_{m \times n}$. □

Matriz de uma Transformação Linear

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita.

Fixemos bases $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de U e $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ de V.

Se $T \in L(U, V)$, poderemos escrever

$$\begin{array}{rcl} T(u_1) & = & a_{11} v_1 + \cdots + a_{m1} v_m, \\ T(u_2) & = & a_{12} v_1 + \cdots + a_{m2} v_m, \\ \vdots & = & \vdots \\ T(u_n) & = & a_{1n} v_1 + \cdots + a_{mn} v_m, \end{array}$$

ou seja, $T(u_j) = a_{1j} v_1 + \cdots + a_{m,} v_m, \qquad j = 1, \ldots, n.$

A matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$$

é chamada de **matriz da transformação** T **com relação às bases** B e C e é denotada por $[T]_{B,C}$.

Exercício 2: Encontre a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + y, x - z)$$

com relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

Solução: Temos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1), \\ T(0,1,0) &= (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1) \quad \text{e} \\ T(0,0,1) &= (0,-1) = 0(1,0) - 1(0,1). \end{aligned}$$

Assim,

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Propriedades.

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases B e C respectivamente.

1. Se $T, S \in L(U, V)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, então

$$[\lambda T + \mu S]_{B,C} = \lambda [T]_{B,C} + \mu [S]_{B,C}.$$

2. Se $T \in L(U, V)$ for a **transformação nula**, então

$$[T]_{B,C} = 0.$$

Propriedades.

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases B e C respectivamente

3. Se $T \in L(U, V)$ **possui inversa** T^{-1}, então

$$[T^{-1}]_{C,B} = [T]_{B,C}^{-1}.$$

4. $T \in L(U, V)$ é um **isomorfismo se e somente se** $[T]_{B,C}$ **possui inversa**.

5. Se $T \in L(U, V)$ e $u \in U$ então

$$T(u)_C = [T]_{B,C} u_B.$$

Proposição

Sejam U, V e W espaços vetoriais de dimensão finita com bases B, C e D respectivamente. Se $T \in L(U, V)$ e $S \in L(V, W)$, então

$$[S \circ T]_{B,D} = [S]_{C,D}[T]_{B,C}.$$

Proposição

Sejam V um espaço de dimensão finita e B e C bases de V.

- *Se $I \in L(V)$ é a identidade de V, então*

$$[I]_{B,C} = M_C^B.$$

- *Se $T \in L(V)$, então*

$$[T]_{C,C} = M_C^B [T]_{B,B} M_B^C.$$

Exercício 3: Considere, $B = \{(1,1),(1,-1)\}$, uma base de $\mathbb{R}^2$. Seja $T \in L(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$T_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Encontre $[T]_{C,C}$, onde C é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Solução:

Como

$$(1,0) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1) \text{ e } (0,1) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1),$$

obtemos

$$M_B^C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ e } M_C^B = \left(M_B^C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solução (continuação). Assim,

$$[T]_{C,C} = M_C^B [T]_{B,B} M_B^C =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$T(x,y) = T(x(1,0) + y(0,1)) = xT((1,0)) + yT((0,1))$$

$$= x(3(1,0) - 2(0,1)) + y(-2(1,0) + 3(0,1)) =$$

$$= x(3,-2) + y(-2,3) = (3x-2y, 3y-2x).$$

Exercício 4: Verifique se $T : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ dada por

$$T(a, b) = a + (a + b)x$$

é um isomorfismo.

Solução: Consideremos as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $P_1(\mathbb{R})$.

Como $T(1, 0) = 1 + 1 \cdot x$ e $T(0, 1) = 0 \cdot +1 \cdot x$, a matriz de T com relação a estas bases é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz acima possui inversa, segue-se que T é um isomorfismo.

REFERÊNCIA

- S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC.