Composição de Transformações Lineares, Núcleo e Imagem

Definição

Sejam U, V *e* W *espaços vetoriais. Se* $T \in L(U, V)$ *e* $S \in L(V, W)$ *definimos a composta*

$$S \circ T : U \to W$$

por

$$S \circ T(u) = S(T(u)), \quad \forall u \in U.$$

Exercício 1: Considere $T, S \in L(\mathbb{R}^2)$ dadas por

$$T(x,y) = (x+y, 0) \qquad \text{e} \qquad S(x,y) = (x, 2y).$$

Encontre $T \circ S$ e $S \circ T$.

Solução:

$$T \circ S(x,y) = T(S(x,y)) = T(x, 2y) = (x+2y, 0).$$

$$S \circ T(x,y) = S(T(x,y)) = S(x+y, 0) = (x+y, 0).$$

Note que

$$\boxed{T \circ S \neq S \circ T.}$$

Definição

Se $T \in L(U)$, *definimos:*

- $T^1 = T$;
- $T^n = T \circ T^{n-1}$, *para* $n \geq 2$.

Definição

$T \in L(U)$ *será chamada de* ***nilpotente***, *se existir* $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, *tal que*

$$T^n = 0.$$

Exemplos

- A transformação nula é nilpotente.

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (0, x)$$

é nilpotente. De fato, note que

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(0, x) = (0, 0).$$

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x, 0)$$

não é nilpotente. De fato, note que

$$T^n(x, y) = T^{n-1}(T(x, y)) = T^{n-1}(x, 0) = (x, 0)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$.

Propriedades

1. Se $T \in L(U, V)$ e $S \in L(V, W)$, então
$$S \circ T \in L(U, W).$$

2. Se $T \in L(U, V)$, $S \in L(V, W)$ e $R \in L(W, X)$, então
$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

3. Se $S, T \in L(U, V)$, $R \in L(V, W)$, então
$$R \circ (S + T) = R \circ S + R \circ T.$$

4. Se $T \in L(U, V)$ e $I_V \in L(V)$ for a identidade em V, isto é, $I(v) = v$, $\forall v \in V$, e $I_U \in L(U)$ é a identidade em U, então
$$I_V \circ T = T \quad \text{e} \quad T \circ I_U = T.$$

Definição

Diremos que $T \in L(U, V)$ *possui inversa, se existir* $S : V \to U$ *tal que*

- $S \circ T(u) = u, \quad \forall\, u \in U;$
- $T \circ S(v) = v, \quad \forall\, v \in V.$

Proposição

Se $T \in L(U, V)$ possuir uma inversa, então esta inversa será única.

Demonstração.

Suponha que T possua inversas $R, S \in L(V, U)$. Como

$$v = (T \circ R)(v), \quad \forall\, v \in V \tag{1}$$

$$u = (S \circ T)(u), \quad \forall\, u \in U, \tag{2}$$

temos

$$\begin{aligned} Sv &\overset{(1)}{=} S((T \circ R)(v)) \\ &= S \circ (T \circ R)(v) \\ &\overset{Propriedade\ 2}{=} (S \circ T)(Rv) \\ &\overset{Rv \in U, (2)}{=} Rv \quad \forall\, v \in V. \end{aligned}$$

Portanto $S = R$. □

Observação

Denotaremos a inversa de T por T^{-1}.

Definição

Uma transformação linear $T : U \to V$ será

1. *injetora, se*
$$T(u) = T(v) \implies u = v.$$

2. *sobrejetora, se para todo $v \in V$ existir $u \in U$ tal que*
$$T(u) = v.$$

3. *bijetora, se for injetora e sobrejetora.*

Proposição

Uma transformação linear $T : U \to V$ *será injetora se e somente se*

$$T(u) = 0 \implies u = 0.$$

Demonstração.

Sabemos que $T(0) = 0$, pois T é linear. Suponha que T seja injetora. Portanto, se $T(u) = 0$, então $T(u) = T(0)$ e, como T é injetora, temos $u = 0$.

Reciprocamente, suponha que

$$T(u) = 0 \implies u = 0.$$

Agora, se $T(u) = T(v)$, então $T(u - v) = 0$. Mas, por hipótese, $u - v = 0$, isto é, $u = v$. □

Proposição

$T \in L(U, V)$ *possuirá inversa se e somente se* T *for bijetora.*

Demonstração.

Suponha que T possua inversa. Queremos mostrar que T é bijetora.

- T é injetora,

De fato, se $T(u) = T(v)$, então

$$u = T^{-1}(T(u)) = T^{-1}(T(v)) = v$$

e, portanto, T é injetora.

- T é sobrejetora

Dado $v \in V$, temos $T(T^{-1}(v)) = v$ e, portanto, T é sobrejetora.

Demonstração (continuação).

Suponha agora que T seja bijetora. Queremos mostrar que T possui inversa.

Como T é sobrejetora, dado $v \in V$, $\exists!$ $u_v \in U$ tal que $v = T(u_v)$.

Defina $S : V \to U$ por $S(v) = u_v$. Mostremos que S é a inversa de T.

Se $v \in V$, então

$$(T \circ S)(v) = T(S(v)) = T(u_v) = v.$$

Demonstração (continuação).

Por outro lado, se $u \in U$, então

$$S(T(u)) = u',$$

em que u' é o único elemento em U tal que

$$T(u') = T(u).$$

Como T é injetora, temos $u' = u$ e, assim,

$$(S \circ T)(u) = S(T(u)) = u' = u.$$

Proposição

Se $T \in L(U, V)$ *possui inversa* $T^{-1} : V \to U$*, então* $T^{-1} \in L(V, U)$.

Demonstração.

Exercício $\square$

Núcleo e Imagem

Definição

Seja $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

1. *Se* $X \subset U$, *definiremos a imagem de* X *por* T *como sendo o conjunto*
$$T(X) = \{T(x); x \in X\}.$$
2. *Se* $Y \subset V$, *definiremos a imagem inversa de* Y *por* T *como sendo o conjunto*
$$T^{-1}(Y) = \{u \in U; T(u) \in Y\}.$$

Proposição

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Temos

1. *Se W for um subespaço vetorial de U, então $T(W)$ será um subespaço vetorial de V.*
2. *Se W for um subespaço vetorial de V, então $T^{-1}(W)$ será um subespaço vetorial de U.*

Demonstração.

(1) Seja W é um subespaço vetorial de U. Queremos mostrar que $T(W)$ é um subespaço vetorial de V.

Como $0 \in W$, então $0 = T(0) \in T(W)$.

Se $x, y \in T(W)$, então existirão $u, w \in W$ tais que

$$x = T(u) \quad \text{e} \quad y = T(w).$$

Como W é um subespaço vetorial, temos que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u + \lambda w \in W.$$

Desse modo

$$x + \lambda y = T(u) + \lambda T(w) = T(u) + T(\lambda w) = T(u + \lambda w) \in T(W).$$

Demonstração (continuação).

(2) Seja W é um subespaço vetorial de V. Queremos mostrar que $T^{-1}(W)$ é um subespaço vetorial de U.

Como $T(0) = 0 \in W$, temos $0 \in T^{-1}(W)$.

Se $x, y \in T^{-1}(W)$, então $T(x), T(y) \in W$.

Como W é um subespaço vetorial, temos

$$T(x) + \lambda T(y) \in W, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Mas

$$T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y) \in W$$

e, portanto,

$$x + \lambda y \in T^{-1}(W).$$

Definição

O núcleo de uma transformação linear $T : U \to V$ *é o subespaço vetorial* $T^{-1}(\{0\})$, *ou seja, é o conjunto*

$$\{u \in U; T(u) = 0\}.$$

Denotaremos o núcleo de T *por* $N(T)$.

Observação

Note que $N(T)$ *é um subespaço vetorial de* U.
De fato, sejam $u, v \in N(T)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Então*

$$T(u + \lambda v) = T(u) + \lambda T(v) = 0 \implies u + \lambda v \in N(T).$$

Além disso, sabemos que $T(0) = 0$ *e, portanto,* $0 \in N(T)$.

Proposição

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Então T será injetora se e somente se

$$N(T) = \{0\}.$$

Demonstração.

Já provamos que T será injetora se e somente se

$$T(u) = 0 \implies u = 0.$$

Mas isso implica que

$$N(T) = \{0\}.$$

$\square$

Exercício 2: Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Encontre o núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x\cos\theta - y\text{sen}\theta, x\text{sen}\theta + y\cos\theta).$$

Solução: Por definição,

$$\begin{aligned}
(x, y) \in N(T) &\iff T(x, y) = (0, 0) \\
&\iff (x\cos\theta - y\text{sen}\theta, x\text{sen}\theta + y\cos\theta) = (0, 0) \\
&\iff \begin{cases} x\cos\theta - y\text{sen}\theta = 0 \\ x\text{sen}\theta + y\cos\theta = 0 \end{cases} \\
&\iff (x, y) = (0, 0).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$N(T) = \{(0, 0)\}.$$

Teorema (Teorema do Núcleo e da Imagem)

Sejam U e V espaços vetoriais $T : U \to V$ uma transformação linear. Suponha que U tenha dimensão finita. Temos

$$\dim U = \dim N(T) + \dim T(U).$$

Demonstração.

Note que $N(T)$ é espaço vetorial de dimensão finita, já que $N(T) \subset U$ e dimensão de U é finita. Então, podemos tomar $p = \dim N(T)$.

- Se $p \geq 1$, tomamos $B_1 = \{u_1, \ldots, u_p\}$ uma base de $N(T)$.

  Pelo **Teorema do Completamento**, $\exists v_1, \ldots, v_q \in U$ tais que $B_2 = \{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q\}$ forma uma base de U.

- Se $\dim N(T) = 0$, tomamos os vetores $v_1, \ldots, v_q$ de modo a formarem uma base de U.

Então, em ambos os casos, temos $\dim U = p + q$.

Resta mostrar que $\dim T(U) = q$.

Mostraremos que $T(v_1), \ldots, T(v_q)$ formam uma base de $T(U)$.

Demonstração (continuação).

- $T(v_1), \ldots, T(v_q)$ são L.I.

Se $\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_q T(v_q) = 0$ então

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q) = 0 \implies \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q \in N(T).$$

Desta forma, existem $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p,$$

isto é,

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p - \alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_q v_q = 0.$$

Como $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ formam uma base de U, temos

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0.$$

Portanto, $T(v_1), \ldots, T(v_q)$ são linearmente independentes.

Demonstração (continuação).

- $T(v_1), \ldots, T(v_q)$ geram $T(U)$.

Seja $v \in T(U)$. Logo, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$.

Como $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ formam uma base de U, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_q v_q.$$

Assim,

$$\begin{aligned} v = T(u) &= T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_q v_q) \\ &= \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_p T(u_p) + \beta_1 T(v_1) + \cdots + \beta_q T(v_q) \\ &= \beta_1 T(v_1) + \cdots + \beta_q T(v_q), \end{aligned}$$

já que $u_1, \ldots, u_p \in N(T)$.

Corolário

Se U e V forem espaços vetoriais de dimensão finita tais que

$$\boxed{\dim U = \dim V}$$

e se $T : U \to V$ for uma transformação linear, então as seguintes condições serão equivalentes:

1. *T é sobrejetora;*
2. *T é injetora;*
3. *T é bijetora;*
4. *T leva bases de U em bases de V, isto é, se $u_1, \ldots, u_n$ for uma base de U, então $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ será uma base de V.*

Demonstração.

- Se T for sobrejetora, então T será injetora.

Se T for sobrejetora, então $T(U) = V$. Pelo teorema anterior,

$$\begin{aligned}
\dim U &= \dim N(T) + \dim T(U) \\
&= \dim N(T) + \dim V \\
&\overset{hip.}{=} \dim N(T) + \dim U \\
&\Rightarrow \dim N(T) = 0 \\
&\Rightarrow N(T) = \{0\}.
\end{aligned}$$

Portanto, T é injetora.

Demonstração (continuação).

- Se T for injetora, então T será bijetora.

Se T for injetora, então $\dim N(T) = 0$. Pelo teorema anterior,

$$\dim U = \dim T(U).$$

Como $\dim U = \dim V$ e $T(U)$ é um subespaço de V, temos

$$\dim T(U) = \dim V \implies T(U) = V,$$

isto é, T é sobrejetora. Dessa forma, T é bijetora.

Demonstração (continuação).

- Se for bijetora, então T levará bases de U em bases de V.

Suponha que T seja bijetora. Seja $B_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de U. Precisamos mostrar que $B_2 = \{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base de V.

1. $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ são L.I.

Se $\alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n) = 0$, então

$$T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = 0 \implies \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in N(T).$$

Como T é injetora temos $N(T) = \{0\}$ e, consequentemente,

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0.$$

Como $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base de U, temos $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Demonstração (continuação).

2. $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ geram V.

Seja $v \in V$. Como T é sobrejetora, existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$.

Escrevendo u como $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$, vemos que

$$v = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n),$$

isto é, $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ geram V.

Demonstração (continuação).

- Se T levar bases de U em bases de V, então T será sobrejetora.

Seja $B_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de U.

Por hipótese, $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ formam uma base de V.

Assim, dado $v \in V$ existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n).$$

Deste modo,

$$v = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = T(u),$$

para $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$, isto é, T é sobrejetora.

Exercício. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $T : M_2 \to M_2$ dada por

$$T(X) = AX - XA.$$

Encontre o núcleo e a imagem de T.

Solução:

Núcleo: $X \in N(T) \iff AX = XA$.

Seja

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Então $X \in N(T)$ se e somente se

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix},$$

Solução (continuação).

o que equivale a

$$\begin{cases} a + 2c = a \\ b + 2d = 2a + b \\ c = c \\ d = 2c + d \end{cases} \iff c = 0 \quad \text{e} \quad a = d.$$

Portanto,

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, o núcleo de T é o subespaço vetorial gerado pela base (note que as matrizes são l.i.) formada pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução (continuação).

Imagem: $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in T(M_2) \iff \exists\, X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que

$$Y = AX - XA.$$

Então devemos ter

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & 2d-2a \\ 0 & -2c \end{pmatrix}$$

$$= 2c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2(d-a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Solução (continuação).

ou seja, a imagem de T é gerada pela base (note que as matrizes são l.i.) formada pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma outra maneira para encontrar uma base da imagem de T é fazer uso da **prova** do **Teorema do Núcleo e da Imagem**. Isto é, sabemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base do núcleo de T a qual, como no referido teorema, completamos até uma base de M_2 como, por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, pelo mesmo teorema,

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base da imagem de T.

Definição

Diremos que $T \in L(U)$ *é idempotente, se*

$$T^2 = T.$$

Exemplos.

1. $I : U \to U$, a identidade de U é idempotente.

2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x, 0)$$

é idempotente. De fato, note que

$$T^2(x, y) = T(x, 0) = (x, 0) = T(x, y).$$

Proposição

Se $T \in L(U)$ *for idempotente, então*

$$U = T(U) \oplus N(T).$$

Demonstração.

Dado $u \in U$ podemos escrever

$$u = T(u) + (u - T(u)).$$

Claramente, $T(u) \in T(U)$ e

$$T(u - T(u)) = T(u) - T^2(u) = T(u) - T(u) = 0.$$

Logo, $U = T(U) + N(T)$ e resta mostrarmos que a soma é direta.

Se $u \in T(U) \cap N(T)$, então existirá $v \in U$ tal que $u = T(v)$ e $T(u) = 0$.

Porém, como $T = T^2$, temos

$$u = T(v) = T^2(v) = T(T(v)) = T(u) = 0,$$

ou seja,

$$T(U) \cap N(T) = \{0\}.$$

REFERÊNCIA

- S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC.